

INGENIERÍA MECÁNICA

DINÁMICA

DECIMOSEGUNDA EDICIÓN



R. C. HIBBELER

Ecuaciones fundamentales de dinámica

CINEMÁTICA

Movimiento rectilíneo de una partícula

Variable a	*Constante $a = a_c$*
$a = \dfrac{dv}{dt}$	$v = v_0 + a_c t$
$v = \dfrac{ds}{dt}$	$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_c t^2$
$a\,ds = v\,dv$	$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$

Movimiento curvilíneo de una partícula

Coordenadas x, y, z		*Coordenadas r, θ, z*	
$v_x = \dot{x}$	$a_x = \ddot{x}$	$v_r = \dot{r}$	$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$
$v_y = \dot{y}$	$a_y = \ddot{y}$	$v_\theta = r\dot{\theta}$	$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$
$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$	$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$

Coordenadas n, t, b

$v = \dot{s}$ | $a_t = \dot{v} = v\dfrac{dv}{ds}$

$a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \quad \rho = \dfrac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$

Movimiento relativo

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \quad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$

Movimiento de un cuerpo rígido con respecto a un eje fijo

Variable a	*Constante* a = a$_c$
$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$	$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$
$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_c t^2$
$\omega\,d\omega = \alpha\,d\theta$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$

Para el punto P

$s = \theta r \quad v = \omega r \quad a_t = \alpha r \quad a_n = \omega^2 r$

Movimiento plano general relativo—ejes trasladantes

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A(\text{pasador})} \quad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A(\text{pasador})}$

Movimiento plano general relativo—ejes trasladante y rotatorio

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$

$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$

CINÉTICA

Momento de inercia de masa $\quad I = \int r^2\,dm$

Teorema del eje paralelo $\quad I = I_G + md^2$

Radio de giro $\quad k = \sqrt{\dfrac{I}{m}}$

Ecuaciones de movimiento

Partícula	$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
Cuerpo rígido	$\Sigma F_x = m(a_G)_x$
Movimiento plano	$\Sigma F_y = m(a_G)_y$
	$\Sigma M_G = I_G\alpha$ o $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$

Principio de trabajo y energía

$T_1 + U_{1-2} = T_2$

Energía cinética

Partícula	$T = \frac{1}{2}mv^2$
Cuerpo rígido *Movimiento plano*	$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$

Trabajo

Fuerza variable $\quad U_F = \int F\cos\theta\,ds$

Fuerza constante $\quad U_F = (F_c\cos\theta)\,\Delta s$

Peso $\quad U_W = -W\,\Delta y$

Resorte $\quad U_s = -(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2)$

Momento de par $\quad U_M = M\,\Delta\theta$

Potencia y eficiencia

$P = \dfrac{dU}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \quad \epsilon = \dfrac{P_{\text{sal}}}{P_{\text{ent}}} = \dfrac{U_{\text{sal}}}{U_{\text{ent}}}$

Teorema de conservación de la energía

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Energía potencial

$V = V_g + V_e$, donde $V_g = \pm Wy$, $V_e = +\frac{1}{2}ks^2$

Principio de impulso y cantidad de movimiento lineales

Partícula	$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\int\mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2$
Cuerpo rígido	$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma\int\mathbf{F}\,dt = m(\mathbf{v}_G)_2$

Conservación de la cantidad de movimiento lineal

$\Sigma(\text{syst. } m\mathbf{v})_1 = \Sigma(\text{syst. } m\mathbf{v})_2$

Coeficiente de restitución

$e = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$

Principio de impulso y cantidad de movimiento angulares

Partícula	$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int\mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$ donde $H_O = (d)(mv)$
Cuerpo rígido (*Movimiento plano*)	$(\mathbf{H}_G)_1 + \Sigma\int\mathbf{M}_G\,dt = (\mathbf{H}_G)_2$ donde $H_G = I_G\omega$
	$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int\mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$ donde $H_O = I_O\omega$

Conservación de la cantidad de movimiento angular

$\Sigma(\text{sist. } \mathbf{H})_1 = \Sigma(\text{sist. } \mathbf{H})_2$

Prefijos SI

Múltiplo	*Forma exponencial*	*Prefijo*	*Símbolo SI*
1 000 000 000	10^9	giga	G
1 000 000	10^6	mega	M
1 000	10^3	kilo	k
Submúltiplo			
0.001	10^{-3}	mili	m
0.000 001	10^{-6}	micro	μ
0.000 000 001	10^{-9}	nano	n

Factores de conversión (FPS) a (SI)

Cantidad	*Unidad de medición (FPS)*	*Es igual a*	*Unidades de medición (SI)*
Fuerza	lb		4.4482 N
Masa	slug		14.5938 kg
Longitud	pie		0.3048 m

Factores de conversión (FPS)

1 pie = 12 pulgadas
1 mi (milla) = 5280 pies
1 kip (kilolibra) = 1000 lb
1 ton = 2000 lb

INGENIERÍA MECÁNICA

DINÁMICA

DECIMOSEGUNDA EDICIÓN

RUSSELL C. HIBBELER

TRADUCCIÓN
Rodolfo Navarro Salas
Ingeniero Mecánico
Universidad Nacional Autónoma de México

REVISIÓN TÉCNICA
Miguel Ángel Ríos Sánchez
Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica
División de Ingeniería y Arquitectura (DIA)
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey, Campus Estado de México

Prentice Hall

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

HIBBELER, R. C.

Ingeniería mecánica - Dinámica
Decimosegunda edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2010

ISBN: 978-607-442-560-4
Área: Ingeniería

Formato: 20 × 25.5 cm Páginas: 752

ISBN 978013607791-6

Edición en español
Editor: Luis Miguel Cruz Castillo
e-mail: luis.cruz@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Bernardino Gutiérrez Hernández
Supervisor de producción: Enrique Trejo Hernández

DECIMOSEGUNDA EDICIÓN, 2010

ISBN VERSIÓN IMPRESA: 978-607-442-560-4
ISBN E-BOOK: 978-607-442-662-5
PRIMERA IMPRESIÓN
Impreso en México. *Printed in Mexico*.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 13 12 11 10

Prentice Hall
es una marca de

PEARSON

www.pearsoneducacion.com **ISBN: 978-607-442-560-4**

Al estudiante

Con la esperanza de que este trabajo estimule
un interés en la ingeniería mecánica
y proporcione una guía aceptable para su comprensión.

PREFACIO

El propósito principal de este libro es proporcionar al estudiante una presentación clara y completa de la teoría y las aplicaciones de la ingeniería mecánica. Para alcanzar dicho objetivo, la obra se ha enriquecido con los comentarios y las sugerencias de cientos de revisores que se dedican a la enseñanza, así como muchos de los alumnos del autor. Esta decimosegunda edición ha sido mejorada significativamente en relación con la anterior, por lo que se espera que tanto el profesor como el estudiante se beneficien en gran medida de estas mejoras.

Características nuevas

Problemas fundamentales. Se localizan justo después de los problemas de ejemplo. Ofrecen a los estudiantes aplicaciones simples de los conceptos y, por ende, la oportunidad de desarrollar sus habilidades para resolver ciertas dificultades antes de intentar solucionar algunos de los problemas estándar que siguen. Estos problemas pueden considerarse como ejemplos extendidos puesto que *todos tienen soluciones parciales y respuestas* en la parte final del libro. De manera adicional, los problemas fundamentales ofrecen a los estudiantes un excelente medio para repasar antes de los exámenes; y pueden usarse también como una preparación para el examen de certificación en ingeniería, en Estados Unidos.

Modificaciones al contenido. Cada sección del texto se revisó con cuidado y, en muchas áreas, el material se desarrolló de nuevo a fin de explicar de mejor manera los conceptos. Esto ha incluido agregar o cambiar varios de los ejemplos para dar más énfasis a las aplicaciones de los conceptos importantes.

Problemas conceptuales. A lo largo del texto, por lo general al final de cada capítulo, se incluye una serie de problemas que involucran situaciones conceptuales relacionadas con la aplicación de los principios de mecánica vistos en el capítulo. Estos problemas de análisis y diseño están planteados para que los estudiantes razonen sobre una situación de la vida real, en donde una fotografía ejemplifica el escenario. Los problemas pueden asignarse después de que los estudiantes hayan desarrollado cierta experiencia en el tema.

Fotografías adicionales. La relevancia de conocer el tema estudiado se refleja mediante las aplicaciones en el mundo real que se ilustran en más de 60 fotografías nuevas y actualizadas a lo largo del libro. Estas fotografías se usan generalmente para explicar cómo se aplican los principios de mecánica en situaciones reales. En algunas secciones, las fotografías se utilizan para mostrar que los ingenieros deben crear primero un modelo idealizado para su análisis, y después proceder a dibujar un diagrama de cuerpo libre a partir de él con el fin de aplicar la teoría.

Problemas nuevos. En esta edición se han agregado aproximadamente 850 problemas nuevos, 50% del total, incluyendo aplicaciones en biomecánica e ingeniería aeroespacial y petrolera. Asimismo, esta nueva edición contiene alrededor de 17% más problemas que la edición anterior.

Características particulares

Además de las características nuevas que se acaban de mencionar, hay otras que destacan el contenido del texto, entre ellas las siguientes.

Organización y enfoque. Cada capítulo está organizado en secciones bien definidas que contienen una explicación de temas específicos, problemas de ejemplo ilustrativos y conjuntos de problemas de tarea. Los temas dentro de cada sección se colocan en subgrupos definidos por títulos en letras negritas. El propósito de esto es presentar un método estructurado para introducir cada nueva definición o concepto y convertir al libro en una útil y práctica referencia en repasos posteriores.

Contenido del capítulo. Cada capítulo comienza con una ilustración que muestra una aplicación del tema a tratar, y una lista con viñetas de los objetivos del capítulo para proporcionar una visión general del material que se cubrirá.

Énfasis en los diagramas de cuerpo libre. Al resolver problemas, es particularmente importante dibujar un diagrama de cuerpo libre, y por esa razón este paso se enfatiza a lo largo del libro. En particular, se dedican secciones y ejemplos especiales para mostrar cómo dibujar diagramas de cuerpo libre. También se han agregado problemas de tarea específicos para desarrollar esta práctica.

Procedimientos para el análisis. Al final del primer capítulo, se presenta un procedimiento general para analizar cualquier problema mecánico. Después, este procedimiento se adapta para resolver problemas específicos a lo largo del libro. Esta característica única proporciona al estudiante un método lógico y ordenado que puede seguir al aplicar la teoría. Los problemas de ejemplo se resuelven utilizando este método esquemático a fin de clarificar su aplicación numérica. Sin embargo, una vez que se tiene dominio de los principios relevantes y se ha obtenido confianza y juicio en el método, el estudiante puede desarrollar sus propios procedimientos para la resolución de problemas.

Puntos importantes. Esta característica proporciona un repaso o resumen de los conceptos más importantes en cada sección y resalta los puntos que deben observarse al aplicar la teoría para la resolución de problemas.

Comprensión conceptual. Mediante el uso de las fotografías que se incluyen a lo largo del libro, se aplica la teoría de una manera simplificada, a fin de ilustrar algunas de sus características conceptuales más importantes e infundir el significado físico de muchos de los términos que se usan en las ecuaciones. Estas aplicaciones simplificadas aumentan el interés en el tema estudiado y preparan de mejor manera al estudiante para entender los ejemplos y resolver los problemas.

Problemas de tarea. Además de los problemas fundamentales y conceptuales que se mencionaron, el libro incluye problemas de otro tipo, como los que se describen a continuación:

- **Problemas de diagrama de cuerpo libre.** Algunas secciones del libro contienen problemas introductorios que sólo requieren dibujar el diagrama de cuerpo libre para una situación específica. Estas asignaciones harán que el estudiante conozca la importancia de dominar esta habilidad como un requisito para obtener una solución completa de cualquier problema de equilibrio.

- **Problemas generales de análisis y diseño.** La mayoría de los problemas presentan situaciones reales en la práctica de la ingeniería. Algunos provienen de productos reales usados en la industria. Se espera que este realismo estimule el interés del estudiante en la ingeniería mecánica y ayude a desarrollar la habilidad de reducir cualquier problema de este tipo desde su descripción física hasta un modelo o representación simbólica a la que se le puedan aplicar los principios de la mecánica.

A lo largo del libro existe un balance aproximado de problemas que utilizan unidades SI o FPS. Además, en todas las series se ha hecho un esfuerzo por ordenar los problemas de acuerdo con una dificultad creciente, excepto para los problemas de repaso al final de cada capítulo, los cuales se presentan en orden aleatorio.

- **Problemas de computadora.** Se ha hecho un esfuerzo por incluir algunos problemas que pueden resolverse usando un procedimiento numérico ejecutado en una computadora de escritorio o bien en una calculadora de bolsillo. La intención es ampliar la capacidad del estudiante para que utilice otras formas de análisis matemático sin sacrificar el tiempo, para enfocarse en la aplicación de los principios de la mecánica. Los problemas de este tipo, que pueden o deben resolverse con procedimientos numéricos, se identifican mediante un símbolo "cuadrado" (■) antes del número del problema.

Al existir tantos problemas de tarea en esta nueva edición, se han clasificado en tres categorías diferentes. Los problemas que se indican simplemente mediante un número tienen una respuesta al final del libro. Si el número del problema está precedido por una viñeta (•), además de la respuesta se proporciona una sugerencia, una ecuación clave o un resultado numérico adicional. Por último, un asterisco (*) antes de cada número de problema indica que éste no tiene respuesta.

Exactitud. Al igual que con las ediciones anteriores, la exactitud del texto y de las soluciones a los problemas ha sido verificada con profundidad por el autor y otros cuatro colaboradores: Scott Hendricks, Virginia Polytechnic Institute and State University; Karim Nohra, University of South Florida, Kurt Norlin, Laurel Tech Integrated Publishing Services; y Kai Beng, un ingeniero practicante, quien además de revisar la exactitud proporcionó sugerencias para el desarrollo del contenido.

Contenido

El libro está dividido en 11 capítulos, en los que los principios se aplican primero en situaciones simples y luego en contextos más complicados.

La cinemática de una partícula se estudia en el capítulo 12 y la cinética en los capítulos 13 (Ecuación de movimiento), 14 (Trabajo y energía) y 15 (Impulso y cantidad de movimiento). Los conceptos de dinámica de una partícula contenidos en estos cuatro capítulos se resumen a continuación en una sección de "repaso" y al estudiante se le brinda la oportunidad de identificar y resolver varios problemas. El movimiento plano de un cuerpo rígido se presenta siguiendo una secuencia similar: capítulo 16 (Cinemática plana), capítulo 17 (Ecuaciones de movimiento), capítulo 18 (Trabajo y energía) y capítulo 19 (Impulso y cantidad de movimiento), seguidos por un resumen y un conjunto de problemas de repaso de estos capítulos.

Si el tiempo lo permite, en el curso se puede incluir una parte del material que implica el movimiento de un cuerpo rígido tridimensional. La cinemática y cinética de este movimiento se estudian en los capítulos 20 y 21, respectivamente. Se puede incluir el capítulo 22 (Vibraciones) siempre que el estudiante cuente con el conocimiento matemático necesario. Las secciones del libro que se consideran fuera del ámbito del curso de dinámica básico se indican por medio de una estrella (★) y pueden omitirse. Observe que este material también constituye una referencia apropiada de los principios básicos cuando se estudia en cursos más avanzados. Por último, el apéndice A incluye una lista de fórmulas matemáticas necesarias para resolver los problemas contenidos en el libro. El apéndice B proporciona un breve repaso del análisis vectorial y el apéndice C revisa la aplicación de la regla de la cadena.

Cobertura alternativa. A discreción del profesor, es posible estudiar los capítulos 12 a 19 en el orden siguiente sin perder continuidad: capítulos 12 y 16 (Cinemática), capítulos 13 y 17 (Ecuaciones de movimiento), capítulos 14 y 18 (Trabajo y energía) y capítulos 15 y 19 (Impulso y cantidad de movimiento).

Reconocimientos

El autor se ha empeñado en escribir este libro de manera que resulte atractivo tanto para el estudiante como para el profesor. A través de los años, muchas personas han ayudado en su desarrollo y siempre estaré agradecido por sus valiosos comentarios y sugerencias. En especial, deseo agradecer a las siguientes personas sus comentarios relativos a la preparación de esta decimosegunda edición.

Per Reinhall, *University of Washington*
Faissal A. Moslehy, *University of Central Florida*
Richard R. Neptune, *University of Texas at Austin*
Robert Rennaker, *University of Oklahoma*

También quiero ofrecer un agradecimiento muy especial al profesor Will Liddell, Jr., y a Henry Kahlman. Además, siento que hay otras personas que merecen un reconocimiento particular. Vince O'Brien, director del equipo de administración del proyecto en Pearson Education, y Rose Kernan, mi editora de producción durante muchos años, me dieron su impulso y apoyo. Francamente, sin su ayuda, esta edición totalmente modificada y mejorada no hubiera sido posible. Además, mi amigo y socio por largo tiempo, Kai Beng Yap, me fue de gran ayuda al revisar todo el manuscrito y ayudarme a preparar las soluciones para los problemas. A este respecto, también ofrezco un agradecimiento especial a Kurt Norlan de *Laurel Tech Integrated Publishing Services*. Agradezco la ayuda de mi esposa, Conny, y de mi hija, Mary Ann, quienes durante el proceso de producción ayudaron con la lectura de pruebas y la escritura necesaria para preparar el manuscrito antes de su publicación.

Por último, extiendo mi agradecimiento a todos mis alumnos y a los miembros del profesorado que se han tomado el tiempo de enviarme sus sugerencias y comentarios por correo electrónico. Como esta lista es demasiado larga, espero que aquellos que han proporcionado su ayuda de esta manera acepten este reconocimiento anónimo.

Estaré muy agradecido con ustedes si me envían algún comentario o sugerencia, o si me hacen saber la existencia de problemas de cualquier tipo en relación con esta edición.

Russell Charles Hibbeler
hibbeler@bellsouth.net

Recursos en línea para los profesores (en inglés)

- **Manual de soluciones para el profesor.** Este suplemento proporciona soluciones completas apoyadas por instrucciones y figuras de los problemas. El manual de esta decimosegunda edición se modificó para mejorar su legibilidad y su exactitud se verificó tres veces.

- **Recursos para el profesor.** Los recursos visuales para acompañar el texto se localizan en el sitio web: **www.pearsoneducacion.net/hibbeler**. Es necesario contar con un código y una contraseña para acceder a este sitio; contacte a su representante local de Pearson. Los recursos visuales incluyen todas las ilustraciones del texto, disponibles en diapositivas de PowerPoint y en formato JPEG.

- **Soluciones en video.** Las soluciones en video, desarrolladas por el profesor Edward Berger de la University of Virginia, se localizan en el sitio Web de este texto y ofrecen guías de soluciones paso a paso para los problemas de tarea más representativos de cada sección del texto. Haga un uso eficiente de las horas de clase y oficina mostrando a sus estudiantes los métodos completos y concisos para resolver problemas, a los que pueden tener acceso en cualquier momento para estudiarlos a su propio ritmo. Los videos están diseñados como un recurso flexible que puede usarse cada vez que el profesor y el estudiante lo decidan. Los videos también son un valioso recurso para la autoevaluación del estudiante puesto que puede detenerlos o repetirlos hasta verificar su comprensión, y trabajar a lo largo del material. Puede encontrar estos videos en **www.pearsoneducacion.net/hibbeler** siguiendo los vínculos hasta *Engineering Mechanics: Dynamics*, Twelfth Edition text.

CONTENIDO

Repaso









Créditos

Capítulo 12, Los Ángeles Azules de la Armada de Estados Unidos actúan en un espectáculo aéreo como parte de la celebración de la San Francisco's Fleet Week (Semana de la Flota de San Francisco). ©Roger Ressmeyer/CORBIS. Todos los derechos reservados.

Capítulo 13, Fábrica de jugo de naranja, vista superior. Getty Images.

Capítulo 14, Montaña rusa del parque de diversiones Mukogaokayuen, Kanagawa. ©Yoshio Kosaka/CORBIS. Todos los derechos reservados.

Capítulo 15, Acercamiento de un palo de golf golpeando la pelota en el "tee" de salida. Alamy Images sin derechos de autor.

Capítulo 16, Molinos de viento en Livermore, parte de un extenso parque eólico, una fuente alternativa de energía eléctrica, California, Estados Unidos. Brent Winebrenner/Lonely Planet Images/Foto 20-20.

Capítulo 17, "Dragster" en la pista de carreras de Santa Pod, Inglaterra, Alamy Images.

Capítulo 18, Plataforma de perforación. Getty Images.

Capítulo 19, Acoplamiento de un transbordador de la NASA con la Estación Espacial Internacional. Denis Hallinan/Alamy Images.

Capítulo 20, Robot soldador. ©Ted Horowitz/CORBIS. Todos los derechos reservados.

Capítulo 21, El juego mecánico giratorio Calypso proporciona un trazo borroso de brillantes colores en el parque Waldameer y el Mundo Acuático en Erie, Pennsylvania, Jim Cole/Alamy Images.

Capítulo 22, Una vía y una rueda de ferrocarril dan una gran perspectiva del tamaño y poder del transporte ferroviario. Joe Belanger/Alamy Images.

Cubierta: 1, El helicóptero Lightflight en vuelo. El helicóptero Lightflight es utilizado por el Hospital de la Stanford University del Centro Médico del Valle de Santa Clara. ©CORBIS/ Todos los derechos reservados.

Cubierta: 2, Detalle de las aspas del rotor de cola de un helicóptero. Steve Mann/ Shutterstock.

Las imágenes restantes fueron proporcionadas por el autor.

INGENIERÍA MECÁNICA

DINÁMICA

DECIMOSEGUNDA EDICIÓN



Aunque cada uno de estos aviones es bastante grande, a distancia su movimiento puede ser analizado como si cada uno fuera una partícula.

Cinemática de una partícula

12

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Presentar los conceptos de posición, desplazamiento, velocidad y aceleración.
- Estudiar el movimiento de una partícula a lo largo de una línea recta y representarlo gráficamente.
- Investigar el movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria curva por medio de sistemas de coordenadas diferentes.
- Analizar el movimiento dependiente de dos partículas.
- Examinar los principios de movimiento relativo de dos partículas mediante ejes de traslación.

12.1 Introducción

La *mecánica* es una rama de las ciencias físicas que se ocupa del estado de reposo o movimiento de cuerpos sometidos a la acción de fuerzas. La ingeniería mecánica se divide en dos áreas de estudio, o sea, estática y dinámica. La *estática* se ocupa del equilibrio de un cuerpo que está en reposo o que se mueve con velocidad constante. Aquí consideraremos la *dinámica*, la cual se ocupa del movimiento acelerado de un cuerpo. La materia de dinámica se presentará en dos partes: *cinemática*, la cual trata sólo los aspectos geométricos del movimiento, y *cinética*, que analiza las fuerzas que provocan el movimiento. Para desarrollar estos principios, primero se analizará la dinámica de una partícula, y a continuación se abordarán temas de dinámica de un cuerpo rígido en dos y luego en tres dimensiones.

Históricamente, los principios de dinámica se desarrollaron cuando fue posible medir el tiempo con precisión. Galileo Galilei (1564-1642) fue uno de los primeros contribuyentes importantes a este campo. Su trabajo consistió en experimentos con péndulos y cuerpos en caída libre. Sin embargo, las aportaciones más significativas en dinámica las realizó Isaac Newton (1642-1727), quien se destacó por su formulación de las tres leyes fundamentales del movimiento y la ley de la atracción gravitatoria universal. Poco después de que se postularan estas leyes, Euler, D'Alembert, Lagrange y otros desarrollaron técnicas importantes para su aplicación.

En la ingeniería hay muchos otros problemas cuyas soluciones requieren la aplicación de los principios de dinámica. Por lo común, el diseño estructural de cualquier vehículo, ya sea un automóvil o un avión, requiere considerar el movimiento al cual se somete. Esto también es cierto para muchos dispositivos mecánicos como motores eléctricos, bombas, herramientas móviles, manipuladores industriales y maquinaria. Además, las predicciones de los movimientos de satélites artificiales, proyectiles y naves espaciales están basadas en la teoría de dinámica. Conforme se presenten más avances tecnológicos, habrá incluso una mayor necesidad de saber cómo aplicar los principios de esta materia.

Solución de problemas. Se considera que la dinámica tiene más que ver que la estática, puesto que se deben tomar en cuenta las fuerzas aplicadas tanto a un cuerpo como a su movimiento. Asimismo, muchas aplicaciones requieren cálculo integral, más que sólo álgebra y trigonometría. En todo caso, la forma más efectiva de aprender los principios de dinámica es *resolver problemas*. Para tener éxito en esta tarea, es necesario presentar el trabajo de una manera lógica y ordenada, como lo sugiere la siguiente secuencia de pasos:

1. Lea el problema con cuidado y trate de correlacionar la situación física real con la teoría que haya estudiado.
2. Trace todos los diagramas necesarios y tabule los datos del problema.
3. Establezca un sistema de coordenadas y aplique los principios pertinentes, casi siempre en forma matemática.
4. Resuelva de manera algebraica las ecuaciones necesarias hasta donde sea práctico; luego, utilice un conjunto consistente de unidades y complete la solución numéricamente. Reporte la respuesta sin más cifras significativas que la precisión de los datos dados.
5. Estudie la respuesta con juicio técnico y sentido común para determinar si parece o no razonable.
6. Una vez completadas las soluciones, repase el problema. Trate de pensar en otras formas de obtener la misma solución.

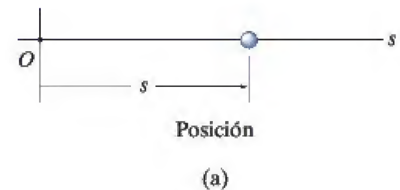
Al aplicar este procedimiento general, realice el trabajo lo más limpiamente posible. Por lo general, ser pulcro estimula una forma de pensar clara y ordenada, y viceversa.

12.2 Cinemática rectilínea: movimiento continuo

Iniciaremos nuestro estudio de dinámica con el análisis de la cinemática de una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria rectilínea. Recuerde que una *partícula* tiene masa pero su tamaño y forma son insignificantes. Por consiguiente, limitaremos la aplicación a aquellos objetos cuyas dimensiones no afecten el análisis del movimiento. En la mayoría de los problemas nos interesarán los cuerpos de tamaño finito, como cohetes, proyectiles o vehículos. Cada uno de estos objetos puede considerarse como una partícula, en cuanto que el movimiento se caracteriza por el movimiento de su centro de masa y se omite cualquier rotación del cuerpo.

Cinemática rectilínea. La cinemática de una partícula se caracteriza al especificar, en cualquier instante, su posición, velocidad y aceleración.

Posición. La trayectoria rectilínea de una partícula se definirá por medio de un solo eje de coordenadas s, figura 12-1*a*. El origen O en la trayectoria es un punto fijo, y a partir de él se utiliza la *coordenada de posición* s para especificar la ubicación de la partícula en cualquier instante dado. La magnitud de s es la distancia de O a la partícula, por lo general medida en metros (m) o pies (ft) y su signo algebraico define el sentido de su dirección. Aunque la selección es arbitraria, en este caso s es positiva puesto que el eje de coordenadas es positivo a la derecha del origen. Asimismo, es negativo si la partícula está a la izquierda de O. Tenga en cuenta que la posición es una cantidad vectorial puesto que tiene tanto magnitud como dirección. En este caso, sin embargo, está representada por el escalar algebraico s puesto que la dirección se mantiene a lo largo del eje de coordenadas.

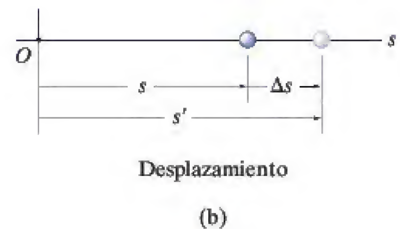


Posición

(a)

Desplazamiento. El *desplazamiento* de la partícula se define como el *cambio* de su *posición*. Por ejemplo, si la partícula se mueve de un punto a otro, figura 12-1*b*, el desplazamiento es

$$\Delta s = s' - s$$



Desplazamiento

(b)

Fig. 12-1

En este caso Δs es *positivo* puesto que la posición final de la partícula queda a la *derecha* de su posición inicial, es decir, $s' > s$. Asimismo, si la posición final quedara a la *izquierda* de su posición inicial, Δs sería *negativo*.

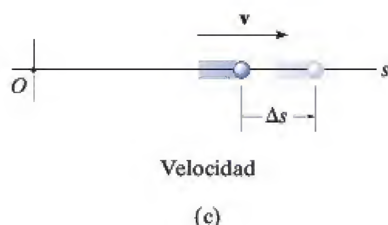
El desplazamiento de una partícula también es una *cantidad vectorial*, y deberá distinguirse de la distancia que recorre la partícula. Específicamente, la *distancia recorrida* es un *escalar positivo* que representa la longitud total de la trayectoria a lo largo de la cual viaja la partícula.

Velocidad. Si la partícula recorre una distancia Δs durante el intervalo Δt, su *velocidad promedio* durante este intervalo es

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Si tomamos valores de Δt cada vez más pequeños, la magnitud de Δs se reduce cada vez más. Por consiguiente, la *velocidad instantánea* es un vector definido como $v = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta s/\Delta t)$, o

$$(\xrightarrow{+}) \qquad v = \frac{ds}{dt} \qquad (12\text{-}1)$$



Velocidad

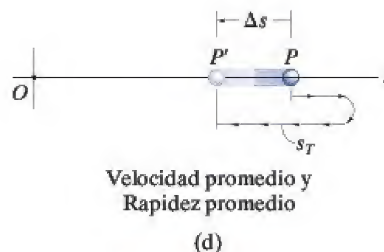
(c)

Como Δt o dt siempre es positivo, el signo utilizado para definir el *sentido* de la velocidad es el mismo que el de Δs o ds. Por ejemplo, si la partícula se está moviendo hacia la *derecha*, figura 12-1*c*, la velocidad es *positiva*; pero si se mueve hacia la *izquierda*, la velocidad es *negativa*. (Esto se resalta aquí con la flecha que aparece a la izquierda de la ecuación 12-1.) La *magnitud* de la velocidad se conoce como *rapidez*, y en general se expresa en unidades de m/s o pies/s.

De vez en cuando se utiliza el término "rapidez promedio". La *rapidez promedio* siempre es un escalar positivo y se define como la distancia total recorrida por una partícula, s_T, dividida entre el tiempo transcurrido Δt; es decir,

$$(v_{\text{rap}})_{\text{prom}} = \frac{s_T}{\Delta t}$$

Por ejemplo, la partícula en la figura 12-1*d* viaja a lo largo de la trayectoria de longitud s_T en el tiempo Δt, por lo que su rapidez promedio es $(v_{\text{rap}})_{\text{prom}} = s_T/\Delta t$, pero su velocidad promedio es $v_{\text{prom}} = -\Delta s/\Delta t$.



Velocidad promedio y Rapidez promedio

(d)

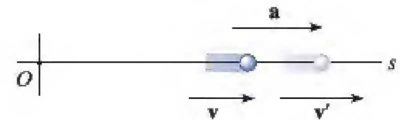
Fig. 12-1 (cont.)

Aceleración. Siempre que se conoce la velocidad de la partícula en dos puntos, su *aceleración promedio* durante el intervalo Δt se define como

$$a_{\text{prom}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Aquí Δv representa la diferencia de la velocidad durante el intervalo Δt, es decir, $\Delta v = v' - v$, figura 12-1*e*.

La *aceleración instantánea* en el instante *t* es un vector que se determina al tomar valores cada vez más pequeños de Δt y valores cada vez más pequeños correspondientes de Δv, de modo que $a = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta v/\Delta t)$, o



Aceleración

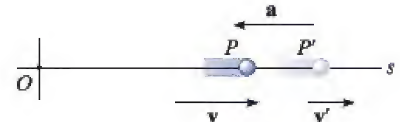
(e)

$$(\xrightarrow{+}) \qquad a = \frac{dv}{dt} \qquad (12\text{-}2)$$

Si sustituimos la ecuación 12-1 en este resultado, también podemos escribir

$$(\xrightarrow{+}) \qquad a = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Tanto la aceleración promedio como la instantánea pueden ser o positivas o negativas. En particular, cuando la partícula *afloja el paso*, o su rapidez se reduce y se dice que se está *desacelerando*. En este caso, v' en la figura 12-1*f* es *menor* que v, de modo que $\Delta v = v' - v$ será negativa. Por consiguiente, *a* también será negativa y por lo tanto actuará a la *izquierda*, en el *sentido opuesto* a v. Además, observe que cuando la *velocidad* es *constante*, la *aceleración es cero* puesto que $\Delta v = v - v = 0$. Las unidades que comúnmente se utilizan para expresar la magnitud de la aceleración son m/s^2 y $pies/s^2$.



Desaceleración

(f)

Por último, se puede obtener una importante relación diferencial que implica el desplazamiento, la velocidad y la aceleración a lo largo de la trayectoria si eliminamos la diferencia de tiempo *dt* entre las ecuaciones 12-1 y 12-2, lo cual da

$$(\xrightarrow{+}) \qquad a\,ds = v\,dv \qquad (12\text{-}3)$$

Aunque ya obtuvimos tres ecuaciones cinemáticas importantes, hay que tener en cuenta que la ecuación anterior no es independiente de las ecuaciones 12-1 y 12-2.

12

Aceleración constante, $a = a_c$. Cuando la aceleración es constante, se puede integrar cada una de las tres ecuaciones cinemáticas $a_c = dv/dt$, $v = ds/dt$ y $a_c\, ds = v\, dv$ para obtener fórmulas que relacionen a_c, v, s y t.

Velocidad como una función del tiempo. Integre $a_c = dv/dt$, con el supuesto de que inicialmente $v = v_0$ cuando $t = 0$.

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{0}^{t} a_c\, dt$$

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad v = v_0 + a_c t \qquad (12\text{-}4)$$

Aceleración constante

Posición como una función del tiempo. Integre $v = ds/dt = v_0 + a_c t$, al suponer que inicialmente $s = s_0$ cuando $t = 0$.

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_{0}^{t} (v_0 + a_c t)\, dt$$

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a_c t^2 \qquad (12\text{-}5)$$

Aceleración constante

Velocidad como una función de posición. Despeje t en la ecuación 12-4 y sustituya en la ecuación 12-5 o integre $v\, dv = a_c\, ds$, al suponer que inicialmente $v = v_0$ cuando $s = s_0$.

$$\int_{v_0}^{v} v\, dv = \int_{s_0}^{s} a_c\, ds$$

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0) \qquad (12\text{-}6)$$

Aceleración constante

La dirección positiva del eje s indicada por la flecha que aparece a la izquierda de cada ecuación determina los signos algebraicos de s_0, v_0 y a_c, utilizados en las tres ecuaciones anteriores. Recuerde que estas ecuaciones son útiles *sólo cuando la aceleración es constante y cuando* $t = 0$, $s = s_0$, $v = v_0$. Un ejemplo típico de movimiento acelerado constante ocurre cuando un cuerpo cae libremente hacia la tierra. Si se ignora la resistencia del aire y la distancia de caída es corta, entonces la aceleración *dirigida hacia abajo* del cuerpo cuando se aproxima a la tierra es constante y aproximadamente de 9.81 m/s^2 o 32.2 pies/s^2. La comprobación de esto se da en el ejemplo 13.2.

Puntos importantes

- La dinámica se ocupa de cuerpos que tienen movimiento acelerado.
- La cinemática es un estudio de la geometría del movimiento.
- La cinética es un estudio de las fuerzas que causan el movimiento.
- La cinemática rectilínea se refiere al movimiento en línea recta.
- La rapidez se refiere a la magnitud de la velocidad.
- La rapidez promedio es la distancia total recorrida, dividida entre el tiempo total. Ésta es diferente de la velocidad promedio, la cual es el desplazamiento dividido entre el tiempo.
- Una partícula que reduce el paso está desacelerando.
- Una partícula puede tener una aceleración y al mismo tiempo una velocidad cero.
- La relación $a\,ds = v\,dv$ se deriva de $a = dv/dt$ y $v = ds/dt$, al eliminar dt.



Durante el tiempo en que este cohete experimenta movimiento rectilíneo, su altitud en función del tiempo puede medirse y expresarse como $s = s(t)$. Su velocidad se determina entonces por $v = ds/dt$, y su aceleración a partir de $a = dv/dt$.

Procedimiento para el análisis

Sistema de coordenadas.

- Establezca una coordenada de posición s a lo largo de la trayectoria y especifique su *origen fijo* y dirección positiva.
- Como el movimiento sucede a lo largo de una línea recta, las cantidades vectoriales de posición, velocidad y aceleración se pueden representar como escalares algebraicas. Para trabajo analítico los *signos algebraicos* de s, v y a se definen entonces por sus signos algebraicos.
- Una flecha mostrada al lado de cada ecuación cinemática indica el sentido positivo de cada uno de estos escalares.

Ecuaciones cinemáticas.

- Si se conoce una relación entre *dos* de las cuatro variables, a, v, s y t, entonces se puede obtener una tercera variable con una de las ecuaciones cinemáticas, $a = dv/dt$, $v = ds/dt$ o $a\,ds = v\,dv$, puesto que cada ecuación relaciona las tres variables.*
- Siempre que se realice una integración, es importante que se conozcan la posición y la velocidad en un instante dado para evaluar o la constante de integración si se utiliza una integral indefinida, o los límites de integración si se utiliza una integral definida.
- Recuerde que las ecuaciones 12-4 a 12-6 tienen sólo un uso limitado. Estas ecuaciones se aplican *sólo* cuando la *aceleración es constante* y las condiciones iniciales son $s = s_0$ y $v = v_0$ cuando $t = 0$.

*En el apéndice A se dan algunas fórmulas de diferenciación e integración estándar.

12

EJEMPLO 12.1

El automóvil de la figura 12-2 se desplaza en línea recta de modo que durante un corto tiempo su velocidad está definida por $v = (3t^2 + 2t)$ pies/s, donde t está en segundos. Determine su posición y aceleración cuando $t = 3$ s. Cuando $t = 0$, $s = 0$.



Fig. 12-2

SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. La coordenada de posición se extiende desde el origen fijo O hasta el carro, positiva a la derecha.

Posición. Como $v = f(t)$, la posición del automóvil se determina con $v = ds/dt$, puesto que esta ecuación relaciona v, s y t. Observe que $s = 0$ cuando $t = 0$, tenemos*

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad v = \frac{ds}{dt} = (3t^2 + 2t)$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t (3t^2 + 2t)dt$$

$$s\Big|_0^s = t^3 + t^2\Big|_0^t$$

$$s = t^3 + t^2$$

Cuando $t = 3$ s,

$$s = (3)^3 + (3)^2 = 36 \text{ pies} \qquad \textit{Resp.}$$

Aceleración. Como $v = f(t)$, la aceleración se determina con $a = dv/dt$, puesto que esta ecuación relaciona a, v y t.

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 + 2t)$$

$$= 6t + 2$$

Cuando $t = 3$ s,

$$a = 6(3) + 2 = 20 \text{ pies/s}^2 \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: para resolver este problema *no pueden* utilizarse las fórmulas de aceleración constante, porque la aceleración es una función del tiempo.

*Se puede obtener el *mismo resultado* al evaluar una constante de integración C en vez de utilizar límites definidos en la integral. Por ejemplo, integrar $ds = (3t^2 + 2t)\,dt$ resulta en $s = t^3 + t^2 + C$. Con la condición de que en $t = 0$, $s = 0$, entonces $C = 0$.

EJEMPLO 12.2

Se dispara un pequeño proyectil verticalmente *hacia abajo* en un medio fluido con una velocidad inicial de 60 m/s. Debido a la resistencia aerodinámica del fluido, el proyectil experimenta una desaceleración de $a = (-0.4v^3)$ m/s^2, donde v está en m/s. Determine la velocidad del proyectil y su posición 4 s después de su disparo.



Fig. 12-3

SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. Como el movimiento es hacia abajo, la coordenada de posición es positiva hacia abajo, con su origen localizado en O, figura 12-3.

Velocidad. En este caso $a = f(v)$ y por tanto debemos determinar la velocidad como una función del tiempo con $a = dv/dt$, ya que esta ecuación relaciona v, a y t. (¿Por qué no se utiliza $v = v_0 + a_c t$?) Al separar las variables e integrar, con $v_0 = 60$ m/s cuando $t = 0$, se obtiene

$$(+\downarrow) \qquad a = \frac{dv}{dt} = -0.4v^3$$

$$\int_{60\text{ m/s}}^{v} \frac{dv}{-0.4v^3} = \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{-0.4}\left(\frac{1}{-2}\right)\frac{1}{v^2}\bigg|_{60}^{v} = t - 0$$

$$\frac{1}{0.8}\left[\frac{1}{v^2} - \frac{1}{(60)^2}\right] = t$$

$$v = \left\{\left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{-1/2}\right\} \text{ m/s}$$

En este caso se toma la raíz positiva, puesto que el proyectil continuará moviéndose hacia abajo. Cuando $t = 4$ s,

$$v = 0.559 \text{ m/s}\downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

Posición. Con $v = f(t)$ conocida, podemos obtener la posición del proyectil mediante $v = ds/dt$, ya que esta ecuación relaciona s, v y t. Al utilizar la condición inicial $s = 0$, cuando $t = 0$, tenemos

$$(+\downarrow) \qquad v = \frac{ds}{dt} = \left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{-1/2}$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t \left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{-1/2} dt$$

$$s = \frac{2}{0.8}\left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{1/2}\bigg|_0^t$$

$$s = \frac{1}{0.4}\left\{\left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{1/2} - \frac{1}{60}\right\} \text{ m}$$

Cuando $t = 4$ s,

$$s = 4.43 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

12

EJEMPLO 12.3

Durante una prueba un cohete asciende a 75 m/s y cuando está a 40 m del suelo su motor falla. Determine la altura máxima s_B alcanzada por el cohete y su velocidad justo antes de chocar con el suelo. Mientras está en movimiento, el cohete se ve sometido a una aceleración constante dirigida hacia abajo de 9.81 m/s^2 debido a la gravedad. Ignore la resistencia del aire.

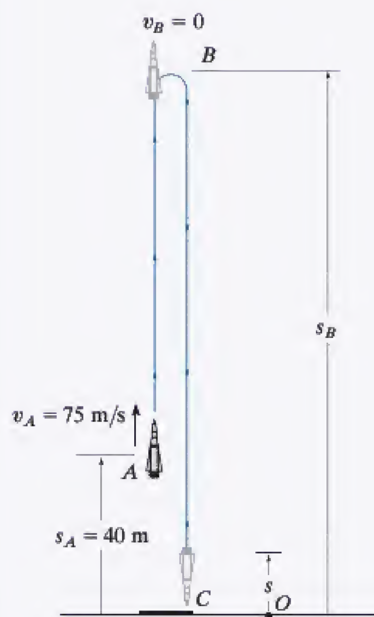


Fig. 12-4

SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. El origen O de la coordenada de posición s se considera al nivel de suelo con signo positivo hacia arriba, figura 12-4.

Altura máxima. Como el cohete *asciende*, $v_A = +75$ m/s cuando $t = 0$. A la altura máxima $s = s_B$ la velocidad $v_B = 0$. Durante todo el movimiento, la aceleración es $a_c = -9.81$ m/s^2 (negativa puesto que actúa en el sentido *opuesto* a la velocidad positiva o desplazamiento positivo). Como a_c es *constante*, la posición del cohete se puede relacionar con su velocidad en los dos puntos A y B de la trayectoria mediante la ecuación 12-6, es decir,

$$(+\uparrow) \qquad v_B^2 = v_A^2 + 2a_c(s_B - s_A)$$

$$0 = (75 \text{ m/s})^2 + 2(-9.81 \text{ m/s}^2)(s_B - 40 \text{ m})$$

$$s_B = 327 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

Velocidad. Para obtener la velocidad del cohete justo antes de que choque con el suelo, podemos aplicar la ecuación 12-6 entre los puntos B y C, figura 12-4.

$$(+\uparrow) \qquad v_C^2 = v_B^2 + 2a_c(s_C - s_B)$$

$$= 0 + 2(-9.81 \text{ m/s}^2)(0 - 327 \text{ m})$$

$$v_C = -80.1 \text{ m/s} = 80.1 \text{ m/s} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

Se eligió la raíz negativa puesto que el cohete está descendiendo.

Del mismo modo, también se puede aplicar la ecuación 12-6 entre los puntos A y C, es decir,

$$(+\uparrow) \qquad v_C^2 = v_A^2 + 2a_c(s_C - s_A)$$

$$= (75 \text{ m/s})^2 + 2(-9.81 \text{ m/s}^2)(0 - 40 \text{ m})$$

$$v_C = -80.1 \text{ m/s} = 80.1 \text{ m/s} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: observe que el cohete está sujeto a una *desaceleración* de A y B de 9.81 m/s^2 y luego de B a C se *acelera* a este ritmo. Además, aun cuando el cohete se *detiene* momentáneamente en B ($v_B = 0$) ¡la aceleración en B sigue siendo de 9.81 m/s^2 dirigida hacia abajo!

EJEMPLO 12.4

Una partícula metálica se somete a la influencia de un campo magnético a medida que desciende a través de un fluido que se extiende de la placa A a la placa B, figura 12-5. Si la partícula se libera del reposo en el punto medio C, $s = 100$ mm y la aceleración es $a = (4s)$ m/s^2, donde s está en metros, determine la velocidad de la partícula cuando llega a la placa B, $s = 200$ mm y el tiempo que le lleva para ir de C a B.

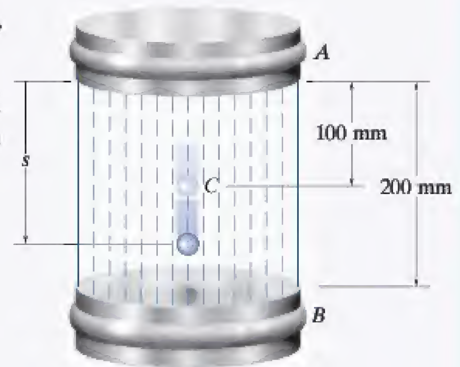


Fig. 12-5

SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. Como se muestra en la figura 12-5, s es positiva hacia abajo, medida a partir de la placa A.

Velocidad. Como $a = f(s)$, la velocidad como una función de la posición se obtiene con $v\,dv = a\,ds$. Habida cuenta que $v = 0$ en $s = 0.1$ m, tenemos

$$(+\downarrow) \qquad v\,dv = a\,ds$$

$$\int_0^v v\,dv = \int_{0.1\text{ m}}^s 4s\,ds$$

$$\frac{1}{2}v^2\Big|_0^v = \frac{4}{2}s^2\Big|_{0.1\text{ m}}^s$$

$$v = 2(s^2 - 0.01)^{1/2}\text{ m/s} \qquad (1)$$

En $s = 200$ mm $= 0.2$ m,

$$v_B = 0.346\text{ m/s} = 346\text{ mm/s}\downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

Se escoge la raíz positiva porque la partícula está descendiendo, es decir, en la dirección $+s$.

Tiempo. El tiempo para que la partícula vaya de C a B se obtiene con $v = ds/dt$ y la ecuación 1, donde $s = 0.1$ m cuando $t = 0$. Del apéndice A,

$$(+\downarrow) \qquad ds = v\,dt$$

$$= 2(s^2 - 0.01)^{1/2}dt$$

$$\int_{0.1}^s \frac{ds}{(s^2 - 0.01)^{1/2}} = \int_0^t 2\,dt$$

$$\ln\left(\sqrt{s^2 - 0.01} + s\right)\Big|_{0.1}^s = 2t\Big|_0^t$$

$$\ln\left(\sqrt{s^2 - 0.01} + s\right) + 2.303 = 2t$$

En $s = 0.2$ m,

$$t = \frac{\ln\left(\sqrt{(0.2)^2 - 0.01} + 0.2\right) + 2.303}{2} = 0.658\text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

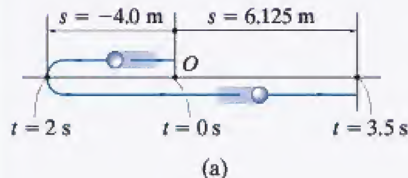
NOTA: las fórmulas de aceleración constante no pueden utilizarse en este ejemplo porque la aceleración cambia con la posición, es decir, $a = 4s$.

12

EJEMPLO 12.5

Una partícula se desplaza a lo largo de una trayectoria horizontal con una velocidad de $v = (3t^2 - 6t)$ m/s, donde t es el tiempo en segundos. Si inicialmente se encuentra en el origen O, determine la distancia recorrida en 3.5 s y la velocidad promedio, así como la rapidez promedio de la partícula durante el intervalo.

SOLUCIÓN



Sistema de coordenadas. Aquí el movimiento positivo es hacia la derecha, medido a partir del origen O, figura 12-6*a*.

Distancia recorrida. Como $v = f(t)$, la posición como una función del tiempo se determina al integrar $v = ds/dt$ con $t = 0, s = 0$.

$$(\xrightarrow{+}) \qquad ds = v\,dt$$

$$= (3t^2 - 6t)dt$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t (3t^2 - 6t)\,dt$$

$$s = (t^3 - 3t^2)\text{m} \qquad (1)$$

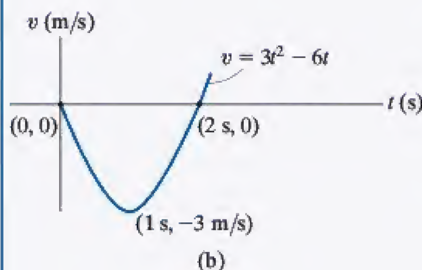


Fig. 12-6

Para determinar la distancia recorrida en 3.5 s, es necesario investigar la trayectoria del movimiento. Si consideramos una gráfica de la función de velocidad, figura 12-6*b*, se ve que con $0 < t < 2$ s la velocidad es *negativa*, lo que significa que la partícula se está desplazando hacia la *izquierda*, y con $t > 2$ s la velocidad es *positiva* y, por consiguiente, la partícula se está desplazando hacia la *derecha*. Asimismo, observe que $v = 0$ cuando $t = 2$ s. La posición de la partícula cuando $t = 0$, $t = 2$ s y $t = 3.5$ s se determina ahora con la ecuación 1. Ésta resulta en

$$s|_{t=0} = 0 \qquad s|_{t=2\text{ s}} = -4.0 \text{ m} \qquad s|_{t=3.5\text{ s}} = 6.125 \text{ m}$$

La trayectoria se muestra en la figura 12-6*a*. De ahí que la distancia recorrida en 3.5 s es

$$s_T = 4.0 + 4.0 + 6.125 = 14.125 \text{ m} = 14.1 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

Velocidad. El *desplazamiento* de $t = 0$ a $t = 3.5$ s es

$$\Delta s = s|_{t=3.5\text{ s}} - s|_{t=0} = 6.125 \text{ m} - 0 = 6.125 \text{ m}$$

y por tanto la velocidad promedio es

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{6.125 \text{ m}}{3.5 \text{ s} - 0} = 1.75 \text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

La rapidez promedio se define en función de la *distancia recorrida* s_T. Este escalar positivo es

$$(v_{\text{rap}})_{\text{prom}} = \frac{s_T}{\Delta t} = \frac{14.125 \text{ m}}{3.5 \text{ s} - 0} = 4.04 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: en este problema, la aceleración es $a = dv/dt = (6t - 6)$ m/s^2, la cual no es constante.

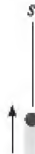
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F12-1. Inicialmente, el automóvil viaja a lo largo de una carretera recta a una rapidez de 35 m/s. Si se aplican los frenos y la rapidez del automóvil se reduce a 10 m/s en 15 s, determine su desaceleración constante.



F12-1

F12-2. Se lanza una bola verticalmente hacia arriba con una rapidez de 15 m/s. Determine el tiempo de vuelo cuando regrese a su posición original.



F12-2

F12-3. Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta a una velocidad de $v = (4t - 3t^2)$ m/s, donde t está en segundos. Determine la posición de la partícula cuando $t = 4$ s. $s = 0$ cuando $t = 0$.



F12-3

F12-4. Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta a una rapidez de $v = (0.5t^3 - 8t)$ m/s, donde t está en segundos. Determine su aceleración cuando $t = 2$ s.



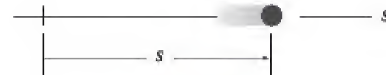
F12-4

F12-5. La fórmula $s = (2t^2 - 8t + 6)$ m, donde t está en segundos, resulta la posición de la partícula. Determine el tiempo cuando su velocidad es cero y la distancia total que recorre cuando $t = 3$ s.



F12-5

F12-6. Una partícula viaja a lo largo de una línea recta con una aceleración de $a = (10 - 0.2s)$ m/s^2, donde s está medida en metros. Determine su velocidad cuando $s = 10$ m si $v = 5$ m/s cuando $s = 0$.



F12-6

F12-7. Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta de modo que su aceleración es $a = (4t^2 - 2)$ m/s^2, donde t está en segundos. Cuando $t = 0$, la partícula está 2 m a la izquierda del origen y cuando $t = 2$s, está 20 m a la izquierda del origen. Determine su posición cuando $t = 4$ s.



F12-7

F12-8. Una partícula viaja a lo largo de una línea recta a una velocidad de $v = (20 - 0.05s^2)$ m/s, donde s está en metros. Determine la aceleración de la partícula cuando $s = 15$ m.



F12-8

12

PROBLEMAS

•**12-1.** Un automóvil arranca del reposo y con aceleración constante alcanza una velocidad de 15 m/s cuando recorre una distancia de 200 m. Determine su aceleración y el tiempo requerido.

12-2. Un tren parte del reposo en una estación y viaja con una aceleración constante de 1 m/s^2. Determine la velocidad del tren cuando t = 30s y la distancia recorrida durante este tiempo.

12-3. Un elevador desciende del reposo con una aceleración de 5 pies/s^2 hasta que alcanza una velocidad de 15 pies/s. Determine el tiempo requerido y la distancia recorrida.

***12-4.** Un automóvil viaja a 15 m/s, cuando el semáforo 50 m adelante cambia a amarillo. Determine la desaceleración constante requerida y el tiempo necesario para que el automóvil se detenga en el semáforo.

•**12-5.** Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta con la aceleración $a = (12t - 3t^{1/2})$ pies/s^2, donde t está en segundos. Determine su velocidad y posición como una función del tiempo. Cuando $t = 0$, $v = 0$ y $s = 15$ pies.

12-6. Se suelta una bola desde el suelo de un elevador cuando éste asciende a una velocidad de 6 pies/s. Si la bola choca con el suelo del foso del elevador en 3 s, determine la altura del elevador con respecto al suelo del foso en el instante en que se suelta la bola. Además, determine la velocidad de la bola cuando choca con el suelo del foso.

12-7. La rapidez inicial de un automóvil es de 25 m/s y su desaceleración constante es de 3 m/s^2. Determine su velocidad cuando t = 4 s. ¿Cuál es su desplazamiento durante el intervalo de 4 s? ¿Cuánto tiempo se requiere para detenerlo?

***12-8.** Si la velocidad inicial de una partícula es de v_0 = 12 pies/s hacia la derecha cuando $s_0 = 0$, determine su posición cuando t = 10 s, si a = 2 pies/s^2 hacia la izquierda.

•**12-9.** La aceleración de una partícula que viaja a lo largo de una línea recta es $a = k/v$ donde k es una constante. Si $s = 0$, $v = v_0$ cuando $t = 0$, determine su velocidad como una función del tiempo t.

12-10. El automóvil A parte del reposo cuando $t = 0$ y viaja a lo largo de una carretera recta con una aceleración constante de 6 pies/s^2 hasta que alcanza una rapidez de 80 pies/s. Después mantiene esta rapidez. Además, cuando $t = 0$, el automóvil B, localizado a 6000 pies del automóvil A, viaja hacia éste a una rapidez constante de 60 pies/s. Determine la distancia recorrida por el automóvil A cuando se cruzan.



Prob. 12-10

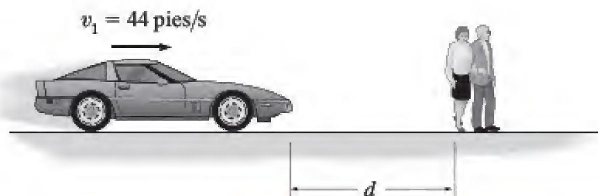
12-11. Una partícula viaja a lo largo de una línea recta a una velocidad $v = (12 - 3t^2)$ m/s, donde t está en segundos. Cuando t = 1 s, la partícula está 10 m a la izquierda del origen. Determine la aceleración cuando t = 4 s, el desplazamiento desde t = 0 hasta t = 10 s y la distancia que la partícula recorre durante este intervalo.

***12-12.** Se lanza una esfera hacia abajo con una rapidez inicial de 27 m/s. Experimenta una desaceleración de $a = (-6t)$ m/s^2, donde t está en segundos; determine la distancia recorrida antes de que se detenga.

•**12-13.** Una partícula viaja a lo largo de una línea recta de modo que en 2 s se desplaza de una posición inicial s_A = +0.5 m a una posición s_B = −1.5 m, y luego en otros 4 segundos se desplaza de s_B a s_C = +2.5 m. Determine su velocidad y rapidez promedio durante el intervalo de 6 s.

12-14. Una partícula viaja a lo largo de una línea recta de modo que en 4 s se desplaza de una posición inicial s_A = −8 m a una posición s_B = +3 m. Luego en otros 5 s se desplaza de s_B a s_C = −6 m. Determine su velocidad y rapidez promedio durante el intervalo de 9 s.

12-15. Pruebas revelan que un conductor normal requiere unos 0.75 s antes de que pueda *reaccionar* ante una situación para evitar un choque. Se requieren unos 3 s para que un conductor con 0.1% de alcohol en su sistema haga lo mismo. Si tales conductores viajan por una carretera recta a 30 mph (44 pies/s) y sus automóviles pueden desacelerar a 2 pies/s^2, determine la distancia de frenado más corta d de cada uno a partir del momento en que se ven los peatones. *Moraleja:* ¡si bebe, por favor no maneje!



Prob. 12-15

***12-16.** A medida que un tren acelera uniformemente pasa por marcas de kilómetro sucesivas mientras viaja a velocidades de 2 m/s y luego de 10 m/s. Determine su velocidad cuando pase por la siguiente marca de kilómetro y el tiempo que requiera para recorrer la distancia de 2 km.

•12-17. Se lanza una pelota con una velocidad dirigida hacia arriba de 5 m/s desde la parte superior de un edificio de 10 m. Un segundo después se lanza otra pelota verticalmente desde el suelo con una velocidad de 10 m/s. Determine la altura desde el suelo donde las dos pelotas se cruzan.

12-18. Un automóvil arranca del reposo y se desplaza con una aceleración constante de 1.5 m/s^2 hasta que alcanza una velocidad de 25 m/s. Entonces se desplaza a velocidad constante durante 60 segundos. Determine la rapidez promedio y la distancia total recorrida.

12-19. Hay que subir un automóvil por un elevador hasta el cuarto piso de un estacionamiento, el cual está a 48 pies del suelo. Si el elevador puede acelerarse a 0.6 pies/s^2, desacelerarse a 0.3 pies/s^2 y alcanzar una velocidad máxima de 8 pies/s, determine el tiempo más corto para izar el automóvil, desde el reposo inicial hasta el reposo final.

***12-20.** Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta a una rapidez definida como $v = (-4s^2)$ m/s, donde s está en metros. Si $s = 2$ m cuando $t = 0$, determine la velocidad y aceleración como funciones del tiempo.

•12-21. Dos partículas A y B parten del reposo en el origen $s = 0$ y se desplazan a lo largo de una línea recta de modo que $a_A = (6t - 3)$ pies/s^2 y $a_B = (12t^2 - 8)$ pies/s^2, donde t está en segundos. Determine la distancia entre ellas cuando $t = 4$ s y la distancia total que cada una recorre en $t = 4$ s.

12-22. Una partícula que se desplaza a lo largo de una línea recta se somete a una desaceleración $a = (-2v^3)$ m/s^2, donde v está en m/s. Si su velocidad es $v = 8$ m/s y su posición es $s = 10$ m cuando $t = 0$, determine su velocidad y posición cuando $t = 4$ s.

12-23. Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta de modo que su aceleración se define como $a = (-2v)$ m/s^2, donde v está en metros por segundo. Si $v = 20$ m/s cuando $s = 0$ y $t = 0$, determine la posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo.

***12-24.** Una partícula sale del reposo y viaja a lo largo de una línea recta con una aceleración $a = (30 - 0.2v)$ pies/s^2, donde v está en pies/s. Determine el tiempo en que la velocidad de la partícula es $v = 30$ pies/s.

•12-25. Cuando una partícula se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de v_0, experimenta una aceleración $a = -(g + kv^2)$, donde g es la aceleración de la gravedad, k es una constante y v es la velocidad de la partícula. Determine la altura máxima alcanzada por la partícula.

12-26. La aceleración de una partícula que se desplaza a lo largo de una línea recta es $a = (0.02e^t)$ m/s^2, donde t está en segundos. Si $v = 0$, $s = 0$ cuando $t = 0$, determine su velocidad y aceleración cuando $s = 4$ m.

12-27. Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta con una aceleración de $a = 5/(3s^{1/3} + s^{5/2})$ m/s^2, donde s está en metros. Determine su velocidad cuando $s = 2$ m, si parte del reposo cuando $s = 1$ m. Use la regla de Simpson para evaluar la integral.

***12-28.** Si se toman en cuenta los efectos de la resistencia atmosférica, un cuerpo que cae tiene una aceleración definida por la ecuación $a = 9.81[1 - v^2(10^{-4})]$ m/s^2, donde v está en m/s y la dirección positiva es hacia abajo. Si el cuerpo se suelta del reposo desde una *gran altitud*, determine (a), la velocidad cuando $t = 5$ s y (b) la velocidad terminal o máxima alcanzable (a medida que $t \to \infty$).

12

•**12-29.** La posición de una partícula a lo largo de una línea recta está dada por $s = (1.5t^3 - 13.5t^2 + 22.5t)$ pies, donde t está en segundos. Determine la posición de la partícula cuando $t = 6$ s y la distancia total que recorre durante el intervalo de 6 s. *Sugerencia:* trace la trayectoria para determinar la distancia total recorrida.

12-30. La velocidad de una partícula que se desplaza a lo largo de una línea recta es $v = v_0 - ks$, donde k es constante. Si $s = 0$ cuando $t = 0$, determine la posición y aceleración de la partícula como una función del tiempo.

12-31. La aceleración de una partícula a medida que se mueve a lo largo de una línea recta está dada por $a = (2t - 1)$ m/s^2 donde t está en segundos. Si $s = 1$ m y $v = 2$ m/s cuando $t = 0$, determine la velocidad y posición de la partícula cuando $t = 6$ s. También, determine la distancia total que la partícula recorre durante este intervalo.

*__12-32.__ La pelota A se lanza verticalmente hacia arriba desde la azotea de un edificio de 30 m de altura con una velocidad inicial de 5 m/s. Al mismo tiempo se lanza otra pelota B hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 20 m/s. Determine la altura desde el suelo y el tiempo en que se cruzan.

•**12-33.** Una motocicleta arranca desde el reposo cuando $t = 0$ y viaja a lo largo de una carretera recta a una velocidad constante de 6 pies/s^2 hasta que alcanza una rapidez de 50 pies/s. Después mantiene esta rapidez. Además, cuando $t = 0$, un automóvil situado a 6000 pies de la motocicleta viaja hacia ésta a un rapidez constante de 30 pies/s. Determine el tiempo y la distancia recorrida por la motocicleta cuando se cruzan.

12-34. Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta con una velocidad $v = (200/s)$ mm/s, donde s está en milímetros. Determine la aceleración de la partícula cuando $s = 2000$ mm. ¿Cuánto tiempo requiere la partícula para alcanzar esta posición si $s = 500$ mm cuando $t = 0$?

■**12-35.** La rapidez inicial de una partícula es de 27 m/s. Si experimenta una desaceleración de $a = (-6t)$ m/s^2, donde t está en segundos, determine su velocidad después de que ha recorrido 10 m. ¿Cuánto tiempo requiere esto?

*__12-36.__ La aceleración de una partícula que se desplaza a lo largo de una línea recta es $a = (8 - 2s)$ m/s^2, donde s está en metros. Si $v = 0$ cuando $s = 0$, determine la velocidad de la partícula cuando $s = 2$ m y su posición cuando la velocidad es máxima.

•**12-37.** La pelota A se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de v_0. La pelota B se lanza verticalmente hacia arriba desde el mismo punto con la misma velocidad t segundos después. Determine el tiempo transcurrido $t < 2v_0/g$ desde el instante en que se lanza la pelota A hasta cuando las pelotas se cruzan entre sí, y determine la velocidad de cada una en este instante.

12-38. Cuando se lanza un cuerpo a una alta altitud por encima de la *superficie* de la Tierra, se debe tomar en cuenta la variación de la aceleración de la gravedad con respecto a la altitud. Ignorando la resistencia del aire, esta aceleración se determina con la fórmula $a = -g_0[R^2/(R + y)^2]$, donde g_0 es la aceleración de la gravedad constante al nivel del mar, R es el radio de la Tierra y la dirección positiva se mide hacia arriba. Si $g_0 = 9.81$ m/s^2 y $R = 6356$ km, determine la velocidad inicial mínima (velocidad de escape) a la que se debe disparar un proyectil verticalmente desde la superficie terrestre de modo que no caiga de regreso a la Tierra. *Sugerencia:* esto requiere que $v = 0$ a medida que $y \to \infty$.

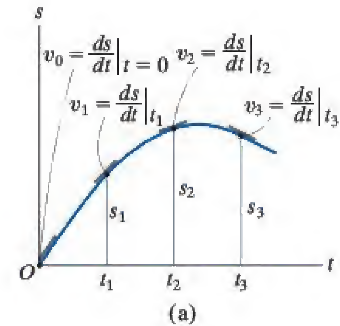
12-39. Teniendo en cuenta la variación de la aceleración de la gravedad a con respecto a la altitud y (vea el problema 12-38), derive una ecuación que relacione la velocidad de una partícula que cae libremente hasta su altitud. Suponga que la partícula se suelta del reposo a una altitud y_0 de la superficie de la Tierra. ¿Con qué velocidad choca la partícula con la Tierra si se suelta del reposo a una altitud $y_0 = 500$ km? Use los datos numéricos del problema 12-38.

*__12-40.__ Cuando una partícula cae a través del aire, su aceleración inicial $a = g$ se reduce hasta que es cero, y después cae a una velocidad constante o terminal v_f. Si esta variación de la aceleración puede expresarse como $a = (g/v^2_f)(v^2_f - v^2)$, determine el tiempo requerido para que la velocidad sea $v = v_f/2$. Inicialmente la partícula cae del reposo.

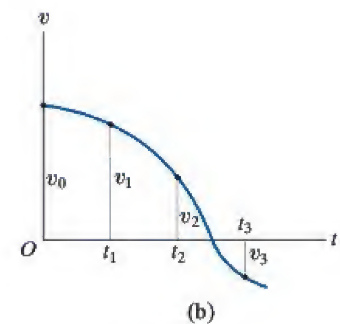
•**12-41.** Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta de modo que su posición con respecto a un punto fijo es $s = (12 - 15t^2 + 5t^3)$ m, donde t está en segundos. Determine la distancia total recorrida por la partícula desde $t = 1$s hasta $t = 3$s. También, determine la rapidez promedio de la partícula durante este intervalo.

12

12.3 Cinemática rectilínea: movimiento errático



(a)



(b)

Fig. 12-7

Cuando el movimiento de una partícula es errático o variable, su posición, velocidad y aceleración *no pueden* describirse mediante una sola función matemática continua a lo largo de toda la trayectoria. En su lugar, se requerirá una serie de funciones para especificar el movimiento en diferentes intervalos. Por eso, conviene representar el movimiento como una gráfica. Si se puede trazar una gráfica del movimiento que relacione dos de las variables s, v, a, t, entonces esta gráfica puede utilizarse para construir gráficas subsecuentes que relacionen otras dos variables, puesto que las variables están relacionadas por las relaciones diferenciales $v = ds/dt$, $a = dv/dt$ o $a\,ds = v\,dv$. Con frecuencia ocurren varias situaciones.

Gráficas de s-t, v-t y a-t. Para construir la gráfica de v-t dada la gráfica de s-t, figura 12-7*a*, deberá utilizarse la ecuación $v = ds/dt$, ya que relaciona las variables s y t con v. Esta ecuación establece que

$$\frac{ds}{dt} = v$$

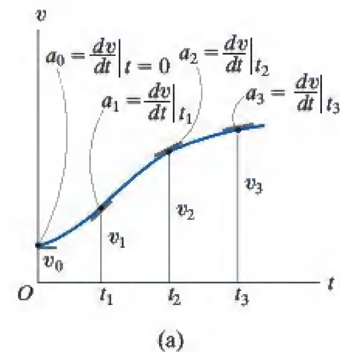
pendiente de la gráfica de s-t = velocidad

Por ejemplo, si se mide la pendiente en la gráfica de s-t cuando $t = t_1$, la velocidad es v_1, la cual se traza en la figura 12-7*b*. La gráfica de v-t se construye trazando ésta y otros valores en cada instante.

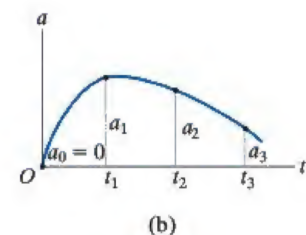
La gráfica de a-t se construye a partir de la gráfica de v-t del mismo modo, figura 12-8 puesto que

$$\frac{dv}{dt} = a$$

pendiente de la gráfica de v-t = aceleración



(a)



(b)

Fig. 12-8

En la figura 12-8*a* se muestran ejemplos de varias mediciones y se grafican en la figura 12-8*b*.

Si la curva s-t correspondiente a cada intervalo de movimiento puede expresarse mediante una función matemática $s = s(t)$, entonces la ecuación de la gráfica de v-t correspondiente al mismo intervalo se obtiene diferenciando esta función con respecto al tiempo puesto que $v = ds/dt$. Asimismo, la ecuación de la gráfica de a-t en el mismo intervalo se determina al diferenciar $v = v(t)$ puesto que $a = dv/dt$. Como la diferenciación reduce un polinomio de grado n a uno de grado n-1, en tal caso si la gráfica de s-t es parabólica (una curva de segundo grado), la gráfica de v-t será una línea inclinada (una curva de primer grado) y la gráfica de a-t será una constante o una línea horizontal (una curva de grado cero).

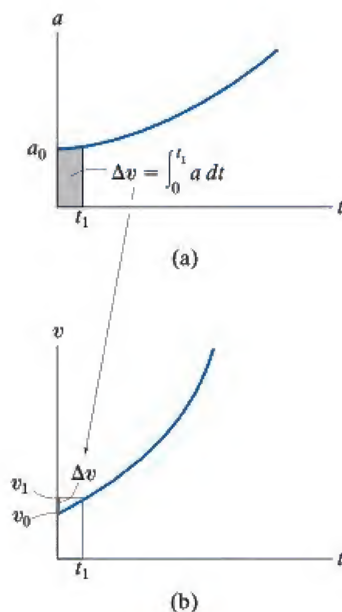


Fig. 12-9

Si se proporciona la gráfica de a-t, figura 12-9*a*, la gráfica de v-t se construye por medio de $a = dv/dt$, escrita como

$$\Delta v = \int a\,dt$$

$$\text{cambio de velocidad} = \text{área bajo la gráfica de } a\text{-}t$$

Por consiguiente, para construir la gráfica de v-t, comenzamos con la velocidad inicial de la partícula v_0 y luego agregamos a ésta pequeños incrementos de área (Δv) determinados a partir de la gráfica de a-t. De este modo, se determinan puntos sucesivos, $v_1 = v_0 + \Delta v$, etcétera, para la gráfica de v-t, figura 12-9*b*. Observe que la adición algebraica de los incrementos de área de la gráfica de a-t es necesaria, puesto que las áreas situadas por encima del eje t corresponden a un incremento de v (área "positiva"), mientras que las que quedan debajo del eje indican una reducción de v (área "negativa").

Asimismo, si se presenta la gráfica de v-t, figura 12-10*a*, es posible determinar la gráfica de s-t por medio de $v = ds/dt$, escrita como

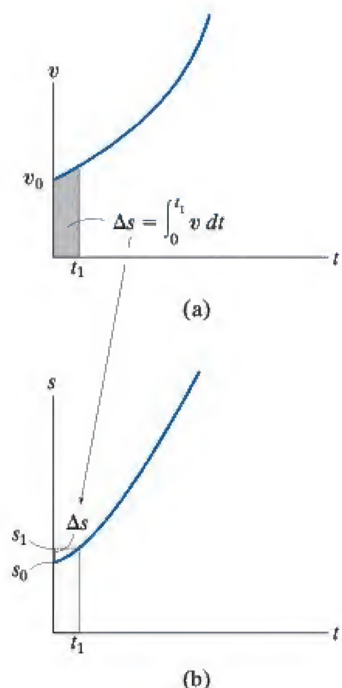


Fig. 12-10

$$\Delta s = \int v\,dt$$

$$\text{desplazamiento} = \text{área bajo la gráfica de } v\text{-}t$$

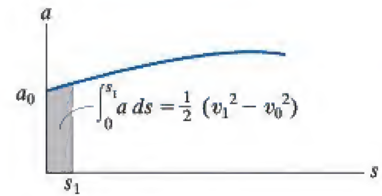
Como previamente se hizo, comenzamos con la posición inicial de la partícula s_0 y agregamos a ésta (algebraicamente) pequeños incrementos de área Δs determinados a partir de la gráfica de v-t, figura 12-10*b*.

Si segmentos de la gráfica de a-t pueden describirse mediante una serie de ecuaciones, entonces cada una éstas puede ser *integrada* para obtener ecuaciones que describen los segmentos correspondientes de la gráfica de v-t. Del mismo modo, la gráfica de s-t se obtiene al integrar las ecuaciones que describen los segmentos de la gráfica de v-t. Por consiguiente, si la gráfica de a-t es lineal (una curva de primer grado), la integración dará una gráfica de v-t que es parabólica (una curva de segundo grado) y una gráfica de s-t que es cúbica (una curva de tercer grado).

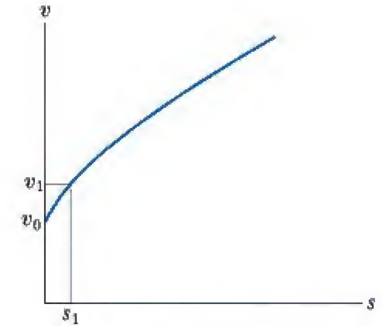
Gráficas de *v-s* y *a-s*. Si la gráfica de *a-s* puede construirse, entonces los puntos en la gráfica de *v-s* se determinan por medio de $v\,dv = a\,ds$. Si integramos esta ecuación entre los límites $v = v_0$ con $s = s_0$ y $v = v_1$ con $s = s_1$, tenemos,

$$\frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) = \int_{s_0}^{s_1} a\,ds$$

área bajo la gráfica de *a-s*



(a)



(b)

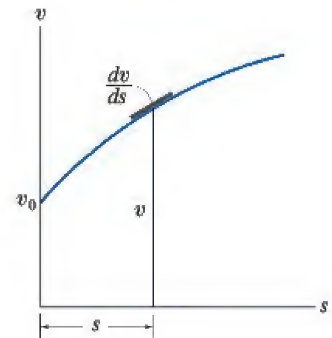
Fig. 12-11

Por consiguiente, si se determina el área de color gris en la figura 12-11*a* y se conoce la velocidad inicial v_0 en $s_0 = 0$, entonces $v_1 = \left(2\int_{s_0}^{s_1} a\,ds + v_0^2\right)^{1/2}$, figura 12-11*b*. De esta manera se pueden marcar puntos sucesivos en la gráfica de *v-s*.

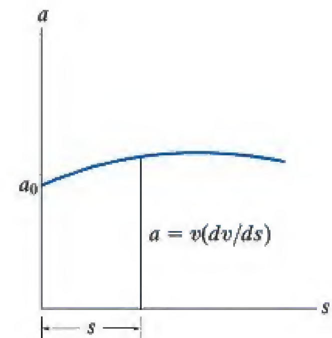
Si se conoce la gráfica de *v-s*, la aceleración *a* en cualquier posición *s* se determina por medio de $a\,ds = v\,dv$, escrita como

$$a = v\left(\frac{dv}{ds}\right)$$

aceleración = velocidad por la pendiente de la gráfica de *v-s*



(a)



(b)

Fig. 12-12

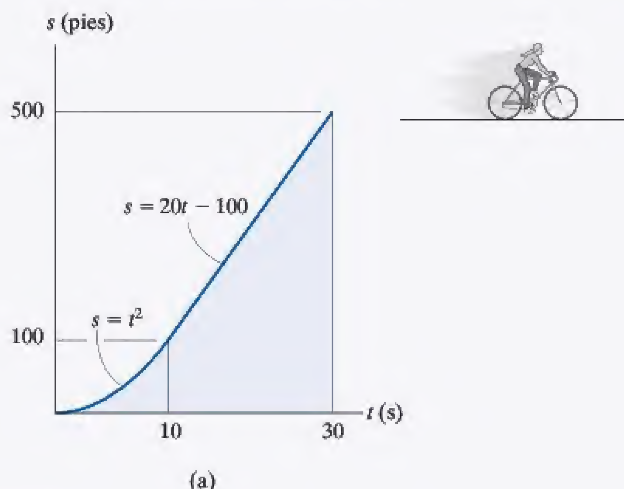
Por tanto en cualquier punto (s, v) de la figura 12-12*a*, se mide la pendiente dv/ds de la gráfica de *v-s*. Entonces, con *v* y dv/ds conocidas, se calcula el valor de *a*, figura 12-12*b*.

La gráfica de *v-s* también se construye a partir de la gráfica de *a-s* o viceversa, por aproximación de la gráfica conocida en varios intervalos con funciones matemáticas, $v = f(s)$ o $a = g(s)$ y luego por $a\,ds = v\,dv$ para obtener la otra gráfica.

12

EJEMPLO 12.6

Una bicicleta rueda a lo largo de una carretera recta de modo que la gráfica de la figura 12-13*a* describe su posición. Construya las gráficas de v-t y a-t en el intervalo $0 \le t \le 30$ s.



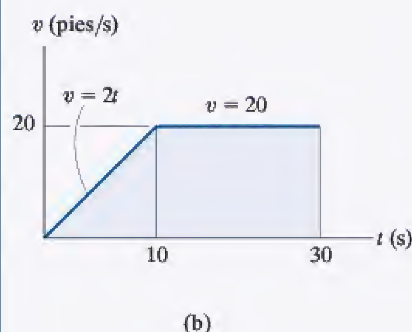
(a)

SOLUCIÓN

Gráfica de v-t. Como $v = ds/dt$, la gráfica de v-t se determina diferenciando las ecuaciones que definen la gráfica de s-t, figura 12-13*a*. Tenemos

$$0 \le t < 10 \text{ s}; \qquad s = (t^2) \text{ pies} \qquad v = \frac{ds}{dt} = (2t) \text{ pies/s}$$

$$10 \text{ s} < t \le 30 \text{ s}; \qquad s = (20t - 100) \text{ pies} \qquad v = \frac{ds}{dt} = 20 \text{ pies/s}$$



(b)

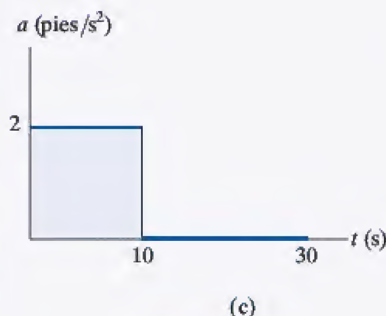
Los resultados se han trazado en la figura 12-13*b*. También podemos obtener valores específicos de v al medir la *pendiente* de la gráfica de s-t en un instante dado. Por ejemplo, con $t = 20$ s, la pendiente de la gráfica de s-t se determina a partir de la línea recta de 10 s a 30 s, es decir,

$$t = 20 \text{ s}; \qquad v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{500 \text{ pies} - 100 \text{ pies}}{30 \text{ s} - 10 \text{ s}} = 20 \text{ pies/s}$$

Gráfica de a-t. Como $a = dv/dt$, la gráfica de a-t se determina si se diferencian las ecuaciones que definen las líneas de la gráfica de v-t. Esto resulta

$$0 \le t < 10 \text{ s}; \qquad v = (2t) \text{ pies/s} \qquad a = \frac{dv}{dt} = 2 \text{ pies/s}^2$$

$$10 < t \le 30 \text{ s}; \qquad v = 20 \text{ pies/s} \qquad a = \frac{dv}{dt} = 0$$



(c)

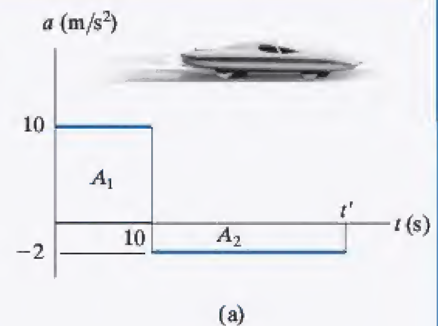
Fig. 12-13

Los resultados se grafican en figura 12-13*c*.

NOTA: compruebe que $a = 2$ pies/s^2 cuando $t = 5$ s al medir la pendiente de la gráfica de v-t.

EJEMPLO 12.7

El automóvil de la figura 12-14*a* arranca del reposo y viaja a lo largo de una pista recta de modo que acelera a 10 m/s² durante 10 s y luego desacelera a 2 m/s². Trace las gráficas de *v-t* y *s-t* y determine el tiempo t' necesario para detener el automóvil. ¿Qué distancia ha recorrido el automóvil?



(a)

SOLUCIÓN

Gráfica de v-t. Como $dv = a\,dt$ la gráfica *v-t* se determina al integrar los segmentos de línea recta de la gráfica de *a-t*. Con la *condición inicial* $v = 0$ cuando $t = 0$, tenemos

$$0 \le t < 10\text{ s}; \quad a = (10)\text{ m/s}^2; \quad \int_0^v dv = \int_0^t 10\,dt, \qquad v = 10t$$

Cuando $t = 10$ s, $v = 10(10) = 100$ m/s. Con esto como la *condición inicial* para el siguiente intervalo, tenemos

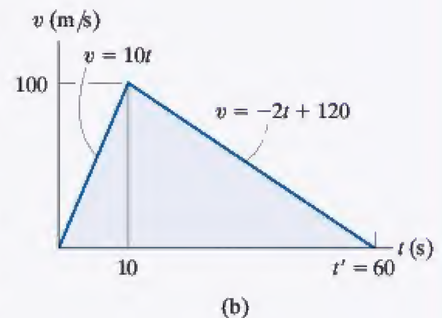
$$10\text{ s} < t \le t';\ a = (-2)\text{ m/s}^2;\ \int_{100\text{ m/s}}^v dv = \int_{10\text{ s}}^t -2\,dt,\ v = (-2t + 120)\text{ m/s}$$

Cuando $t = t'$ requerimos $v = 0$. Esto resulta, figura 12-14*b*,

$$t' = 60\text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

Una solución más directa para t' es posible si se tiene en cuenta que el área bajo la gráfica de *a-t* es igual al cambio de la velocidad del automóvil. Requerimos $\Delta v = 0 = A_1 + A_2$, figura 12-14*a*. Por tanto

$$0 = 10\text{ m/s}^2(10\text{ s}) + (-2\text{ m/s}^2)(t' - 10\text{ s})$$
$$t' = 60\text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

Gráfica de s-t. Ya que $ds = v\,dt$, al integrar las ecuaciones de la gráfica de *v-t* se obtienen las ecuaciones correspondientes de la gráfica de *s-t*. Al usar la *condición inicial* $s = 0$ cuando $t = 0$, tenemos

$$0 \le t \le 10\text{ s}; \quad v = (10t)\text{ m/s}; \quad \int_0^s ds = \int_0^t 10t\,dt, \qquad s = (5t^2)\text{ m}$$

Cuando $t = 10$ s, $s = 5(10)^2 = 500$ m. Al usar esta *condición inicial*,

$$10\text{ s} \le t \le 60\text{ s};\ v = (-2t + 120)\text{ m/s};\ \int_{500\text{ m}}^s ds = \int_{10\text{ s}}^t (-2t + 120)\,dt$$

$$s - 500 = -t^2 + 120t - [-(10)^2 + 120(10)]$$
$$s = (-t^2 + 120t - 600)\text{ m}$$

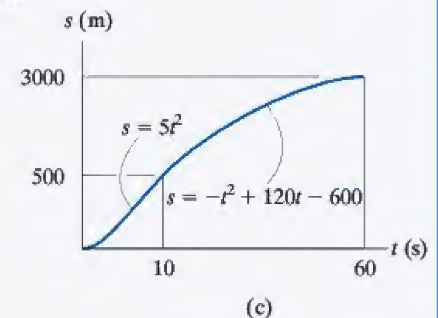
Cuando $t' = 60$ s, la posición es

$$s = -(60)^2 + 120(60) - 600 = 3000\text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

La gráfica de *s-t* se muestra en la figura 12-14*c*.

NOTA: una solución directa para *s* es posible cuando $t' = 60$ s, puesto que el *área triangular* bajo la gráfica de *v-t* resulta el desplazamiento $\Delta s = s - 0$ desde $t = 0$ a $t' = 60$ s. Por consiguiente,

$$\Delta s = \tfrac{1}{2}(60\text{ s})(100\text{ m/s}) = 3000\text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$



(c)

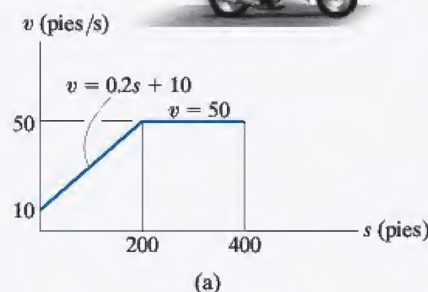
Fig. 12-14

12

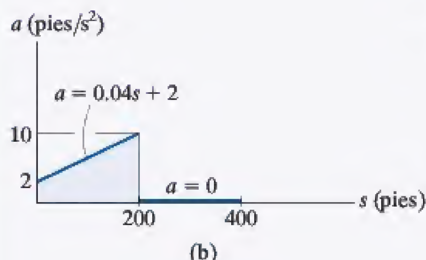
EJEMPLO 12.8

La gráfica de v-s que describe el movimiento de una motocicleta se muestra en la figura 12-15a. Trace la gráfica de a-s del movimiento y determine el tiempo requerido para que la motocicleta alcance la posición $s = 400$ pies.





(a)



(b)

Fig. 12-15

SOLUCIÓN

Gráfica de *a-s*. Como se dan las ecuaciones de los segmentos de la gráfica de v-s, la gráfica de a-s se determina con $a\,ds = v\,dv$.

$0 \leq s < 200$ pies; $\qquad v = (0.2s + 10)$ pies/s

$$a = v\frac{dv}{ds} = (0.2s + 10)\frac{d}{ds}(0.2s + 10) = 0.04s + 2$$

200 pies $< s \leq 400$ pies; $\qquad v = 50$ pies/s

$$a = v\frac{dv}{ds} = (50)\frac{d}{ds}(50) = 0$$

Los resultados se grafican en la figura 12-15b.

Tiempo. El tiempo se obtiene con la gráfica v-s y $v = ds/dt$, porque esta ecuación relaciona v, s y t. Para el primer segmento del movimiento, $s = 0$ cuando $t = 0$, por tanto

$0 \leq s < 200$ pies; $\quad v = (0.2s + 10)$ pies/s; $\quad dt = \dfrac{ds}{v} = \dfrac{ds}{0.2s + 10}$

$$\int_0^t dt = \int_0^s \frac{ds}{0.2s + 10}$$

$$t = (5\ln(0.2s + 10) - 5\ln 10)\text{ s}$$

Cuando $s = 200$ pies, $t = 5\ln[0.2(200) + 10] - 5\ln 10 = 8.05$ s. Por consiguiente, si utilizamos estas condiciones iniciales para el segundo segmento del movimiento,

200 pies $< s \leq 400$ pies; $\qquad v = 50$ pies/s; $\qquad dt = \dfrac{ds}{v} = \dfrac{ds}{50}$

$$\int_{8.05\text{ s}}^t dt = \int_{200\text{ m}}^s \frac{ds}{50};$$

$$t - 8.05 = \frac{s}{50} - 4; \quad t = \left(\frac{s}{50} + 4.05\right)\text{s}$$

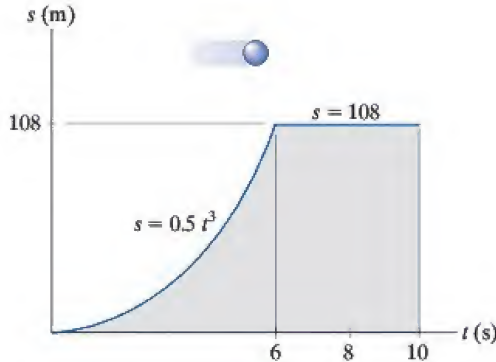
Por consiguiente, cuando $s = 400$ pies,

$$t = \frac{400}{50} + 4.05 = 12.0\text{ s}$$ ***Resp.***

NOTA: los resultados gráficos se comprueban en parte al calcular las pendientes. Por ejemplo, cuando $s = 0$, $a = v(dv/ds) = 10(50 - 10)/200 = 2$ m/s^2. Además, los resultados se comprueban en parte por inspección. La gráfica de v-s indica el incremento inicial de la velocidad (aceleración) seguido por velocidad constante ($a = 0$).

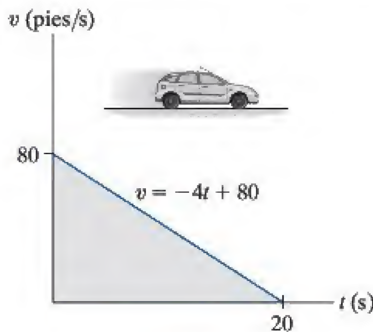
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F12-9. La partícula viaja a lo largo de una pista recta de modo que la gráfica de s-t describe su posición. Trace la gráfica de v-t para el mismo intervalo.



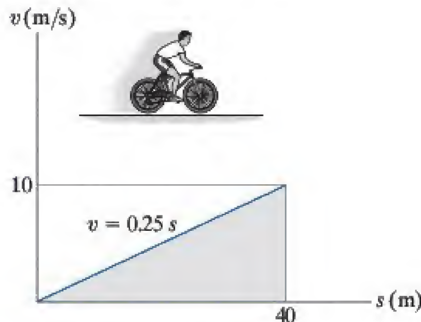
F12-9

F12-10. Una vagoneta viaja a lo largo de una carretera recta a una velocidad descrita por la gráfica. Trace las gráficas de s-t y a-t durante el mismo periodo. Considere $s = 0$ cuando $t = 0$.



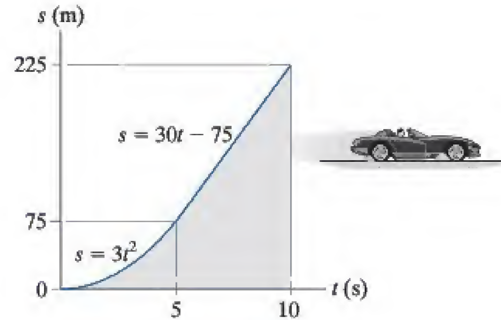
F12-10

F12-11. Una bicicleta rueda por una carretera recta donde la gráfica v-s describe su velocidad. Construya la gráfica a-s durante el mismo intervalo.



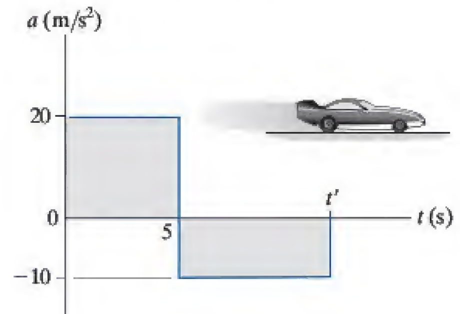
F12-11

F12-12. El auto deportivo viaja a lo largo de una carretera recta, de modo que la gráfica describe su posición. Trace las gráficas de v-t y a-t durante el intervalo $0 \leq t \leq 10$ s.



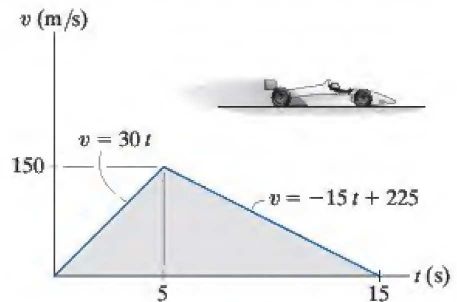
F12-12

F12-13. El "dragster" arranca del reposo con una aceleración descrita por la gráfica. Construya la gráfica de v-t durante el intervalo $0 \leq t \leq t'$, donde t' es el tiempo que le lleva al auto detenerse.



F12-13

F12-14. El "dragster" arranca del reposo y su velocidad es la descrita por la gráfica. Trace la gráfica de s-t durante el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 15$ s. También, determine la distancia total recorrida durante este intervalo.



F12-14

12

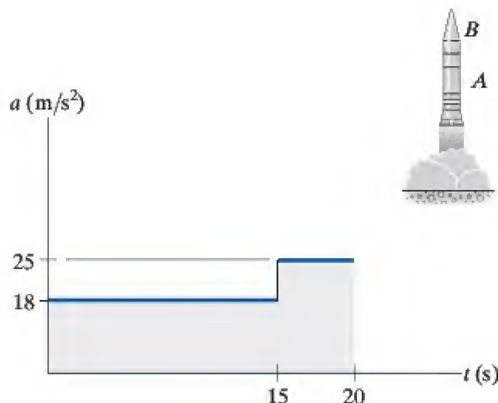
PROBLEMAS

12-42. La rapidez del tren durante el primer minuto se registró como sigue:

t (s)	0	20	40	60
v (m/s)	0	16	21	24

Trace la gráfica de v-t que representa la curva de forma aproximada como segmentos de línea recta entre los puntos dados. Determine la distancia total recorrida.

12-43. Se dispara verticalmente un misil de dos etapas desde el reposo con la aceleración que se indica. En 15 s la primera etapa A se consume y se enciende la segunda etapa B. Trace las gráficas de v-t y s-t las cuales describen el movimiento de las dos etapas del misil durante el intervalo $0 \leq t \leq 20$ s.



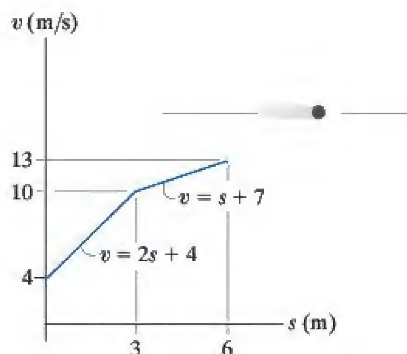
Prob. 12-43

***12-44.** Un tren de carga parte del reposo y viaja con una aceleración constante de 0.5 pies/s^2. Después de un tiempo t' mantiene una rapidez constante de modo que cuando $t = 160$ s ha recorrido 2000 pies. Determine el tiempo t' y trace la gráfica de v-t del movimiento.

•12-45. Si $s = [2\ \text{sen}(\pi/5)t + 4]$ m, donde t está en segundos, define la posición de una partícula, trace las gráficas de s-t, v-t y a-t durante el intervalo $0 \leq t \leq 10$ s.

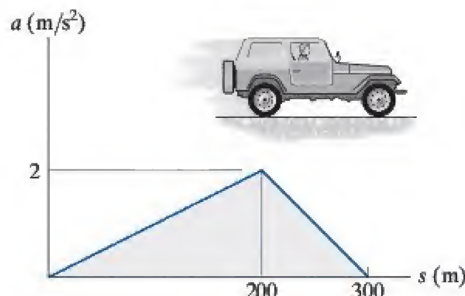
12-46. Un tren sale de la estación A y durante el primer kilómetro viaja con una aceleración uniforme. Luego, durante los dos siguientes kilómetros viaja con una velocidad uniforme. Por último, el tren desacelera de manera uniforme durante otro kilómetro antes de detenerse en la estación B. Si el tiempo de todo el recorrido es de seis minutos, trace la gráfica de v-t y determine la velocidad máxima del tren.

12-47. La partícula viaja a lo largo de una línea recta con la velocidad descrita por la gráfica. Trace la gráfica de a-s.



Prob. 12-47

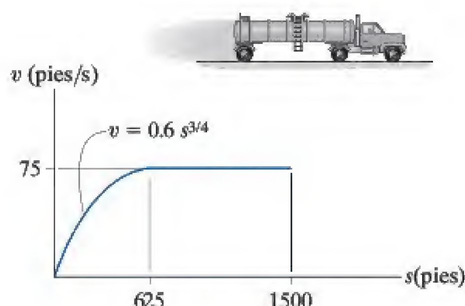
***12-48.** Se proporciona la gráfica de a-s de un "jeep" que viaja a lo largo de una carretera recta de los primeros 300 m de su movimiento. Trace la gráfica de v-s. Cuando $s = 0$, $v = 0$.



Prob. 12-48

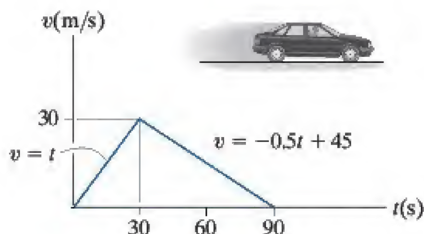
•**12-49.** Una partícula viaja a lo largo de una curva definida por la ecuación $s = (t^3 - 3t^2 + 2t)$ m, donde t está en segundos. Trace las gráficas de $s - t$, $v - t$ y $a - t$ de la partícula durante el intervalo $0 \leq t \leq 3$ s.

12-50. Un camión viaja a lo largo de una línea recta con una velocidad descrita por la gráfica. Trace la gráfica de $a - s$ durante el intervalo $0 \leq s \leq 1500$ pies.



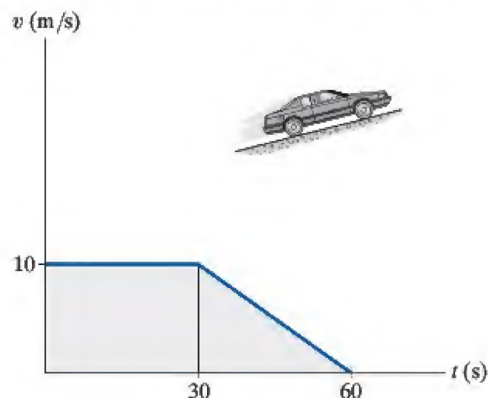
Prob. 12-50

12-51. Un automóvil arranca del reposo y viaja a lo largo de una carretera recta con una velocidad descrita por la gráfica. Determine la distancia total recorrida hasta que el automóvil se detiene. Trace las gráficas de s-t y a-t.



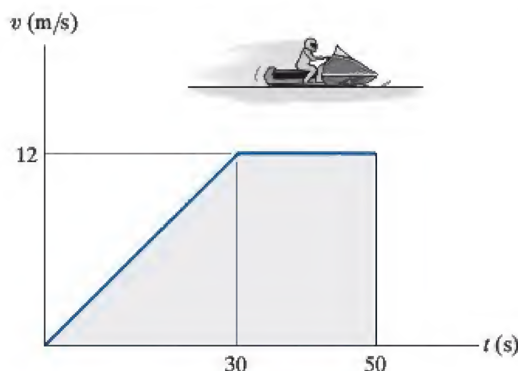
Prob. 12-51

***12-52.** Un automóvil sube una colina a la velocidad que se muestra. Determine la distancia total que recorre hasta que se detiene ($t = 60$ s). Trace la gráfica de a-t.



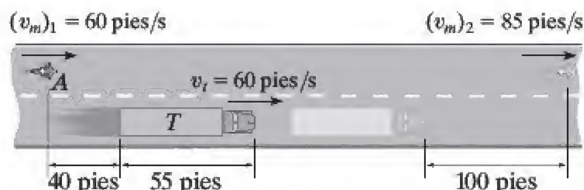
Prob. 12-52

•**12-53.** La moto de nieve se desplaza por un sendero recto de acuerdo con la gráfica de v-t. Trace las gráficas de s-t y a-t durante el mismo intervalo de 50 s. Cuando $t = 0$, $s = 0$.



Prob. 12-53

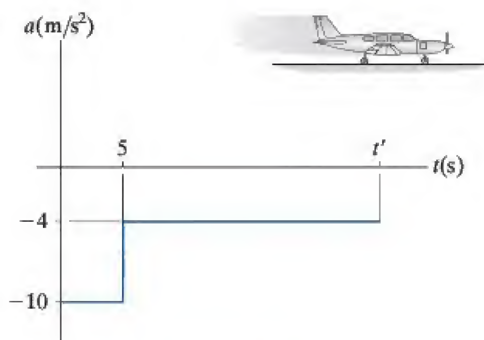
12-54. Un motociclista en A viaja a 60 pies/s cuando desea rebasar el camión T el cual viaja a una velocidad constante de 60 pies/s. Para hacerlo, el motociclista acelera a 6 pies/s^2 hasta que alcanza una velocidad máxima de 85 pies/s. Si luego mantiene esta velocidad, determine el tiempo que le lleva llegar a un punto situado a 100 pies adelante del camión. Trace las gráficas v-t y s-t del motociclista durante este tiempo.



Prob. 12-54

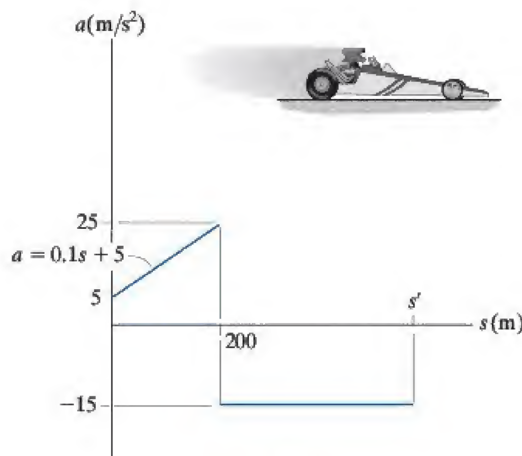
12

12-55. Un avión que vuela a 70 m/s aterriza en una pista de aterrizaje recta y su desaceleración está descrita por la gráfica. Determine el tiempo t' y la distancia que recorre para alcanzar una rapidez de 5 m/s. Trace las gráficas de v-t y s-t durante este intervalo, $0 \leq t \leq t'$.



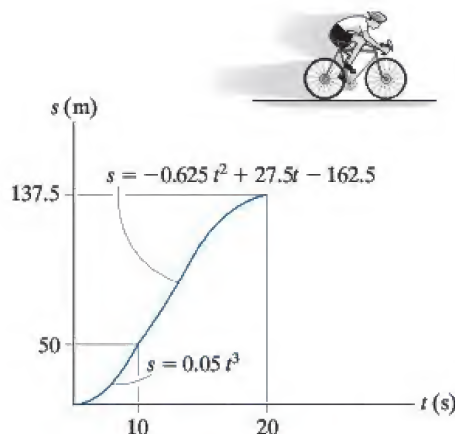
Prob. 12-55

•12-57. El "dragster" arranca del reposo y se desplaza a lo largo de una pista recta con una aceleración-desaceleración descrita por la gráfica. Trace la gráfica de v-s durante el intervalo $0 \leq s \leq s'$ y determine la distancia s' recorrida antes de que el dragster se detenga de nuevo.



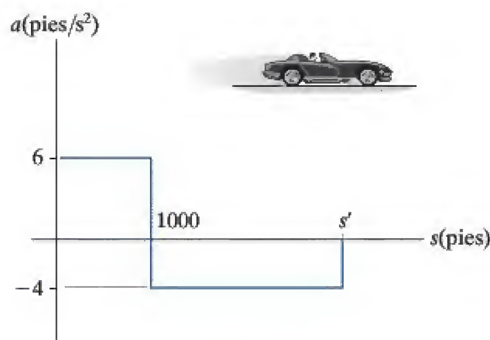
Prob. 12-57

***12-56.** La gráfica describe la posición de un ciclista que viaja a lo largo de una carretera recta. Trace las gráficas de v-t y a-t.



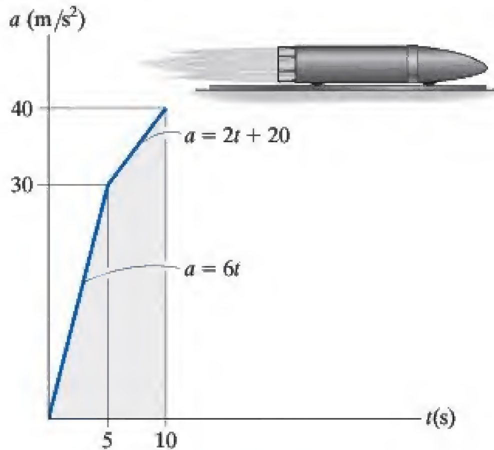
Prob. 12-56

12-58. Un auto deportivo viaja a lo largo de una carretera recta con una aceleración-desaceleración descrita por la gráfica. Si el automóvil arranca del reposo, determine la distancia s' que recorre antes de detenerse. Trace la gráfica de v-s durante el intervalo $0 \leq s \leq s'$.



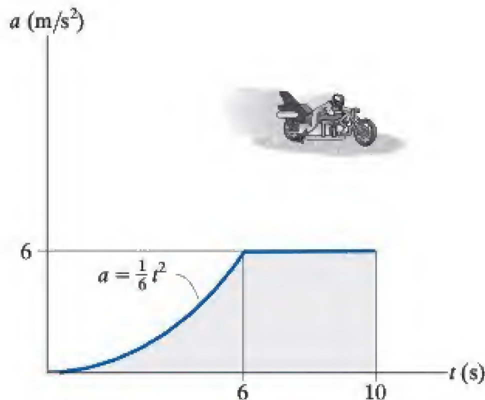
Prob. 12-58

12-59. Un misil disparado del reposo viaja a lo largo de una pista recta durante 10 s con la aceleración mostrada. Trace la gráfica de v-t que describe el movimiento y determine la distancia recorrida en 10 s.



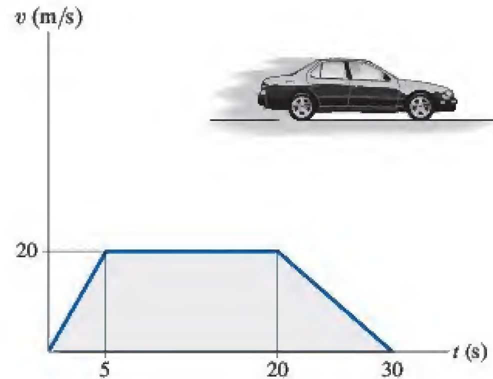
Prob. 12-59

*12-60. Un motociclista que arranca del reposo, viaja a lo largo de una carretera recta y durante 10 s su aceleración es la que se muestra. Trace la gráfica de v-t que describe el movimiento y determine la distancia recorrida en 10 s.



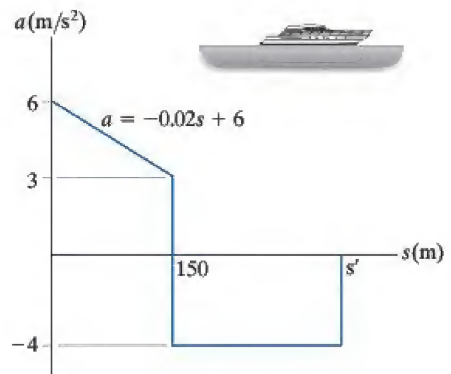
Prob. 12-60

•**12-61.** Se muestra la gráfica de v-t de un automóvil mientras viaja por una carretera. Trace las gráficas de s-t y a-t del movimiento.



Prob. 12-61

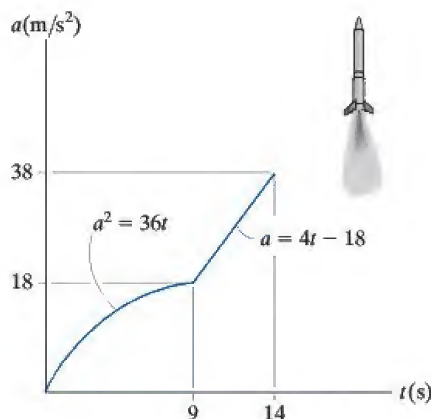
12-62. El bote navega en línea recta con la aceleración descrita por la gráfica de a-s. Si arranca del reposo, trace la gráfica de v-s y determine la velocidad máxima del bote. ¿Qué distancia s' recorre antes de detenerse?



Prob. 12-62

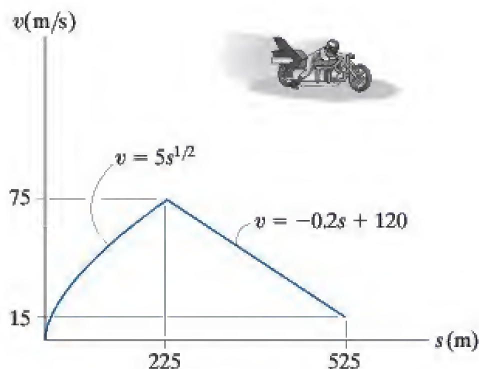
12

12-63. La gráfica describe la aceleración del cohete. Si parte del reposo, trace las gráficas de v-t y s-t del movimiento durante el intervalo $0 \leq t \leq 14$ s.



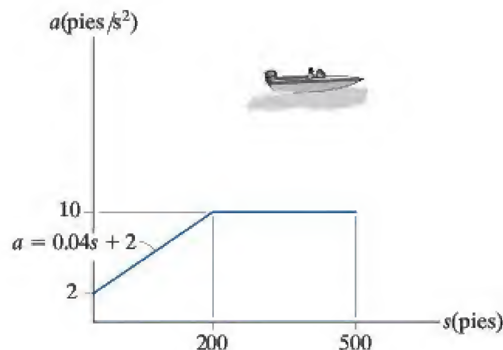
Prob. 12-63

***12-64.** La motocicleta de turbina se desplaza a lo largo de una carretera recta con la velocidad descrita por la gráfica de v-s. Trace la gráfica de a-s.



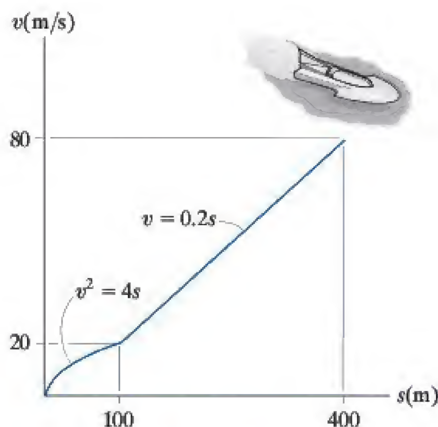
Prob. 12-64

•12-65. La gráfica describe la aceleración del bote que arranca del reposo. Trace la gráfica de v-s.



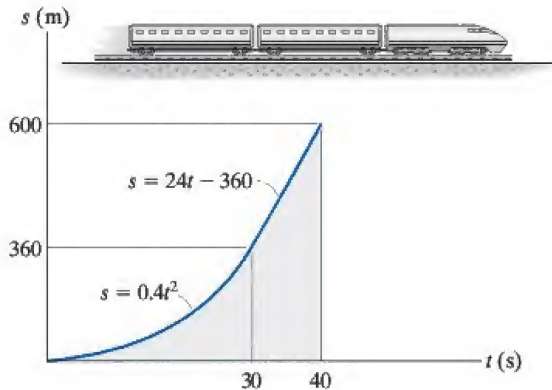
Prob. 12-65

12-66. El bote navega a lo largo de una línea recta a la velocidad descrita por la gráfica. Trace las gráficas s-t y a-s. También, determine el tiempo requerido para que el bote recorra una distancia $s = 400$ m si $s = 0$ cuando $t = 0$.



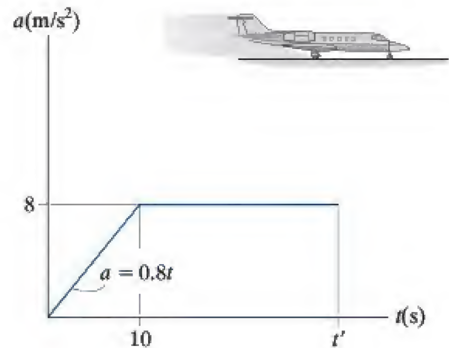
Prob. 12-66

12-67. La gráfica de s-t de un tren se determinó experimentalmente. Con los datos, trace las gráficas de v-t y a-t del movimiento.



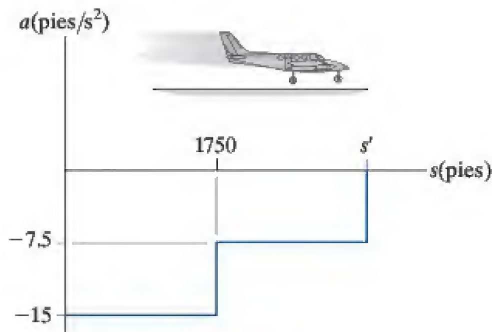
Prob. 12-67

•12-69. El avión despega con la aceleración descrita por la gráfica. Si arranca del reposo y requiere una velocidad de 90 m/s para despegar, determine la longitud mínima de pista requerida y el tiempo t' para despegar. Trace las gráficas de v-t y s-t.



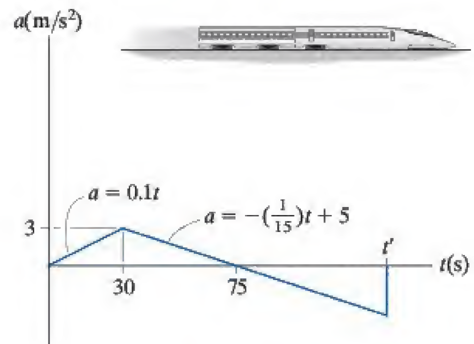
Prob. 12-69

***12-68.** El avión aterriza a 250 pies/s sobre una pista recta y desacelera como se indica en la gráfica. Determine la distancia s' recorrida antes de que su rapidez se reduzca a 25 pies/s. Trace la gráfica de s-t.



Prob. 12-68

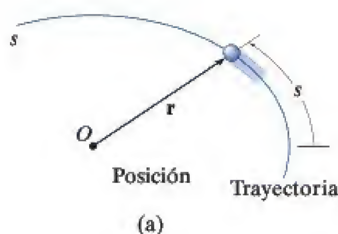
12-70. Se muestra la gráfica de a-t del tren bala. Si el tren arranca del reposo, determine el tiempo transcurrido t' antes de detenerse. ¿Cuál es la distancia total recorrida durante este intervalo? Trace las gráficas de v-t y s-t.



Prob. 12-70

12.4 Movimiento curvilíneo general

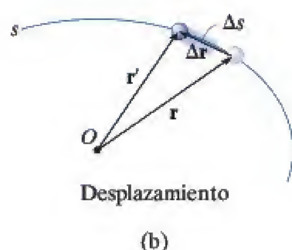
El *movimiento curvilíneo* ocurre cuando una partícula se desplaza a lo largo de una trayectoria curva. Como esta trayectoria a menudo se describe en tres dimensiones, utilizaremos análisis vectorial para formular la posición, velocidad y aceleración de una partícula.* En esta sección se analizan los aspectos generales del movimiento curvilíneo y en secciones subsiguientes consideraremos tres tipos de sistemas de coordenadas que se usan con frecuencia para analizar este movimiento.



(a)

Posición. Considere una partícula situada en un punto de una curva espacial definida por la función de trayectoria $s(t)$, figura 12-16*a*. El *vector de posición* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ designará la posición de la partícula, medida con respecto a un punto fijo *O*. Observe que tanto la magnitud como la dirección de este vector cambiarán a medida que la partícula se mueve a lo largo de la curva.

Desplazamiento. Suponga que durante un breve intervalo Δt la partícula se mueve una distancia Δs a lo largo de la curva a una nueva posición, definida por $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$, figura 12-16*b*. El *desplazamiento* $\Delta\mathbf{r}$ representa el cambio de posición de la partícula y se determina mediante una resta vectorial, es decir $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$.



(b)

Velocidad. Durante el tiempo Δt, la *velocidad promedio* de la partícula es

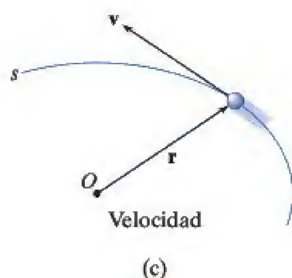
$$\mathbf{v}_{\text{prom}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

La *velocidad instantánea* se determina con esta ecuación cuando $\Delta t \to 0$, y por consiguiente la dirección de $\Delta\mathbf{r}$ *tiende* la *tangente* a la curva. Por consiguiente, $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta\mathbf{r}/\Delta t)$ o

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{12-7}$$

Como $d\mathbf{r}$ será tangente a la curva, la *dirección* de $\mathbf{v}$ también es *tangente a la curva*, figura 12-16*c*. La *magnitud* de $\mathbf{v}$, conocida como la *rapidez*, se obtiene al tener en cuenta que la longitud del segmento de línea recta $\Delta\mathbf{r}$ en la figura 12-16*b* tiende la longitud de arco Δs a medida que $\Delta t \to 0$, tenemos $v = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta r/\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta s/\Delta t)$, o

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{12-8}$$



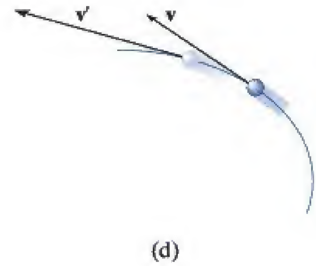
(c)

Fig. 12-16

Por tanto, la *rapidez* se obtiene al diferenciar la función de la trayectoria *s* con respecto al tiempo.

*En el apéndice B se presenta un resumen de algunos de los conceptos importantes de análisis vectorial.

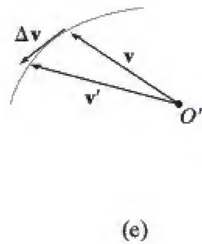
Aceleración. Si la velocidad de la partícula es $\mathbf{v}$ en el instante t y $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ en el instante $t + \Delta t$, figura 12-16*d*, entonces la *aceleración promedio* de la partícula durante el intervalo Δt es



(d)

$$\mathbf{a}_{\text{prom}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$$

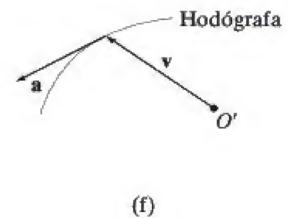
donde $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$. Para estudiar la tasa de cambio en el tiempo, los dos vectores de velocidad en la figura 12-16*d* se trazan en la figura 12-16*e* de modo que sus colas queden en el punto fijo O' y sus cabezas de punta de flecha toquen puntos situados en la curva. Esta curva se llama *hodógrafa* y cuando se construye, describe el lugar geométrico de puntos para la cabeza de punta de flecha del vector de velocidad, del mismo modo en que la *trayectoria s* describe el lugar geométrico de puntos para la cabeza de punta de flecha del vector de posición, figura 12-16*a*.



(e)

Para obtener la *aceleración instantánea*, hacemos que $\Delta t \to 0$ en la ecuación anterior. En el límite $\Delta\mathbf{v}$ tenderá la *tangente a la hodógrafa* y por tanto $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta\mathbf{v}/\Delta t)$, o

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}} \qquad (12\text{-}9)$$



(f)

Si sustituimos la ecuación 12-7 en este resultado, también podemos escribir

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

Por definición de la derivada, $\mathbf{a}$ actúa *tangente a la hodógrafa*, figura 12-16*f*, y, *en general no es tangente a la trayectoria del movimiento*, figura 12-16*g*. Para aclarar este punto, tenga en cuenta que $\Delta\mathbf{v}$ y por consiguiente $\mathbf{a}$, deben responder el cambio *tanto* de magnitud *como* de dirección de la velocidad $\mathbf{v}$ a medida que la partícula se mueve de un punto al siguiente a lo largo de la trayectoria, figura 12-16*d*. Sin embargo, para que la partícula siga cualquier trayectoria curva, el cambio direccional siempre "cambia" el vector de velocidad hacia el "interior" o "lado cóncavo" de la trayectoria, y por consiguiente $\mathbf{a}$ *no puede* permanecer tangente a la trayectoria. En suma, $\mathbf{v}$ siempre es tangente a la *trayectoria* y $\mathbf{a}$ siempre es tangente a la *hodógrafa*.

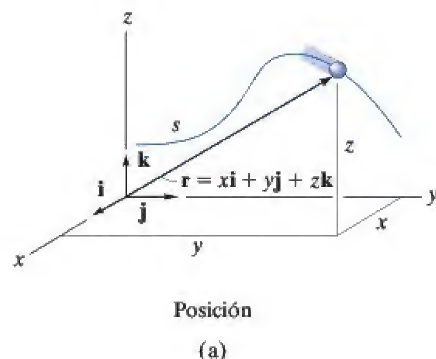


(g)

Fig. 12-16 (cont.)

12.5 Movimiento curvilíneo: componentes rectangulares

De vez en cuando el movimiento de una partícula puede describirse mejor a lo largo de una trayectoria que pueda expresarse en función de sus coordenadas x, y, z.



Posición

(a)

Posición. Si la partícula está en el punto (x, y, z) de la trayectoria curva s mostrada en la figura 12-17*a*, entonces el *vector de posición* define su posición

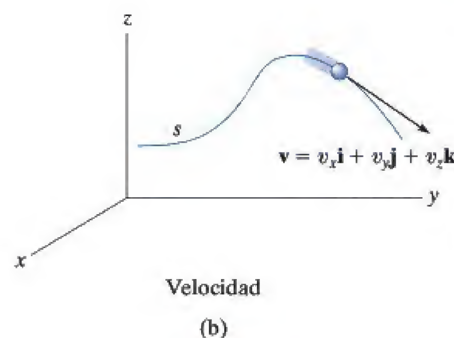
$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{12-10}$$

Cuando la partícula se mueve los componentes x, y, z de $\mathbf{r}$ serán funciones del tiempo, es decir, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, de modo que $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

En cualquier instante la ecuación C-3 del apéndice C define la *magnitud* de $\mathbf{r}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Y la *dirección* de $\mathbf{r}$ se especifica por el vector unitario $\mathbf{u}_r = \mathbf{r}/r$.



Velocidad

(b)

Fig. 12-17

Velocidad. La primera derivada con respecto al tiempo de $\mathbf{r}$ proporciona la velocidad de la partícula. Por consiguiente,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i}) + \frac{d}{dt}(y\mathbf{j}) + \frac{d}{dt}(z\mathbf{k})$$

Cuando se toma esta derivada, es necesario tener en cuenta *tanto* la magnitud como la dirección de cada uno de los componentes vectoriales. Por ejemplo, la derivada del componente $\mathbf{i}$ de $\mathbf{r}$ es

$$\frac{d}{dt}(x\mathbf{i}) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt}$$

El segundo término del lado derecho es cero, siempre que el marco de referencia x, y, z esté *fijo* y por consiguiente la *dirección* (y la *magnitud*) de $\mathbf{i}$ no cambie con el tiempo. La diferenciación de los componentes $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ se realiza de la misma manera, la cual proporciona el resultado final,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \tag{12-11}$$

donde

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z} \tag{12-12}$$

La notación "de punto", $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ representa las primeras derivadas de $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, respectivamente.

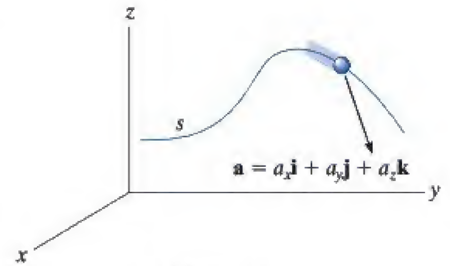
La *magnitud* de la velocidad se determina como

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

y el vector unitario $\mathbf{u}_v = \mathbf{v}/v$ especifica su *dirección*. Como se vio en la sección 12-4, esta dirección *siempre* es *tangente a la trayectoria*, como se muestra en la figura 12-17*b*.

Aceleración. La aceleración de la partícula se obtiene de la primera derivada con respecto al tiempo de la ecuación 12-11 (o la segunda derivada con respecto al tiempo de la ecuación 12-10). Tenemos

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \qquad (12\text{-}13)$$



Aceleración

(c)

donde

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y &= \dot{v}_y = \ddot{y} \\ a_z &= \dot{v}_z = \ddot{z} \end{aligned} \qquad (12\text{-}14)$$

Aquí, a_x, a_y, a_z representan, respectivamente, las primeras derivadas con respecto al tiempo de $v_x = v_x(t)$, $v_y = v_y(t)$, $v_z = v_z(t)$ o las segundas derivadas con respecto al tiempo de las funciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

La aceleración tiene una *magnitud*

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

y una *dirección* especificada por el vector unitario $\mathbf{u}_a = \mathbf{a}/a$. Como $\mathbf{a}$ representa el *cambio* tanto de la magnitud como de la dirección de la velocidad, en general $\mathbf{a}$ *no* será tangente a la trayectoria, figura 12-17*c*.

Puntos importantes

- El movimiento curvilíneo hace que cambie *tanto* la magnitud *como* la dirección de los vectores de posición, velocidad y aceleración.
- El vector de velocidad siempre es *tangente* a la trayectoria.
- En general, el vector de aceleración *no* es tangente a la trayectoria, sino que más bien es tangente a la hodógrafa.
- Si el movimiento se describe mediante coordenadas rectangulares, entonces los componentes a lo largo de cada uno de los ejes no cambian de dirección, sólo su magnitud y sentido (signo algebraico) cambiarán.
- Al considerar los movimientos de los componentes, el cambio de magnitud y dirección de la posición y velocidad de la partícula se toman automáticamente en cuenta.

Procedimiento para el análisis

Sistema de coordenadas.

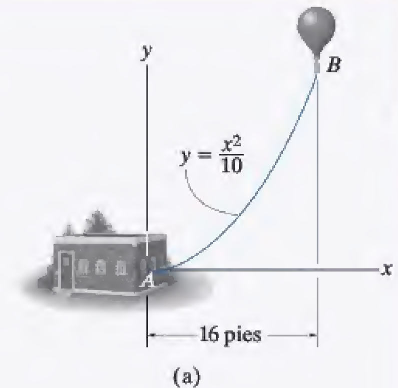
- Un sistema de coordenadas rectangulares puede usarse para resolver problemas para los cuales el movimiento puede expresarse en términos de sus componentes x, y, z.

Cantidades cinemáticas.

- Como el *movimiento rectilíneo* ocurre a lo largo de *cada eje de coordenadas*, el movimiento a lo largo de cada eje se determina mediante $v = ds/dt$ y $a = dv/dt$; o cuando el movimiento no está expresado como una función del tiempo, puede utilizarse la ecuación $a\,ds = v\,dv$.
- La ecuación de la trayectoria $y = f(x)$ puede utilizarse en dos dimensiones, para relacionar los componentes x y y de la velocidad y aceleración si se aplica la regla de la cadena del cálculo. Este concepto se revisa en el apéndice C.
- Una vez que se determinan los componentes x, y, z, las magnitudes de estos vectores se determinan con el teorema de Pitágoras, ecuación B-3 y sus ángulos de dirección coordenados a partir de los componentes de sus vectores unitarios, ecuaciones B-4 y B-5.

EJEMPLO 12.9

En cualquier instante $x = (8t)$ pies, donde t está en segundos, define la posición horizontal del globo atmosférico de la figura 12-18*a*. Si la ecuación de la trayectoria es $y = x^2/10$, determina la magnitud y dirección de la velocidad y la aceleración cuando $t = 2$ s.



(a)

SOLUCIÓN

Velocidad. El componente de velocidad en la dirección x es

$$v_x = \dot{x} = \frac{d}{dt}(8t) = 8 \text{ pies/s} \rightarrow$$

Para determinar la relación entre los componentes de velocidad utilizaremos la regla de la cadena del cálculo (vea el apéndice A para una explicación completa).

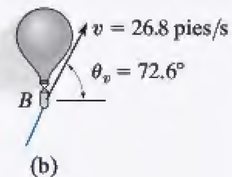
$$v_y = \dot{y} = \frac{d}{dt}(x^2/10) = 2x\dot{x}/10 = 2(16)(8)/10 = 25.6 \text{ pies/s} \uparrow$$

Cuando $t = 2$ s, la magnitud de la velocidad es por consiguiente

$$v = \sqrt{(8 \text{ pies/s})^2 + (25.6 \text{ pies/s})^2} = 26.8 \text{ pies/s} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

La dirección es tangente a la trayectoria, figura 12-18*b*, donde

$$\theta_v = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1}\frac{25.6}{8} = 72.6° \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$



(b)

Aceleración. La relación entre los componentes de aceleración se determina con la regla de la cadena (Vea el apéndice C.) Tenemos

$$a_x = \dot{v}_x = \frac{d}{dt}(8) = 0$$

$$a_y = \dot{v}_y = \frac{d}{dt}(2x\dot{x}/10) = 2(\dot{x})\dot{x}/10 + 2x(\ddot{x})/10$$

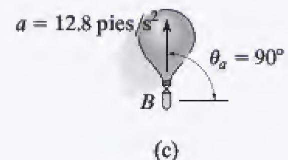
$$= 2(8)^2/10 + 2(16)(0)/10 = 12.8 \text{ pies/s}^2 \uparrow$$

Por tanto,

$$a = \sqrt{(0)^2 + (12.8)^2} = 12.8 \text{ pies/s}^2 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

La dirección de **a**, como se muestra en la figura 12-18*c* es

$$\theta_a = \tan^{-1}\frac{12.8}{0} = 90° \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$



(c)

Fig. 12-18

NOTA: también es posible obtener v_y y a_y si se expresan primero $y = f(t) = (8t)^2/10 = 6.4t^2$ y luego se toman derivadas con respecto al tiempo sucesivas.

12

EJEMPLO 12.10



Durante un breve lapso, $y = (0.001x^2)$ m describe la trayectoria del avión que se muestra en la figura 12-19*a*. Si el avión se eleva con una velocidad constante de 10 m/s, determine las magnitudes de la velocidad y aceleración del avión cuando esté a $y = 100$ m.

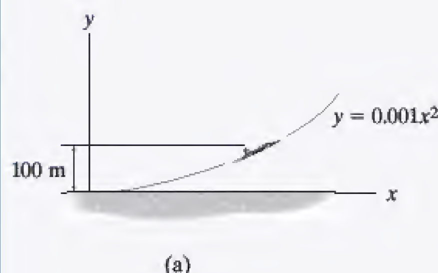
SOLUCIÓN

Cuando $y = 100$ m, entonces $100 = 0.001x^2$ o $x = 316.2$ m. También, como $v_y = 10$ m/s, por tanto

$$y = v_y t; \qquad 100 \text{ m} = (10 \text{ m/s})\, t \qquad t = 10 \text{ s}$$

Velocidad. Si utilizamos la regla de la cadena (vea el apéndice C) para determinar la relación entre los componentes de la velocidad, tenemos

$$v_y = \dot{y} = \frac{d}{dt}(0.001x^2) = (0.002x)\dot{x} = 0.002xv_x \qquad (1)$$



(a)

Por tanto

$$10 \text{ m/s} = 0.002(316.2 \text{ m})(v_x)$$
$$v_x = 15.81 \text{ m/s}$$

La magnitud de la velocidad es, por consiguiente

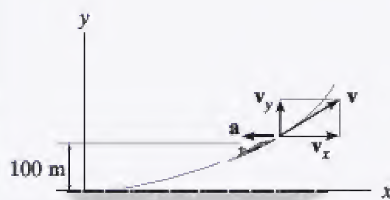
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(15.81 \text{ m/s})^2 + (10 \text{ m/s})^2} = 18.7 \text{ m/s} \quad \textit{Resp.}$$

Aceleración. Con la regla de la cadena, la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (1) proporciona la relación entre los componentes de la aceleración.

$$a_y = \dot{v}_y = 0.002\dot{x}v_x + 0.002x\dot{v}_x = 0.002(v_x^2 + xa_x)$$

Cuando $x = 316.2$ m, $v_x = 15.81$ m/s, $\dot{v}_y = a_y = 0$,

$$0 = 0.002((15.81 \text{ m/s})^2 + 316.2 \text{ m}(a_x))$$
$$a_x = -0.791 \text{ m/s}^2$$



(b)

Fig. 12-19

La magnitud de la aceleración del avión es, por consiguiente

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0.791 \text{ m/s}^2)^2 + (0 \text{ m/s}^2)^2}$$
$$= 0.791 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Estos resultados se muestran en la figura 12-19*b*.

12.6 Movimiento de un proyectil

El movimiento de vuelo libre de un proyectil a menudo se estudia en función de sus componentes rectangulares. Para ilustrar el análisis cinemático, considere un proyectil lanzado en el punto (x_0, y_0), con una velocidad inicial de $\mathbf{v}_0$, cuyas componentes son $(\mathbf{v}_0)_x$ y $(\mathbf{v}_0)_y$, figura 12-20. Cuando se hace caso omiso de la resistencia del aire, la única fuerza que actúa en el proyectil es su peso, el cual hace que el proyectil tenga una *aceleración dirigida hacia abajo constante* de aproximadamente $a_c = g = 9.81 \text{ m/s}^2$ o $g = 32.2 \text{ pies/s}^2$.*

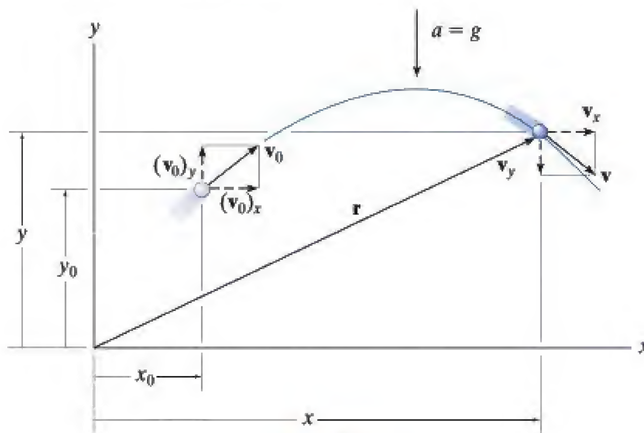
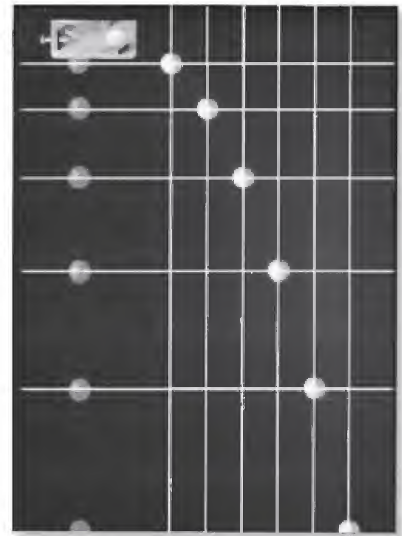


Fig. 12-20



Cada imagen en esta foto se tomó después del mismo intervalo. La bola oscura cae del reposo, en tanto que la bola clara recibe una velocidad horizontal cuando se libera. Ambas bolas se aceleran hacia abajo a la misma razón y por lo tanto permanecen a la misma altura en todo momento. Esta aceleración hace que la diferencia de altura entre las dos bolas se incremente entre fotos sucesivas. También, observe que la distancia horizontal entre fotos sucesivas de la bola clara es constante puesto que la velocidad en la dirección horizontal permanece constante.

Movimiento horizontal.

Como $a_x = 0$, la aplicación de las ecuaciones de aceleración constante, 12-4 a 12-6, resulta

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad v = v_0 + a_c t; \qquad v_x = (v_0)_x$$

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a_c t^2; \qquad x = x_0 + (v_0)_x t$$

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad v^2 = v_0^2 + 2a_c(x - x_0); \qquad v_x = (v_0)_x$$

La primera y la última de las ecuaciones indican que *el componente horizontal de la velocidad siempre permanece constante durante el movimiento*.

Movimiento vertical.

Como el eje y positivo está dirigido hacia arriba, entonces $a_y = -g$. Al aplicar las ecuaciones 12-4 a 12-6, obtenemos

$$(+\uparrow) \qquad v = v_0 + a_c t; \qquad v_y = (v_0)_y - gt$$

$$(+\uparrow) \qquad y = y_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a_c t^2; \qquad y = y_0 + (v_0)_y t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$(+\uparrow) \qquad v^2 = v_0^2 + 2a_c(y - y_0); \qquad v_y^2 = (v_0)_y^2 - 2g(y - y_0)$$

Recuerde que la última ecuación puede formularse con base en la eliminación del tiempo t de las dos primeras ecuaciones, y por consiguiente *sólo dos de las tres ecuaciones anteriores son independientes entre sí.*

*Esto supone que el campo gravitatorio terrestre no varía con la altitud.

12

En resumen, los problemas que implican el movimiento de un proyectil pueden tener cuando mucho tres incógnitas, puesto que sólo pueden escribirse tres ecuaciones independientes, es decir, *una* ecuación en la *dirección horizontal* y *dos* en la *dirección vertical*. Una vez obtenidas $\mathbf{v}_x$ y $\mathbf{v}_y$, la velocidad resultante $\mathbf{v}$, la cual *siempre* es *tangente* a la trayectoria, se determina por medio de la *suma vectorial* como se muestra en la figura 12-20.

Procedimiento para el análisis

Sistema de coordenadas.

- Establezca el eje de coordenadas x, y, fijo y trace la trayectoria de la partícula. Entre *dos puntos* cualesquiera de la trayectoria, especifique los datos dados del problema e identifique las *tres incógnitas*. En todos los casos la aceleración de la gravedad actúa hacia abajo y es igual a 9.81 m/s^2 o 32.2 pies/s^2. Las velocidades inicial y final de la partícula se representarán en función de sus componentes x y y.
- Recuerde que los componentes positivos y negativos de la posición, velocidad y aceleración siempre actúan de acuerdo con sus direcciones coordenadas asociadas.

Ecuaciones cinemáticas.

- Dependiendo de los datos conocidos y de lo que se va a determinar, se decidirá cuáles tres de las cuatro ecuaciones siguientes se aplicarán entre los dos puntos de la trayectoria para obtener la solución más directa del problema.

Movimiento horizontal.

- La *velocidad* en la dirección horizontal o x es *constante*, es decir, $v_x = (v_0)_x$, y

$$x = x_0 + (v_0)_x t$$

Movimiento vertical.

- En la dirección vertical o y, *sólo dos* de las tres ecuaciones siguientes pueden utilizarse para la solución.

$$v_y = (v_0)_y + a_c t$$

$$y = y_0 + (v_0)_y t + \tfrac{1}{2} a_c t^2$$

$$v_y^2 = (v_0)_y^2 + 2a_c(y - y_0)$$

Por ejemplo, si no se requiere la velocidad final v_y de la partícula, la primera y tercera de estas ecuaciones no serán útiles.



La grava que cae por el extremo de esta banda transportadora sigue una trayectoria que puede pronosticarse con las ecuaciones de aceleración constante. De esta manera puede determinarse la ubicación de la pila acumulada. Se utilizan coordenadas rectangulares para el análisis, puesto que la aceleración ocurre sólo en la dirección vertical.

EJEMPLO 12.11

Un saco se desliza por la rampa, como se ve en la figura 12-21, con una velocidad horizontal de 12 m/s. Si la altura de la rampa es de 6 m, determine el tiempo necesario para que el saco choque con el suelo y la distancia R donde los sacos comienzan a apilarse.

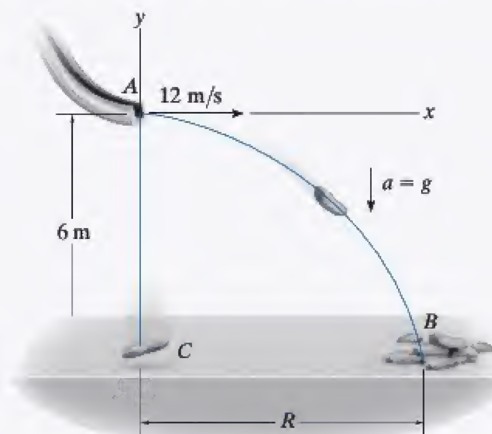


Fig. 12-21

SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. El origen de las coordenadas se establece al principio de la trayectoria, punto A, figura 12-21. La velocidad inicial de un saco tiene los componentes $(v_A)_x = 12$ m/s y $(v_A)_y = 0$. Incluso, entre los puntos A y B la aceleración es de $a_y = -9.81$ m/s^2. En vista de que $(v_B)_x = (v_A)_x = 12$ m/s, las tres incógnitas son $(v_B)_y$, R y el tiempo de vuelo t_{AB}. En este caso no necesitamos determinar $(v_B)_y$.

Movimiento vertical. Se conoce la distancia vertical de A a B y por consiguiente podemos obtener una solución directa para t_{AB} con la ecuación

$$(+\uparrow) \qquad y_B = y_A + (v_A)_y t_{AB} + \tfrac{1}{2} a_c t_{AB}^2$$

$$-6 \text{ m} = 0 + 0 + \tfrac{1}{2}(-9.81 \text{ m/s}^2) t_{AB}^2$$

$$t_{AB} = 1.11 \text{ s}$$ ***Resp.***

Movimiento horizontal. Con t_{AB} calculado, R se determina como sigue:

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad x_B = x_A + (v_A)_x t_{AB}$$

$$R = 0 + 12 \text{ m/s } (1.11 \text{ s})$$

$$R = 13.3 \text{ m}$$ ***Resp.***

NOTA: el cálculo de t_{AB} también indica que si se soltara un saco *desde el reposo* en A, le llevaría el mismo tiempo chocar con el suelo en C, figura 12-21.

12

EJEMPLO 12.12

La máquina desmenuzadora está diseñada para que lance virutas de madera a $v_0 = 25$ pies/s como se muestra en la figura 12-22. Si el tubo está orientado a 30° con respecto a la horizontal, determine a qué h, las virutas chocan con la pila si en este instante caen en la pila a 20 pies del tubo.

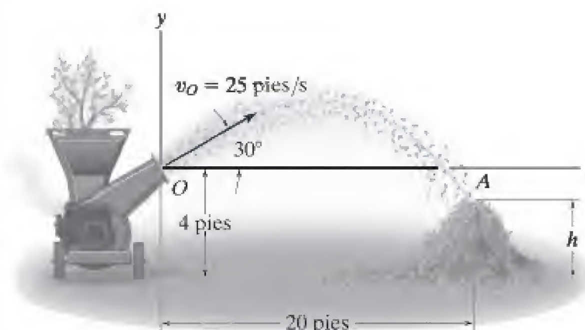


Fig. 12-22

SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. Cuando se analiza el movimiento entre los puntos O y A, las tres incógnitas son la altura h, el tiempo de vuelo t_{OA} y el componente vertical de la velocidad $(v_A)_y$ [observe que $(v_A)_x = (v_O)_x$]. Con el origen de las coordenadas en O, figura 12-22, la velocidad inicial de una viruta tiene los componentes de

$$(v_O)_x = (25 \cos 30°) \text{ pies/s} = 21.65 \text{ pies/s} \rightarrow$$
$$(v_O)_y = (25 \text{ sen } 30°) \text{ pies/s} = 12.5 \text{ pies/s} \uparrow$$

Además, $(v_A)_x = (v_O)_x = 21.65$ pies/s y $a_y = -32.2$ pies/s^2. Como no necesitamos determinar $(v_A)_y$, tenemos

Movimiento horizontal.

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad x_A = x_O + (v_O)_x t_{OA}$$
$$20 \text{ pies} = 0 + (21.65 \text{ pies/s}) t_{OA}$$
$$t_{OA} = 0.9238 \text{ s}$$

Movimiento vertical. Si relacionamos t_{OA} con las elevaciones inicial y final de una viruta, tenemos

$$(+\uparrow) \qquad y_A = y_O + (v_O)_y t_{OA} + \tfrac{1}{2} a_c t_{OA}^2$$
$$(h - 4 \text{ pies}) = 0 + (12.5 \text{ pies/s})(0.9238 \text{ s}) + \tfrac{1}{2}(-32.2 \text{ pies/s}^2)(0.9238 \text{ s})^2$$
$$h = 1.81 \text{ pies}$$ ***Resp.***

NOTA: podemos determinar $(v_A)_y$ por medio de $(v_A)_y = (v_O)_y + a_c t_{OA}$.

EJEMPLO 12.13

La pista para este evento de carreras se diseñó para que los corredores salten la pendiente a 30°, desde una altura de 1 m. Durante una carrera se observó que el corredor de la figura 12-23*a* permanecía en el aire durante 1.5 s. Determine la rapidez a la cual estaba saliendo de la rampa, la distancia horizontal que recorre antes de chocar con el suelo y la altura máxima que alcanza. No tome en cuenta el tamaño de la motocicleta ni al corredor.



(a)

SOLUCIÓN

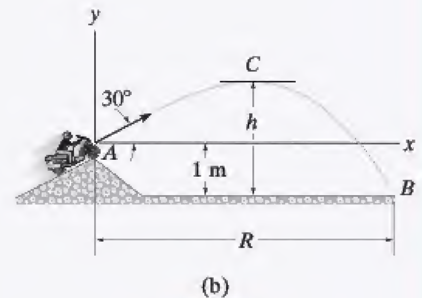
Sistema de coordenadas. Como se muestra en la figura 12-23*b*, el origen de las coordenadas se establece en *A*. Entre los puntos extremos de la trayectoria *AB* las tres incógnitas son la velocidad inicial v_A, la distancia *R* y el componente vertical de la velocidad $(v_B)_y$.

Movimiento vertical. Como el tiempo de vuelo y la distancia vertical entre los extremos de la trayectoria se conocen, podemos determinar v_A.

$$(+\uparrow) \qquad y_B = y_A + (v_A)_y t_{AB} + \tfrac{1}{2} a_c t_{AB}^2$$

$$-1\text{ m} = 0 + v_A \text{sen} 30°(1.5\text{ s}) + \tfrac{1}{2}(-9.81\text{ m/s}^2)(1.5\text{ s})^2$$

$$v_A = 13.38\text{ m/s} = 13.4\text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

Fig. 12-23

Movimiento horizontal. Ahora podemos determinar la distancia *R*,

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad x_B = x_A + (v_A)_x t_{AB}$$

$$R = 0 + 13.38 \cos 30°\text{ m/s}(1.5\text{ s})$$

$$= 17.4\text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

Para determinar la altura máxima *h* consideraremos la trayectoria *AC*, figura 12-23*b*. En este caso las tres incógnitas son el tiempo de vuelo t_{AC}, la distancia horizontal de *A* a *C* y la altura *h*. A la altura máxima $(v_C)_y = 0$ y como v_A se conoce, podemos determinar *h* *directamente* sin considerar t_{AC} mediante la siguiente ecuación.

$$(v_C)_y^2 = (v_A)_y^2 + 2a_c[y_C - y_A]$$

$$0^2 = (13.38 \text{ sen } 30°\text{ m/s})^2 + 2(-9.81\text{ m/s}^2)[(h - 1\text{ m}) - 0]$$

$$h = 3.28\text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: demuestre que la motocicleta golpea el suelo en *B* con una velocidad cuyos componentes son

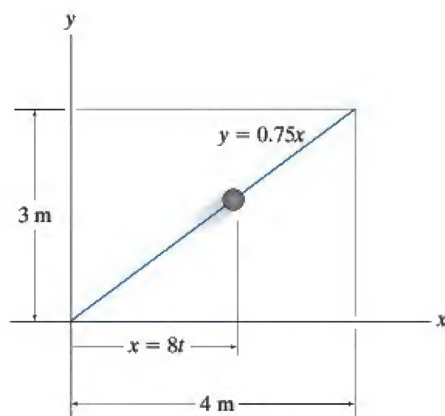
$$(v_B)_x = 11.6\text{ m/s}\rightarrow, \quad (v_B)_y = 8.02\text{ m/s}\downarrow$$

12

PROBLEMAS FUNDAMENTALES

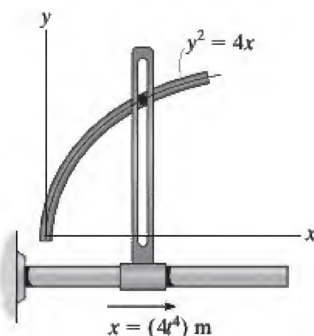
F12-15. Si los componentes x y y de la velocidad de una partícula son $v_x = (32t)$ m/s y $v_y = 8$ m/s, determine la ecuación de la trayectoria $y = f(x)$. $x = 0$ y $y = 0$ cuando $t = 0$.

F12-16. Una partícula se desplaza a lo largo de la trayectoria recta. Si su posición a lo largo del eje x es $x = (8t)$ m, donde t está en segundos, determine la rapidez cuando $t = 2$ s.



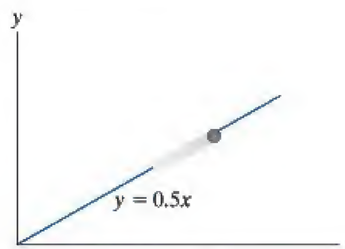
F12-16

F12-17. Se hace que una partícula viaje a lo largo de la trayectoria. Si $x = (4t^4)$ m, donde t está en segundos, determine la magnitud de la velocidad y aceleración de la partícula cuando $t = 0.5$ s.



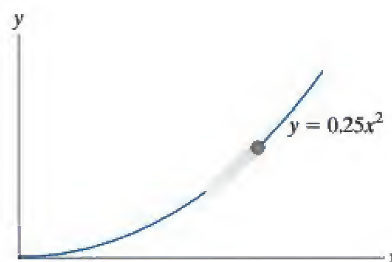
F12-17

F12-18. Una partícula viaja a lo largo de una trayectoria de línea recta $y = 0.5x$. Si el componente x de la velocidad de la partícula es $v_x = (2t^2)$ m/s, donde t está en segundos, determine la magnitud de la velocidad y aceleración de la partícula cuando $t = 4$ s.



F12-18

F12-19. Una partícula viaja a lo largo de una trayectoria parabólica $y = 0.25x^2$. Si $x = (2t^2)$ m, donde t está en segundos, determine la magnitud de la velocidad y aceleración de la partícula cuando $t = 2$ s.



F12-19

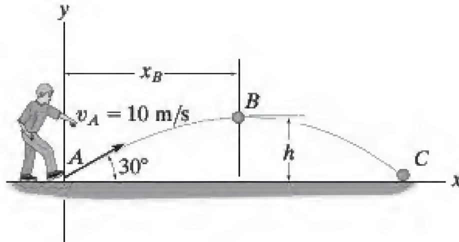
F12-20. La posición de una caja que se desliza hacia abajo por una trayectoria helicoidal la describe $\mathbf{r} = [2 \text{ sen } (2t)\mathbf{i} + 2 \cos t\mathbf{j} - 2t^2\mathbf{k}]$ pies, donde t está en segundos y los argumentos del seno y coseno están en radianes. Determine la velocidad y aceleración de la caja cuando $t = 2$ s.



F12-20

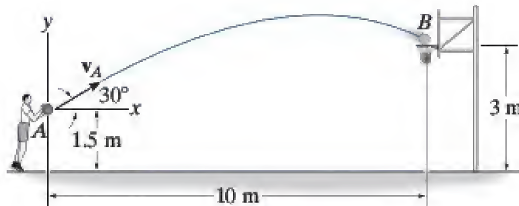
F12-21. La pelota es pateada desde el punto A con la velocidad inicial $v_A = 10$ m/s. Determine la altura máxima h que alcanza.

F12-22. La pelota es pateada desde el punto A con la velocidad inicial $v_A = 10$ m/s. Determine la distancia R y la rapidez con que la pelota golpea el suelo.



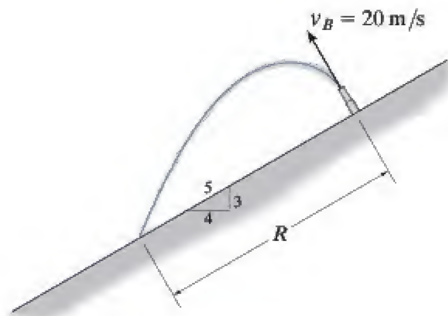
F12-21/22

F12-23. Determine la rapidez a que se debe lanzar el balón de basquetbol en A al ángulo de 30° de modo que llegue a la canasta en B.



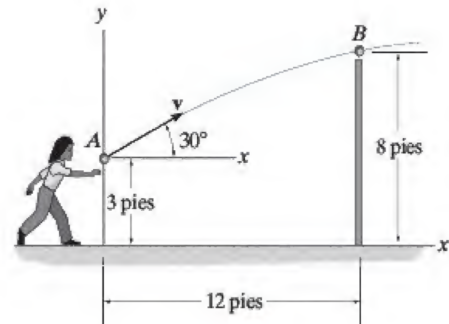
F12-23

F12-24. Se rocía agua a un ángulo de 90° desde la pendiente a 20 m/s. Determine la distancia R.



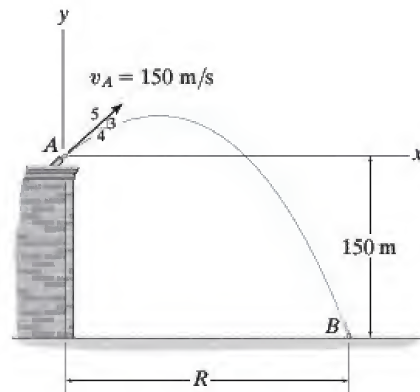
F12-24

F12-25. Se lanza una pelota desde A. Si se requiere salvar el muro en B, determine la magnitud mínima de su velocidad inicial $\mathbf{v}_A$.



F12-25

F12-26. Se dispara un proyectil con una velocidad inicial de $v_A = 150$ m/s desde la azotea de un edificio. Determine la distancia R donde golpea el suelo en B.



F12-26

12

PROBLEMAS

12-71. La posición de una partícula es $\mathbf{r} = \{(3t^3 - 2t)\mathbf{i} - (4t^{1/2} + t)\mathbf{j} + (3t^2 - 2)\mathbf{k}\}$ m, donde t está en segundos, determine la magnitud de la velocidad y aceleración de la partícula cuando $t = 2$ s.

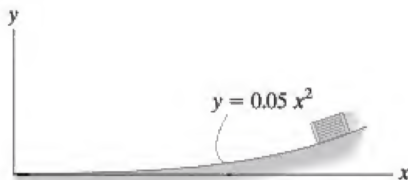
***12-72.** La velocidad de una partícula es $\mathbf{v} = \{3\mathbf{i} + (6 - 2t)\mathbf{j}\}$ m/s, donde t está en segundos. Si $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ cuando $t = 0$, determine el desplazamiento de la partícula durante el intervalo de tiempo $t = 1$ s a $t = 3$ s.

•12-73. Una partícula viaja a lo largo de una trayectoria parabólica $y = bx^2$. Si su componente de velocidad a lo largo del eje y es $v_y = ct^2$, determine los componentes x y y de la aceleración de la partícula. En este caso b y c son constantes.

12-74. La ecuación $\mathbf{v} = \{16t^2\mathbf{i} + 4t^3\mathbf{j} + (5t + 2)\mathbf{k}\}$ m/s da la velocidad de una partícula, donde t está en segundos. Si la partícula está en el origen cuando $t = 0$, determine la magnitud de la aceleración de la partícula cuando $t = 2$ s. También, ¿cuál es la posición x, y, z de la partícula en este instante?

12-75. Una partícula viaja a lo largo de una trayectoria circular $x^2 + y^2 = r^2$. Si el componente y de la velocidad de la partícula es $v_y = 2r\cos 2t$, determine los componentes x y y de su aceleración en cualquier instante.

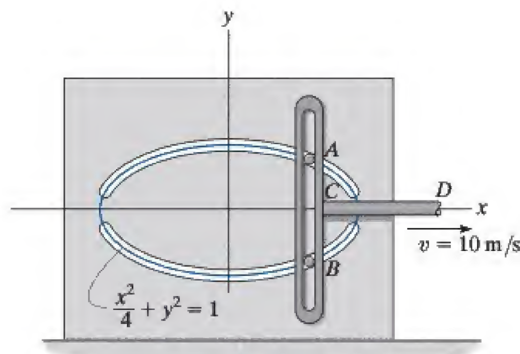
***12-76.** La caja se desliza por la pendiente descrita por la ecuación $y = (0.05x^2)$ m, donde x está en metros. Si los componentes x de la velocidad y aceleración de la caja son $v_x = -3$ m/s y $a_x = -1.5$ m/s^2, respectivamente, cuando $x = 5$ m, determine los componentes y de la velocidad y aceleración de la caja en este instante.



Prob. 12-76

•12-77. La posición de una partícula es $\mathbf{r} = \{5\cos 2t\,\mathbf{i} + 4\,\text{sen}\,2t\,\mathbf{j}\}$ m, donde t está en segundos y los argumentos del seno y coseno están en radianes. Determine las magnitudes de la velocidad y aceleración de la partícula cuando $t = 1$ s. También, demuestre que la trayectoria de la partícula es elíptica.

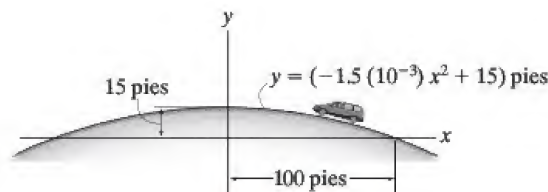
12-78. Las espigas A y B están restringidas a moverse en las ranuras elípticas por el movimiento del eslabón ranurado. Si éste se mueve a una rapidez constante de 10 m/s, determine la magnitud de la velocidad y aceleración de la espiga A cuando $x = 1$ m.



Prob. 12-78

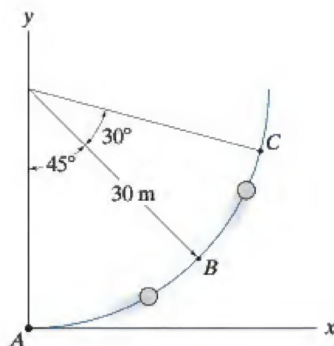
12-79. Una partícula viaja a lo largo de la trayectoria $y^2 = 4x$ a una rapidez constante de $v = 4$ m/s. Determine los componentes x y y de su velocidad y aceleración cuando $x = 4$ m.

***12-80.** La vagoneta viaja por la colina descrita por $y = (-1.5(10^{-3})\,x^2 + 15)$ pies. Si tiene una rapidez constante de 75 pies/s, determine los componentes x y y de su velocidad y aceleración cuando $x = 50$ pies.



Prob. 12-80

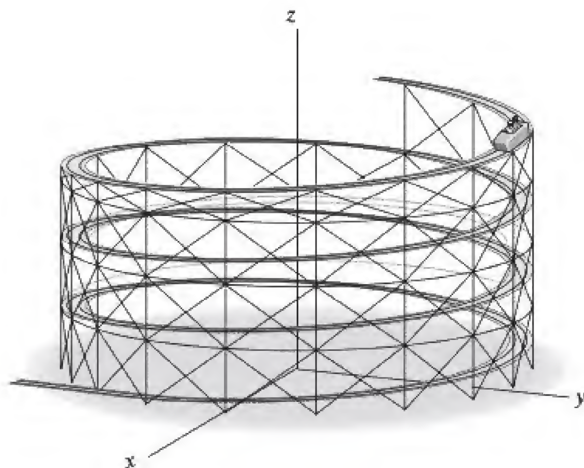
•**12-81.** Una partícula viaja a lo largo de una trayectoria circular de A a B en 1 s. Si requiere 3 s para ir de A a C, determine su *velocidad promedio* cuando va de B a C.



Prob. 12-81

12-82. Un automóvil viaja al este 2 km durante 5 minutos, luego al norte 3 km durante 8 minutos y luego al oeste 4 km durante 10 minutos. Determine la distancia total recorrida y la magnitud del desplazamiento del automóvil. También, ¿cuál es la magnitud de la velocidad promedio y la rapidez promedio?

12-83. El carro de la montaña rusa desciende por la trayectoria helicoidal a velocidad constante de modo que las ecuaciones paramétricas que definen su posición son $x = c \operatorname{sen} kt$, $y = c \cos kt$, $z = h - bt$, donde c, h y b son constantes. Determine las magnitudes de su velocidad y aceleración.

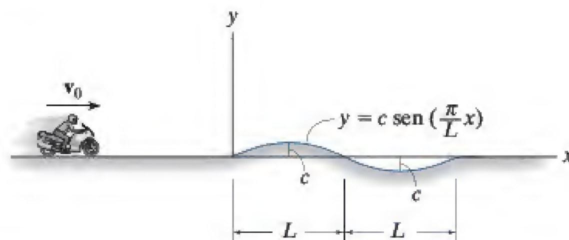


Prob. 12-83

***12-84.** La ecuación $y^2 = 4kx$ define la trayectoria de una partícula y el componente de la velocidad a lo largo del eje y es $v_y = ct$, donde tanto k y c son constantes. Determine los componentes x y y de la aceleración cuando $y = y_0$.

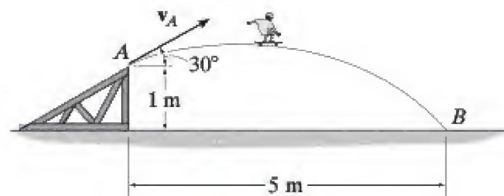
•**12-85.** Una partícula se mueve a lo largo de la curva $y = x - (x^2/400)$, donde x y y están en pies. Si el componente de velocidad en la dirección x es $v_x = 2$ pies/s y permanece *constante*, determine las magnitudes de la velocidad y aceleración cuando $x = 20$ pies.

12-86. La motocicleta viaja a rapidez constante v_0 a lo largo de la trayectoria que, durante una corta distancia, adopta la forma de una curva seno. Determine los componentes x y y de su velocidad en cualquier instante en la curva.



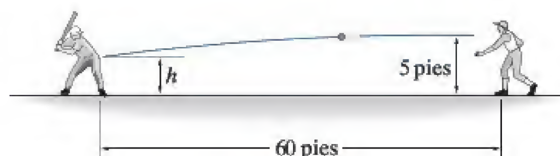
Prob. 12-86

12-87. El patinador deja la rampa en A con una velocidad inicial v_A a un ángulo de 30°. Si golpea el suelo en B, determine v_A y el tiempo de vuelo.



Prob. 12-87

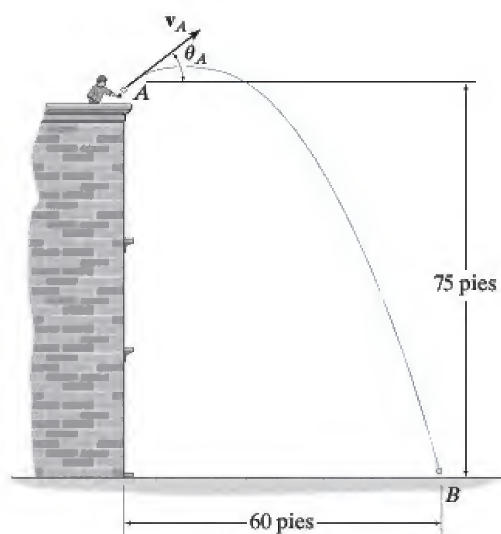
***12-88.** El "pitcher" lanza la bola horizontalmente a una rapidez de 140 pies/s desde una altura de 5 pies. Si el bateador está a 60 pies del lanzador, determine el tiempo para que la bola llegue al bateador y la altura h a la cual pasa por él.



Prob. 12-88

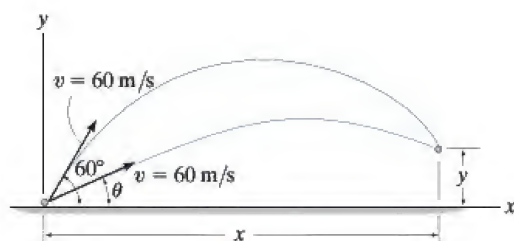
12

•**12-89.** Se lanza la pelota desde la azotea del edificio. Si golpea el suelo en B en 3 s, determine la velocidad inicial v_A y el ángulo de inclinación θ_A al cual fue lanzada. También, determine la magnitud de la velocidad de la bola cuando golpea el suelo.



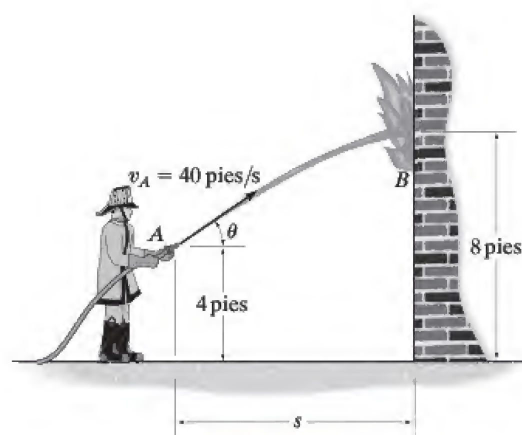
Prob. 12-89

12-90. Se dispara un proyectil a una rapidez $v = 60$ m/s en un ángulo de 60°. Luego se dispara un segundo proyectil con la misma rapidez 0.5 s después. Determine el ángulo θ del segundo proyectil, de modo que los dos proyectiles choquen. ¿En qué posición (x, y) sucederá esto?



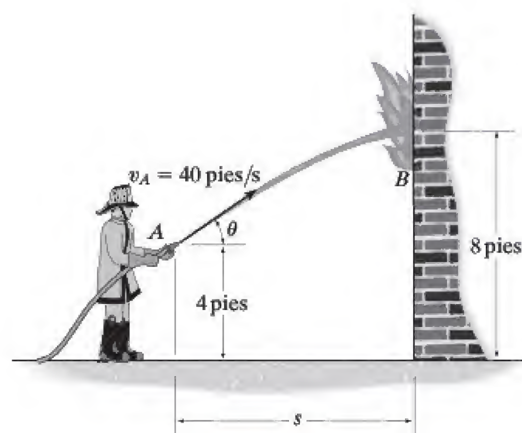
Prob. 12-90

12-91. El bombero sostiene la manguera a un ángulo $\theta = 30°$ con la horizontal y el agua sale de la manguera A a una velocidad de $v_A = 40$ pies/s. Si el chorro de agua golpea el edificio en B, determine sus dos posibles distancias s del edificio.



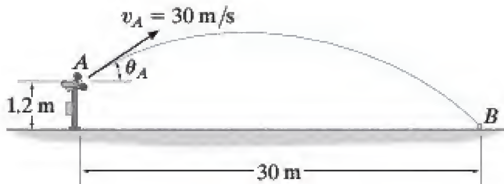
Prob. 12-91

***12-92.** De la manguera el agua sale a 40 pies/s. Determine los dos posibles ángulos θ a que el bombero puede sostener la manguera, de modo que el agua golpee el edificio en B. Considere que $s = 20$ pies.



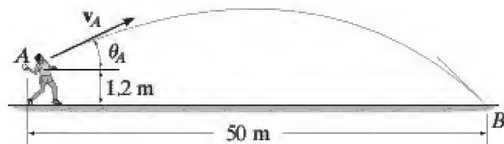
Prob. 12-92

•**12-93.** La máquina de lanzar se ajusta para que la bola salga despedida con una rapidez de $v_A = 30$ m/s. Si la bola golpea el suelo en B, determine los dos posibles ángulos θ_A a que se lanzó.



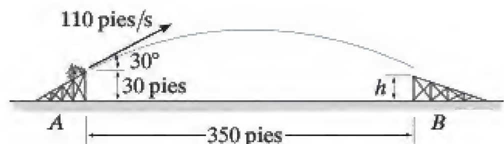
Prob. 12-93

12-94. Se observa que el tiempo para que la bola golpee el suelo en B es de 2.5 s. Determine la rapidez v_A y el ángulo θ_A a que se arrojó.



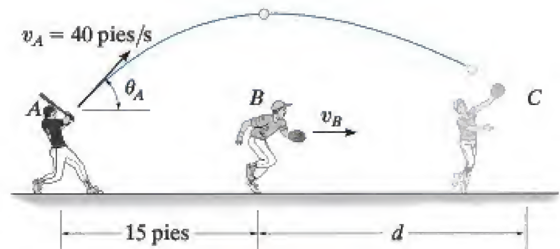
Prob. 12-94

12-95. Si el motociclista deja la rampa a 110 pies/s, determine la altura h que la rampa B debe tener de modo que la motocicleta aterrice a salvo.



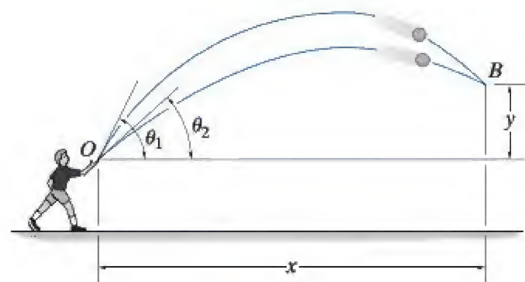
Prob. 12-95

*__12-96.__ El beisbolista A batea la bola con $v_A = 40$ pies/s y $\theta_A = 60°$. Cuando la bola está directamente sobre el jugador B éste comienza a correr debajo de ella. Determine la rapidez constante v_B y la distancia d a la cual B debe correr para hacer la atrapada a la misma altura a que fue bateada.



Prob. 12-96

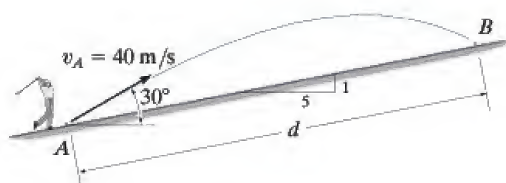
•**12-97.** Un niño lanza al aire una pelota desde O con una rapidez v_0 a un ángulo θ_1. Si luego lanza otra pelota a la misma rapidez v_0 a un ángulo $\theta_2 < \theta_1$, determine el tiempo entre los lanzamientos de modo que las bolas choquen en el aire en B.



Prob. 12-97

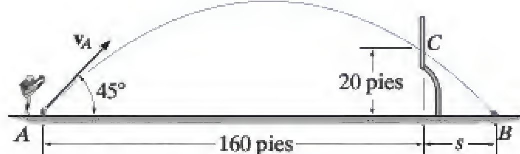
12

12-98. La pelota de golf es golpeada en A con una rapidez $v_A = 40$ m/s y dirigida a un ángulo de 30° con la horizontal como se muestra. Determine la distancia d donde la bola golpea la pendiente en B.



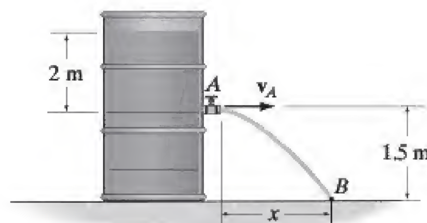
Prob. 12-98

12-99. Si se patea el balón de futbol a un ángulo de 45°, determine su velocidad inicial mínima v_A de modo que pase sobre el poste de meta en C. ¿A qué distancia s del poste de meta golpeará el balón el suelo en B?



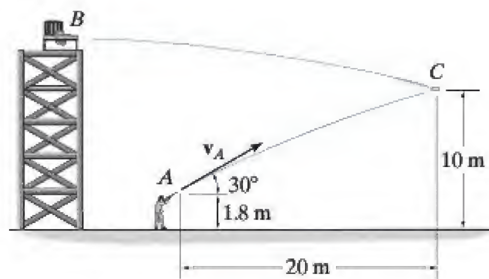
Prob. 12-99

***12-100.** La velocidad del chorro de agua que sale por el orificio se obtiene con $v = \sqrt{2gh}$, donde $h = 2$ m es la altura del orificio con respecto a la superficie libre de agua. Determine el tiempo para que una partícula de agua salga por el orificio y llegue al punto B así como la distancia horizontal x donde golpee la superficie.



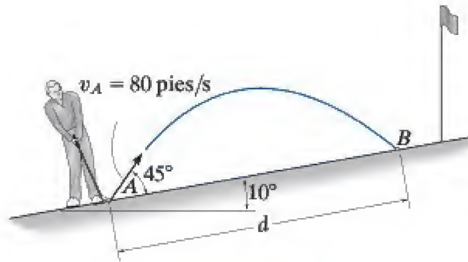
Prob. 12-100

•12-101. Se dispara un proyectil desde la plataforma en B. El tirador dispara su arma desde el punto A a un ángulo de 30°. Determine la rapidez de salida de la bala si impacta el proyectil en C.



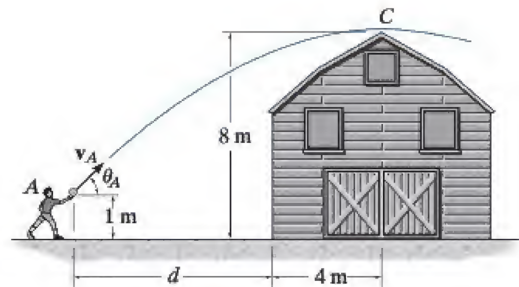
Prob. 12-101

12-102. Una pelota de golf es golpeada con una velocidad de 80 pies/s como se muestra. Determine la distancia d donde aterrizará.



Prob. 12-102

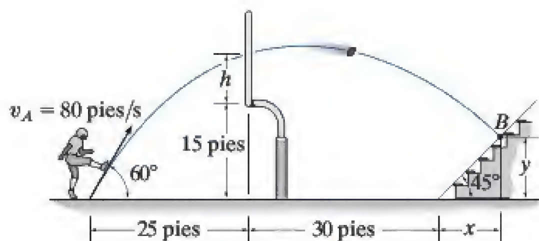
•12-105. El muchacho parado en A intenta lanzar la pelota sobre el techo de un granero con una velocidad inicial de $v_A = 15$ m/s. Determine el ángulo θ_A al cual se debe lanzar la pelota de modo que alcance su altura máxima en C. También, determine la distancia d donde deberá pararse el muchacho para hacer el lanzamiento.



Prob. 12-105

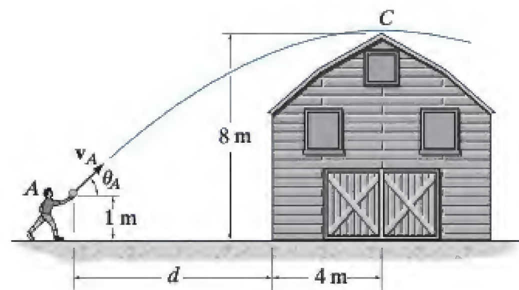
12-103. Se tiene que patear el balón de futbol sobre el poste de meta, el cual tiene 15 pies de altura. Si su rapidez inicial es $v_A = 80$ pies/s, determine si evita golpear el poste, y si lo hace, por cuanto, h.

***12-104.** Se patea el balón sobre el poste de meta con una velocidad inicial de $v_A = 80$ pies/s como se muestra. Determine el punto $B(x, y)$ donde choca con las gradas.



Probs. 12-103/104

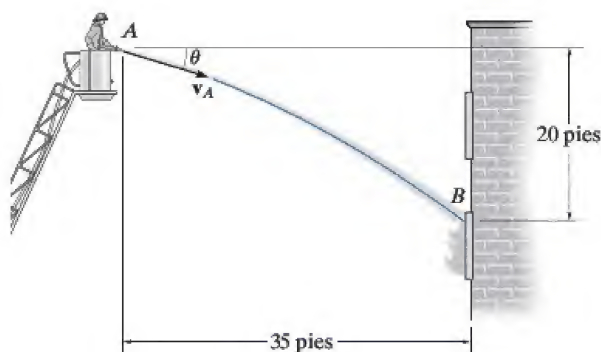
12-106. El muchacho parado en A intenta lanzar una pelota sobre el techo de un granero a un ángulo $\theta_A = 40°$. Determine la velocidad mínima v_A a la cual debe lanzar la pelota para que alcance su altura máxima en C. También, determine la distancia d donde el muchacho debe pararse para hacer el lanzamiento.



Prob. 12-106

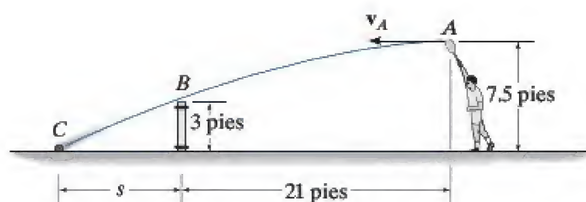
12

12-107. El bombero desea dirigir el flujo de agua de su manguera al fuego en B. Determine dos ángulos posibles θ_1 y θ_2 a los cuales puede hacerse esto. El agua fluye de la manguera a $v_A = 80$ pies/s.



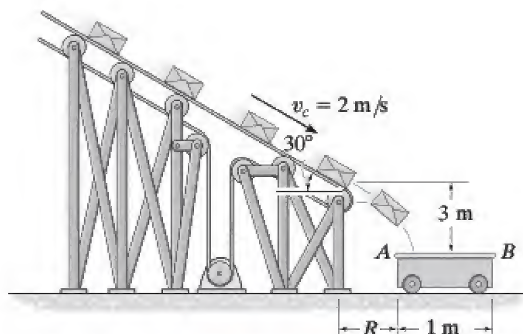
Prob. 12-107

•12-109. Determine la velocidad horizontal v_A de una pelota de tenis en A para que apenas pase la red en B. También, determine la distancia s donde la pelota golpea el suelo.



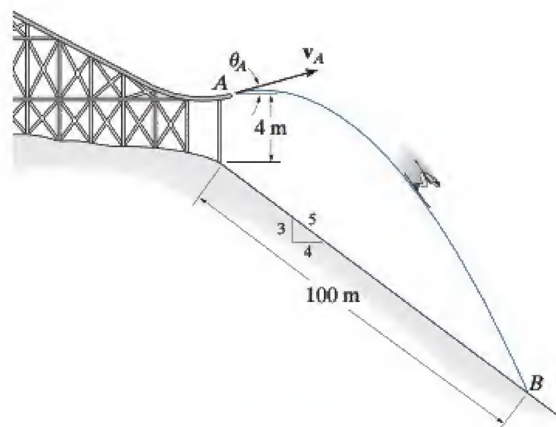
Prob. 12-109

***12-108.** Pequeños paquetes que se desplazan sobre la banda transportadora caen en el carro de carga de 1 m de largo. Si la transportadora se desplaza a una rapidez constante de $v_C = 2$ m/s, determine la distancia más corta y más larga R donde pueda colocarse el extremo A del carro con respecto a la transportadora para que los paquetes entren al carro.



Prob. 12-108

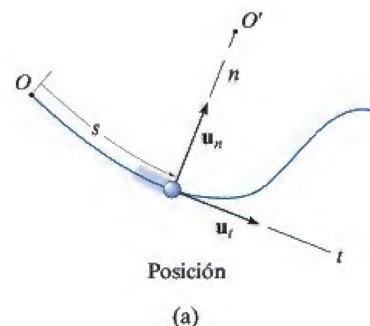
12-110. Se observa que el esquiador deja la rampa en A a un ángulo $\theta_A = 25°$ con la horizontal. Si golpea el suelo en B, determine su rapidez inicial v_A y el tiempo de vuelo t_{AB}.



Prob. 12-110

12.7 Movimiento curvilíneo: componentes normal y tangencial

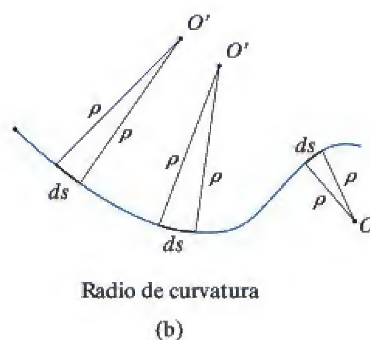
Cuando se *conoce* la trayectoria a lo largo de la cual viaja una partícula, entonces a menudo conviene describir el movimiento por medio de los ejes de coordenadas n y t, los cuales actúan de manera normal y tangente a la trayectoria, respectivamente, y en el instante considerado tienen su *origen localizado en la partícula*.



Posición

(a)

Movimiento plano. Considere la partícula de la figura 12-24*a*, la cual se desplaza en un plano a lo largo de una curva fija, de modo que en un instante dado está en la posición s, medida con respecto al punto O. A continuación consideraremos un sistema de coordenadas con su origen en un *punto fijo* de la curva, y en el instante considerado este origen *coincide* con la ubicación de la partícula. El eje t es *tangente* a la curva en el punto y es positivo en la dirección de *s creciente*. Designaremos esta dirección positiva con el vector unitario $\mathbf{u}_t$. Sólo puede haber una opción única para el *eje normal* ya que geométricamente la curva está formada por una serie de segmentos de arco diferenciales ds, figura 12-24*b*. Cada segmento ds está formado por el arco de un círculo asociado con un *radio de curvatura* ρ (rho) y *centro de curvatura* O'. El eje normal n es perpendicular al eje t con su sentido positivo dirigido *hacia* el centro de curvatura O', figura 12-24*a*. Esta dirección positiva, la cual *siempre* está en el lado cóncavo de la curva, será designada por el vector unitario $\mathbf{u}_n$. El plano que contiene los ejes n y t se conoce como *plano* abrazador u *osculante* y en este caso está fijo en el plano del movimiento.*



Radio de curvatura

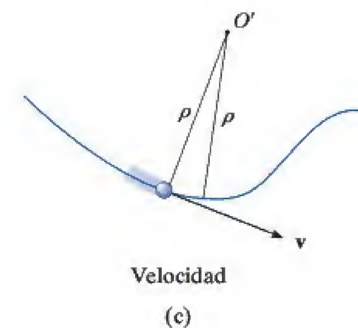
(b)

Velocidad. Como la partícula se mueve, s es una función del tiempo. Como se indica en la sección 12.4, la *dirección* de la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula *siempre es tangente a la trayectoria*, figura 12-24*c* y su *magnitud* se determina por la derivada con respecto al tiempo de la función de la trayectoria $s = s(t)$, es decir, $v = ds/dt$ (ecuación 12-8). Por consiguiente

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_t \tag{12-15}$$

donde

$$v = \dot{s} \tag{12-16}$$



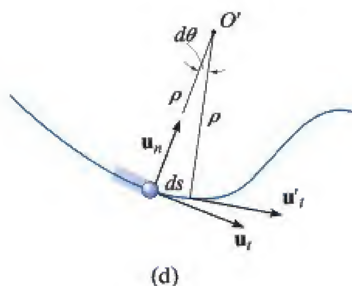
Velocidad

(c)

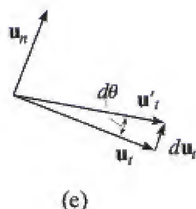
Fig. 12-24

*El plano osculador también se define como el plano que tiene el mayor contacto con la curva en un punto. Es la posición limitante de un plano que está en contacto con el punto y con el segmento de arco ds. Como vimos antes, el plano osculador siempre coincide con una curva plana; sin embargo, cada uno de los puntos de una curva tridimensional tiene un plano osculador único.

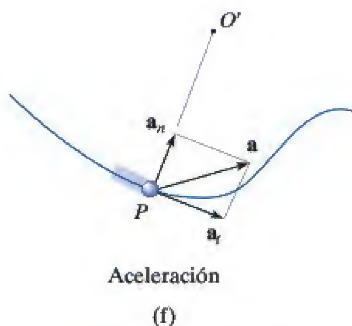
12



(d)



(e)



Aceleración

(f)

Fig. 12-24 (cont.)

Aceleración. La aceleración de la partícula es el cambio de la velocidad con respecto al tiempo. Por tanto,

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\mathbf{u}_t + v\dot{\mathbf{u}}_t \qquad (12\text{-}17)$$

Para determinar la derivada con respecto al tiempo $\dot{\mathbf{u}}_t$, observe que a medida que la partícula se desplaza a lo largo del arco ds en el tiempo dt, $\mathbf{u}_t$ conserva su magnitud de la unidad, sin embargo, su *dirección* cambia y se vuelve $\mathbf{u}_t'$, figura 12-24*d*. Como se muestra en la figura 12-24*e*, requerimos $\mathbf{u}_t' = \mathbf{u}_t + d\mathbf{u}_t$. En este caso $d\mathbf{u}_t$ se extiende entre las puntas de flecha de $\mathbf{u}_t$ y $\mathbf{u}_t'$, las cuales quedan en un arco infinitesimal de radio $u_t = 1$. Por consiguiente, $d\mathbf{u}_t$ tiene una *magnitud* de $du_t = (1)d\theta$ y $\mathbf{u}_n$ define su *dirección*. En consecuencia, $d\mathbf{u}_t = d\theta\mathbf{u}_n$, y por consiguiente, la derivada con respecto al tiempo se vuelve $\dot{\mathbf{u}}_t = \dot{\theta}\mathbf{u}_n$. Como $ds = \rho d\theta$, figura 12-24*d*, entonces $\dot{\theta} = \dot{s}/\rho$, y por tanto

$$\dot{\mathbf{u}}_t = \dot{\theta}\mathbf{u}_n = \frac{\dot{s}}{\rho}\mathbf{u}_n = \frac{v}{\rho}\mathbf{u}_n$$

Al sustituir en la ecuación 12-17, **a** se escribe como la suma de sus dos componentes,

$$\boxed{\mathbf{a} = a_t\mathbf{u}_t + a_n\mathbf{u}_n} \qquad (12\text{-}18)$$

donde

$$\boxed{a_t = \dot{v}} \quad \text{o} \quad \boxed{a_t ds = v\,dv} \qquad (12\text{-}19)$$

y

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{\rho}} \qquad (12\text{-}20)$$

Estos dos componentes mutuamente perpendiculares se muestran en la figura 12-24*f*. Por consiguiente, la *magnitud* de la aceleración es el valor positivo de

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \qquad (12\text{-}21)$$

Para entender mejor estos resultados, considere los dos casos especiales de movimiento.

1. Si la partícula se mueve a lo largo de una línea recta entonces $\rho \rightarrow \infty$ y según la ecuación 12-20, $a_n = 0$. Por tanto $a = a_t = \dot{v}$, y podemos concluir que la *componente tangencial de la aceleración representa el cambio en la magnitud de la velocidad.*
2. Si la partícula se mueve a lo largo de una curva con una velocidad constante, entonces $a_t = \dot{v} = 0$ y $a = a_n = v^2/\rho$. Por consiguiente, la *componente normal de la aceleración representa el cambio en la dirección de la velocidad.* Como $\mathbf{a}_n$ *siempre* actúa hacia el centro de la curvatura, esta componente en ocasiones se conoce como la *aceleración centrípeta* (o que busca el centro).

A consecuencia de estas representaciones, una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria curva en la figura 12-25 tendrá una aceleración como se muestra.

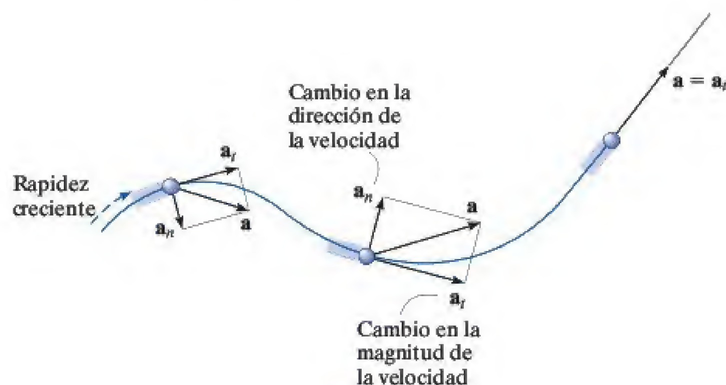


Fig. 12-25

Movimiento tridimensional. Si la partícula se mueve a lo largo de una curva espacial, figura 12-26, entonces en un instante dado, el eje t queda especificado de forma única; sin embargo, puede construirse un número infinito de líneas rectas normales al eje tangente. Como en el caso de movimiento plano, elegiremos el eje n positivo dirigido hacia el centro de curvatura O' de la trayectoria. Este eje se conoce como la *normal principal* a la curva. Con los ejes n y t así definidos, se utilizan las ecuaciones 12-15 a 12-21 para determinar $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$. Como $\mathbf{u}_t$ y $\mathbf{u}_n$ siempre son perpendiculares entre sí y quedan en el plano osculador, en el caso de movimiento espacial un tercer vector unitario, $\mathbf{u}_b$, define el *eje binormal b* el cual es perpendicular a $\mathbf{u}_t$ y $\mathbf{u}_n$, figura 12-26.

Como los tres vectores unitarios están relacionados entre sí por el producto cruz vectorial, por ejemplo, $\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_n$, figura 12-26, puede ser posible utilizar esta relación para establecer la dirección de uno de los ejes, si se conocen las direcciones de los otros dos. Por ejemplo, si no ocurre movimiento en la dirección $\mathbf{u}_b$ y esta dirección y $\mathbf{u}_t$ se conocen, entonces $\mathbf{u}_n$ puede ser determinado, donde en este caso $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_b \times \mathbf{u}_t$, figura 12-26. Recuerde, sin embargo, que $\mathbf{u}_n$ siempre está en el lado cóncavo de la curva.

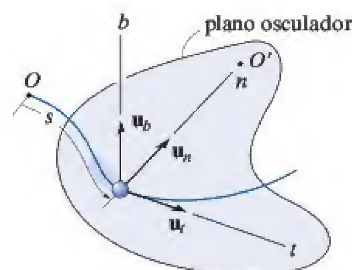


Fig. 12-26

Procedimiento para el análisis

Sistema de coordenadas.

- Siempre que se *conozca* la *trayectoria* de la partícula, podremos establecer un sistema de coordenadas n y t con *origen fijo*, el cual coincide con la partícula en el instante considerado.
- El eje tangente positivo actúa en la dirección del movimiento y el eje normal positivo está dirigido hacia el centro de curvatura de la trayectoria.

Velocidad.

- La *velocidad* de la partícula siempre es tangente a la trayectoria.
- La magnitud de la velocidad se determina a partir de la derivada con respecto al tiempo de la función de trayectoria.

$$v = \dot{s}$$

Aceleración tangencial.

- La componente tangencial de aceleración es el resultado del cambio de la *magnitud* de la velocidad. Esta componente actúa en la dirección s positiva si la velocidad de la partícula se incrementa o en la dirección opuesta si la velocidad se reduce.
- Las relaciones entre a_t, v, t y s son las mismas que las del movimiento rectilíneo, es decir,

$$a_t = \dot{v} \quad a_t\,ds = v\,dv$$

- Si a_t es constante, $a_t = (a_t)_c$, cuando se integran las ecuaciones anteriores resulta

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}(a_t)_c t^2$$
$$v = v_0 + (a_t)_c t$$
$$v^2 = v_0^2 + 2(a_t)_c(s - s_0)$$

Aceleración normal.

- La componente normal de la aceleración es el resultado del cambio en la *dirección* de la velocidad. Esta componente *siempre* está dirigida hacia el centro de curvatura de la trayectoria, es decir, a lo largo del eje n positivo.
- La magnitud de esta componente se determina como sigue

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

- Si la trayectoria se expresa como $y = f(x)$, el radio de curvatura ρ en cualquier punto de la trayectoria se determina con la ecuación

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$$

La derivación de este resultado aparece en cualquier texto común de cálculo.



Los automovilistas que circulan por este trébol experimentan una aceleración normal provocada por el cambio en la dirección de su velocidad. Se presenta una componente tangencial de la aceleración cuando la rapidez de los automóviles se incrementa o reduce.

EJEMPLO 12.14

Cuando el esquiador llega al punto A a lo largo de la trayectoria parabólica en la figura 12-27a, su rapidez es de 6 m/s, la cual se incrementa a 2 m/s^2. Determine la dirección de su velocidad y la dirección y magnitud de su aceleración en este instante. Al hacer el cálculo, pase por alto la estatura del esquiador.

SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. Aunque la trayectoria está expresada en función de sus coordenadas x y y, aún así podemos establecer el origen de los ejes n, t en el punto fijo A de la trayectoria y determine las componentes de **v** y **a** a lo largo de estos ejes, figura 12-27a.

Velocidad. Por definición, la velocidad siempre es tangente a la trayectoria. Como $y = \frac{1}{20}x^2$, $dy/dx = \frac{1}{10}x$, entonces cuando $x = 10$ m, $dy/dx = 1$. Por consiguiente, en A, **v** forma un ángulo $\theta = \tan^{-1} 1 = 45°$ con el eje x, figura 12-27a. Por tanto,

$$v_A = 6 \text{ m/s} \qquad 45° \searrow \qquad \textbf{Resp.}$$

La aceleración está determinada por $\mathbf{a} = \dot{v}\mathbf{u}_t + (v^2/\rho)\mathbf{u}_n$. Sin embargo, primero se tiene que determinar el radio de curvatura de la trayectoria en A(10 m, 5 m). Como $d^2y/dx^2 = \frac{1}{10}$, entonces

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|} = \left.\frac{\left[1 + \left(\frac{1}{10}x\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{1}{10}\right|}\right|_{x=10\text{ m}} = 28.28 \text{ m}$$

La aceleración llega a ser

$$\mathbf{a}_A = \dot{v}\mathbf{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{u}_n$$
$$= 2\mathbf{u}_t + \frac{(6 \text{ m/s})^2}{28.28 \text{ m}}\mathbf{u}_n$$
$$= \{2\mathbf{u}_t + 1.273\mathbf{u}_n\}\text{m/s}^2$$

Como se muestra en la figura 12-27b,

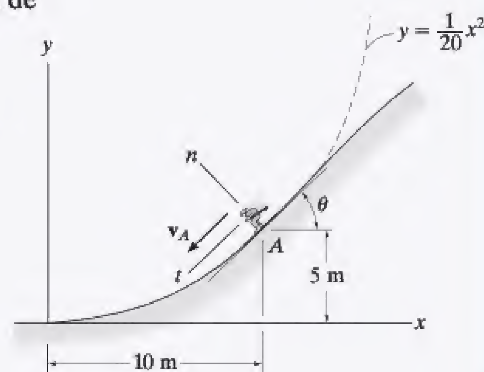
$$a = \sqrt{(2 \text{ m/s}^2)^2 + (1.273 \text{ m/s}^2)^2} = 2.37 \text{ m/s}^2$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{2}{1.273} = 57.5°$$

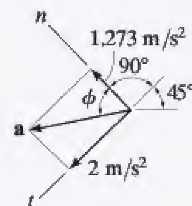
Por tanto, $45° + 90° + 57.5° - 180° = 12.5°$ de modo que,

$$a = 2.37 \text{ m/s}^2 \qquad 12.5° \searrow \qquad \textbf{Resp.}$$

NOTA: al utilizar las coordenadas n, t, fuimos capaces de resolver con facilidad este problema por medio de la ecuación 12-18, puesto que toma en cuenta los distintos cambios de la magnitud y dirección de **v**.



(a)



(b)

Fig. 12-27

12

EJEMPLO 12.15

Un auto de carreras circula alrededor de la pista circular horizontal de 300 pies de radio, figura 12-28. Si el auto aumenta su velocidad a un ritmo constante de 7 pies/s^2, a partir del reposo, determine el tiempo que necesita para alcanzar una aceleración de 8 pies/s^2 ¿Cuál es su velocidad en este instante?

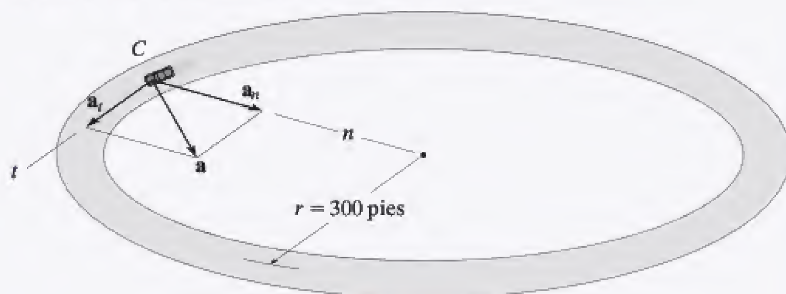


Fig. 12-28

SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. El origen de los ejes n y t coincide con el auto en el instante considerado. El eje t está en la dirección del movimiento y el eje n positivo está dirigido hacia el centro del círculo. Se selecciona este sistema de coordenadas puesto que se conoce la trayectoria.

Aceleración. La magnitud de la aceleración puede relacionarse con sus componentes por medio de $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$. En este caso $a_t = 7$ pies/s^2. Como $a_n = v^2/\rho$, primero debe determinarse la velocidad como una función del tiempo.

$$v = v_0 + (a_t)_c t$$
$$v = 0 + 7t$$

Por tanto

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(7t)^2}{300} = 0.163t^2 \text{ pies/s}^2$$

El tiempo requerido para que la aceleración llegue a ser de 8 pies/s^2 es por consiguiente

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$
$$8 \text{ pies/s}^2 = \sqrt{(7 \text{ pies/s}^2)^2 + (0.163t^2)^2}$$

Al resolver para el valor positivo de t se obtiene

$$0.163t^2 = \sqrt{(8 \text{ pies/s}^2)^2 - (7 \text{ pies/s}^2)^2}$$
$$t = 4.87 \text{ s}$$ ***Resp.***

Velocidad. La rapidez en el instante $t = 4.87$ s es

$$v = 7t = 7(4.87) = 34.1 \text{ pies/s}$$ ***Resp.***

NOTA: recuerde que la velocidad siempre será tangente a la trayectoria, en tanto que la aceleración estará dirigida hacia dentro de la curvatura de la trayectoria.

EJEMPLO 12.16

Las cajas en la figura 12-29*a* se desplazan a lo largo de la transportadora industrial. Si una caja como en la figura 12-29*b* comienza a moverse del reposo en A e incrementa su rapidez de modo que $a_t = (0.2t)$ m/s^2, donde t está en segundos, determine la magnitud de su aceleración cuando llegue al punto B.



(a)

SOLUCIÓN

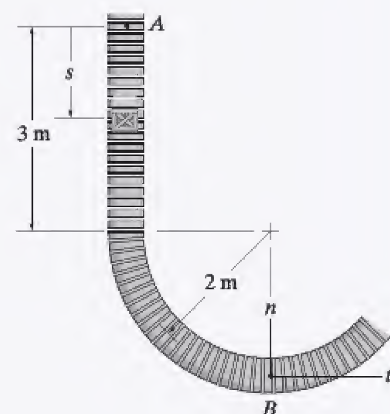
Sistema de coordenadas. La posición de la caja en cualquier instante se define con respecto al punto fijo A mediante la coordenada de trayectoria o posición s, figura 12-29*b*. Se tiene que determinar la aceleración en B con el origen de los ejes n, t en este punto.

Aceleración. Para determinar los componentes de la aceleración $a_t = \dot{v}$ y $a_n = v^2/\rho$, primero es necesario formular v y $\dot{v}$ de modo que puedan evaluarse en B. Como $v_A = 0$ cuando $t = 0$, entonces

$$a_t = \dot{v} = 0.2t \qquad (1)$$

$$\int_0^v dv = \int_0^t 0.2t\,dt$$

$$v = 0.1t^2 \qquad (2)$$



(b)

El tiempo requerido para que la caja llegue al punto B se determina teniendo en cuenta que la posición de B es $s_B = 3 + 2\pi(2)/4 = 6.142$ m, figura 12-29*b* y como $s_A = 0$ cuando $t = 0$ tenemos

$$v = \frac{ds}{dt} = 0.1t^2$$

$$\int_0^{6.142\text{ m}} ds = \int_0^{t_B} 0.1t^2 dt$$

$$6.142 \text{ m} = 0.0333t_B^3$$

$$t_B = 5.690\text{s}$$

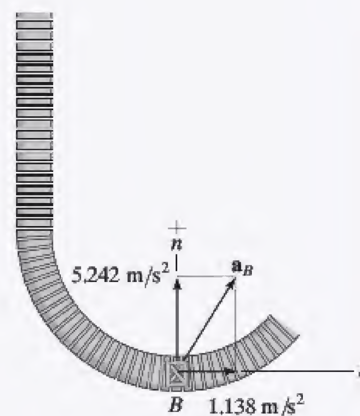
Al sustituir en las ecuaciones 1 y 2 se obtiene

$$(a_B)_t = \dot{v}_B = 0.2(5.690) = 1.138 \text{ m/s}^2$$

$$v_B = 0.1(5.69)^2 = 3.238 \text{ m/s}$$

En B, $\rho_B = 2$ m, de modo que

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho_B} = \frac{(3.238 \text{ m/s})^2}{2 \text{ m}} = 5.242 \text{ m/s}^2$$



(c)

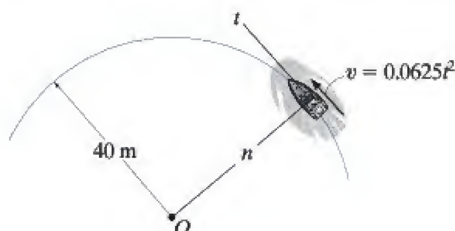
Fig. 12-29

La magnitud de $\mathbf{a}_B$, figura 12-29*c*, es por consiguiente

$$a_B = \sqrt{(1.138 \text{ m/s}^2)^2 + (5.242 \text{ m/s}^2)^2} = 5.36 \text{ m/s}^2 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

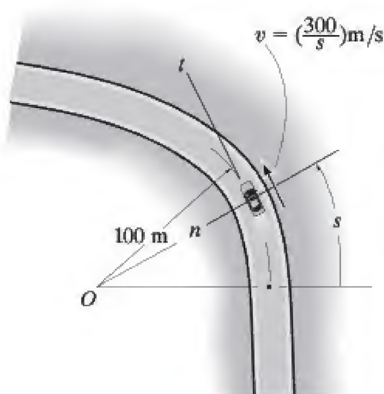
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F12-27. El bote navega a lo largo de la trayectoria circular a una rapidez de $v = (0.0625t^2)$ m/s, donde t está en segundos. Determine la magnitud de su aceleración cuando $t = 10$ s.



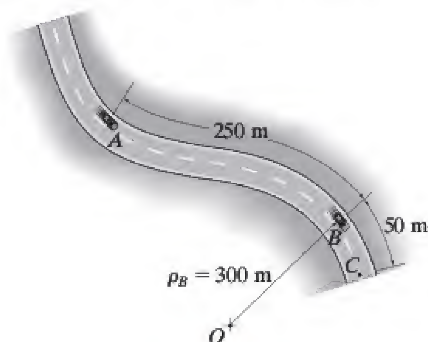
F12-27

F12-28. El automóvil viaja a lo largo de la carretera a una rapidez de $v = (300/s)$ m/s, donde s está en metros. Determine la magnitud de su aceleración cuando $t = 3$ s si $t = 0$ cuando $s = 0$.



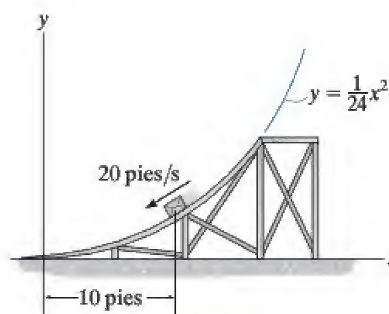
F12-28

F12-29. Si el automóvil desacelera de manera uniforme a lo largo de la carretera curva de 25 m/s en A a 15 m/s en C, determine la aceleración del automóvil en B.



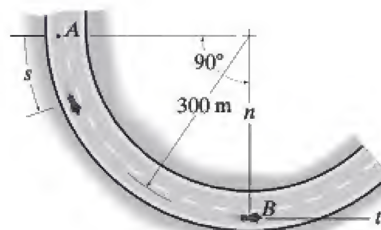
F12-29

F12-30. Cuando $x = 10$ pies, la rapidez del embalaje es de 20 pies/s la cual se incrementa a 6 pies/s^2. Determine la dirección de su velocidad y la magnitud de su aceleración en este instante.



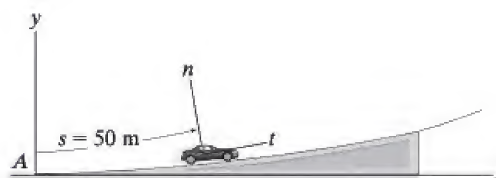
F12-30

F12-31. Si la desaceleración de la motocicleta es $a_t = -(0.001s)$ m/s^2 y su rapidez en la posición A es de 25 m/s, determine la magnitud de su aceleración cuando pase por el punto B.



F12-31

F12-32. El automóvil sube la colina con una rapidez de $v = (0.2s)$ m/s, donde s está en metros, medida con respecto a A. Determine la magnitud de su aceleración cuando esté en el punto $s = 50$ m, donde $\rho = 500$ m.



F12-32

PROBLEMAS

12-111. Cuando se diseña la curva de una carretera se requiere que los automóviles que viajen a una rapidez constante de 25 m/s no experimenten una aceleración de más de 3 m/s^2. Determine el radio de curvatura mínimo de la curva.

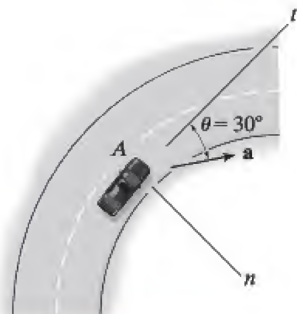
***12-112.** En un instante dado, un automóvil viaja a lo largo de una carretera circular a una rapidez de 20 m/s al mismo tiempo que reduce su rapidez a razón de 3 m/s^2. Si la magnitud de su aceleración es de 5 m/s^2, determine el radio de curvatura de la carretera.

•12-113. Determine la rapidez constante máxima que un auto de carreras puede tener si su aceleración no puede exceder de 7.5 m/s^2, mientras recorre una pista con radio de curvatura de 200 m.

12-114. Un automóvil toma una curva circular horizontal de 800 pies de radio. Si su aceleración es de 5 pies/s^2, determine la rapidez constante a la cual está viajando el automóvil.

12-115. Un automóvil viaja a lo largo de una carretera curva horizontal de 600 m de radio. Si la rapidez se incrementa de manera uniforme a razón de 2000 km/h^2, determine la magnitud de la aceleración en el instante en que la rapidez del automóvil sea de 60 km/h.

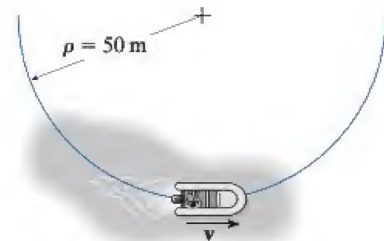
***12-116.** En el punto A la rapidez del automóvil es de 80 pies/s y la magnitud de la aceleración de **a** es de 10 pies/s^2 y actúa en la dirección mostrada. Determine el radio de curvatura de la trayectoria en el punto A y el componente tangencial de la aceleración.



Prob. 12-116

•12-117. A partir de que arranca, el bote se desplaza alrededor de la trayectoria circular, $\rho = 50$ m, a una rapidez de $v = (0.8t)$ m/s, donde t está en segundos. Determine las magnitudes de la velocidad y aceleración del bote cuando ha viajado 20 m.

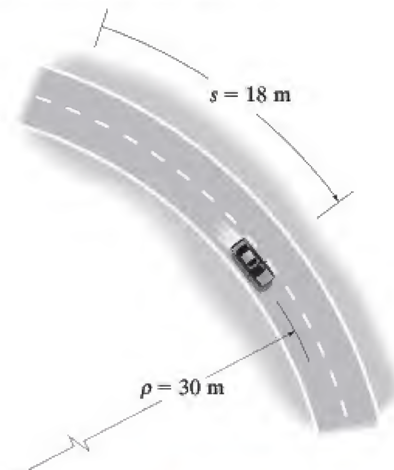
12-118. A partir del reposo el bote se desplaza alrededor de la trayectoria circular, $\rho = 50$ m, a una rapidez de $v = (0.2t^2)$ m/s, donde t está en segundos. Determine las magnitudes de la velocidad y aceleración del bote en el instante $t = 3$ s.



Probs. 12-117/118

12-119. Un automóvil corre en vueltas alrededor de una pista circular de 250 pies de radio y su rapidez durante un corto intervalo $0 \leq t \leq 2$ s es de $v = 3(t + t^2)$ pies/s, donde t está en segundos. Determine la magnitud de la aceleración del automóvil cuando $t = 2$ s. ¿Qué distancia recorrió en $t = 2$ s?

***12-120.** El automóvil se desplaza a lo largo de una trayectoria circular de tal modo que su rapidez se incrementa en $a_t = (0.5e^t)$ m/s^2, donde t está en segundos. Determine las magnitudes de su velocidad y aceleración después de que ha recorrido $s = 18$ m a partir del reposo. No tome en cuenta las dimensiones del automóvil.

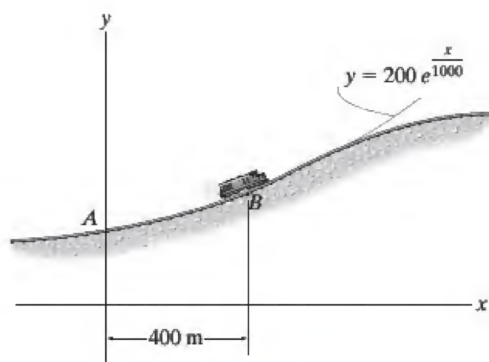


Prob. 12-120

12

•**12-121.** El tren pasa por el punto B con una rapidez de 20 m/s la cual se reduce a $a_t = -0.5$ m/s^2. Determine la magnitud de su aceleración en este punto.

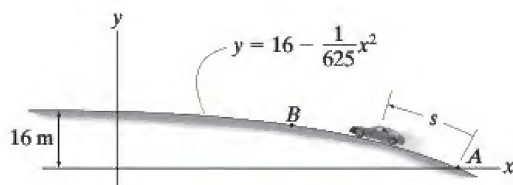
12-122. El tren pasa por el punto A con una rapidez de 30 m/s, la cual comienza a reducirse a un ritmo constante de $a_t = -0.25$ m/s^2. Determine la magnitud de su aceleración cuando llega al punto B donde $s_{AB} = 412$ m.



Probs. 12-121/122

12-123. El automóvil pasa por el punto A con una rapidez de 25 m/s, después de lo cual su velocidad se define como $v = (25 - 0.15s)$ m/s. Determine la magnitud de su aceleración cuando llega al punto B, donde $s = 51.5$ m.

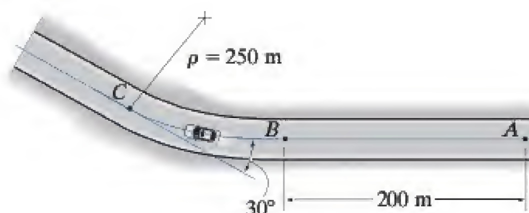
***12-124.** Si el automóvil pasa por el punto A con una rapidez de 20 m/s y comienza a incrementarse a una razón constante de $a_t = 0.5$ m/s^2, determine la magnitud de su aceleración cuando $s = 100$ m.



Probs. 12-123/124

•**12-125.** Cuando el automóvil pasa por el punto A su rapidez es de 25 m/s. Si se aplican los frenos, su rapidez se reduce en $a_t = (-\frac{1}{4}t^{1/2})$ m/s^2. Determine la magnitud de su aceleración poco antes de que llegue al punto C.

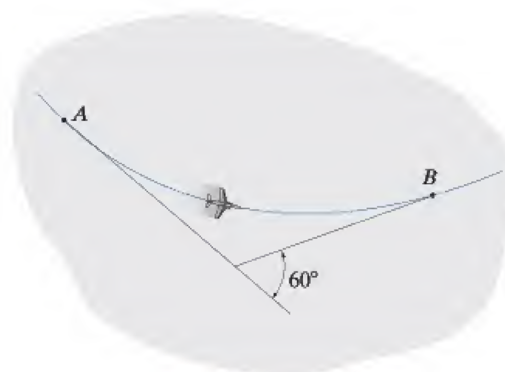
12-126. Cuando el automóvil pasa por el punto A su rapidez es de 25 m/s. Si se aplican los frenos, su rapidez se reduce en $a_t = (0.001s - 1)$ m/s^2. Determine la magnitud de su aceleración un poco antes de que llegue al punto C.



Probs. 12-125/126

12-127. Determine la magnitud de la aceleración del avión, durante el viraje. Vuela a lo largo de una trayectoria circular horizontal AB en 40 s, al mismo tiempo que mantiene una rapidez constante de 300 pies/s.

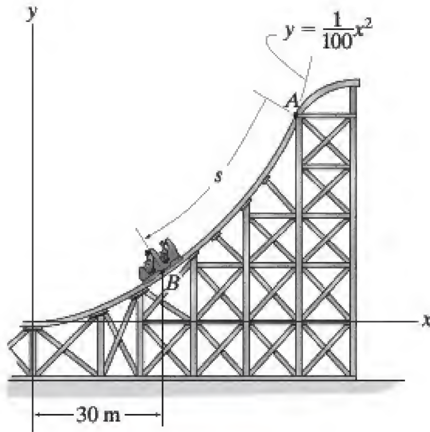
***12-128.** El avión vuela a lo largo de una trayectoria circular horizontal AB en 60 s. Si su rapidez en el punto A es de 400 pies/s, la cual se reduce a razón de $a_t = (-0.1t)$ pies/s^2, determine la magnitud de su aceleración cuando llegue al punto B.



Probs. 12-127/128

•**12-129.** Cuando la montaña rusa pasa por el punto B, su rapidez es de 25 m/s, la cual se incrementa a $a_t = 3$ m/s^2. Determine la magnitud de su aceleración en este instante y el ángulo que la dirección forma con el eje x.

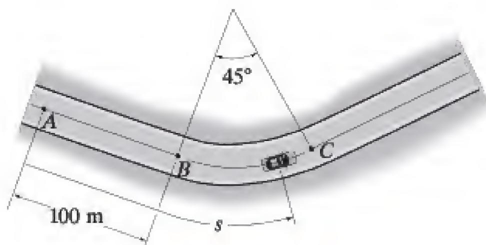
12-130. Si la montaña rusa empieza del reposo en A y su rapidez se incrementa en $a_t = (6 - 0.06s)$ m/s^2, determine la magnitud de su aceleración cuando pasa por el punto B donde $s_B = 40$ m.



Probs. 12-129/130

12-131. El automóvil viaja a una rapidez constante de 30 m/s. El conductor aplica entonces los frenos en A con lo cual su rapidez se reduce a razón de $a_t = (-0.08v)$ m/s^2, donde v está en m/s. Determine la aceleración del automóvil un poco antes de que pase por el punto C de la curva circular. Se requieren 15 s para que el automóvil recorra la distancia de A a C.

***12-132.** El automóvil viaja a una rapidez constante de 30 m/s. El conductor aplica entonces los frenos en A con lo cual su rapidez se reduce a razón de $a_t = \left(-\frac{1}{8}t\right)$ m/s^2, donde t está en segundos. Determine la aceleración del automóvil un poco antes de que pase por el punto C de la curva circular. Se requieren 15 s para que el automóvil recorra la distancia de A a C.

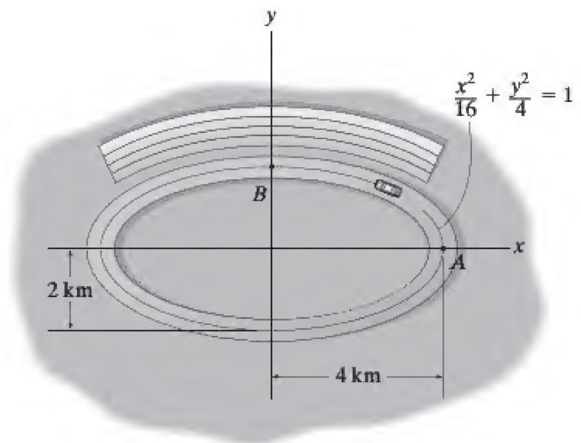


Probs. 12-131/132

•**12-133.** Una partícula se desplaza a lo largo de una curva circular de 20 m de radio. Si su rapidez inicial es de 20 m/s y luego comienza a reducirse a razón de $a_t = (-0.25s)$ m/s^2, determine la magnitud de su aceleración dos segundos después.

12-134. Un auto de carreras viaja a una rapidez constante de 240 km/h alrededor de una pista elíptica. Determine la aceleración experimentada por el piloto en A.

12-135. El auto de carreras viaja a una rapidez constante de 240 km/h alrededor de una pista elíptica. Determine la aceleración experimentada por el piloto en B.



Probs. 12-134/135

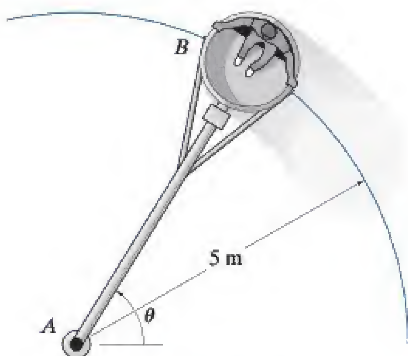
***12-136.** La posición de una partícula se define como $\mathbf{r} = \{2\,\text{sen}\,(\frac{\pi}{4})t\,\mathbf{i} + 2\cos(\frac{\pi}{4})t\,\mathbf{j} + 3t\,\mathbf{k}\}$ m, donde t está en segundos. Determine las magnitudes de la velocidad y aceleración en cualquier instante.

•**12-137.** La posición de una partícula se define como $\mathbf{r} = \{t^3\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 8t\mathbf{k}\}$ m, donde t está en segundos. Determine las magnitudes de la velocidad y aceleración y el radio de curvatura de la trayectoria cuando $t = 2$ s.

12

12-138. El carro B gira de modo que su rapidez se incrementa en $(a_t)_B = (0.5e^t)$ m/s^2, donde t está en segundos. Si el carro parte del reposo cuando $\theta = 0°$, determine las magnitudes de su velocidad y aceleración cuando el brazo AB gira $\theta = 30°$. Ignore el tamaño del carro.

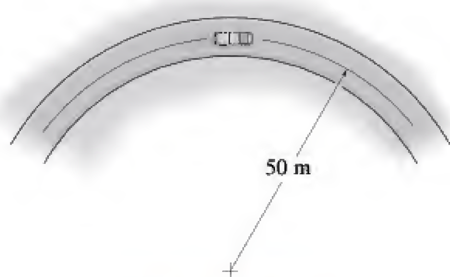
12-139. El carro B gira de modo que su velocidad se incrementa en $(a_t)_B = (0.5e^t)$ m/s^2, donde t está en segundos. Si el carro parte del reposo cuando $\theta = 0°$, determine las magnitudes de su velocidad y aceleración cuando $t = 2$ s. Ignore el tamaño del carro.



Probs. 12-138/139

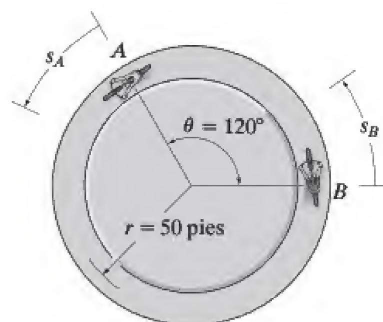
***12-140.** El camión viaja a lo largo de una carretera circular de 50 m de radio a una rapidez de 4 m/s. Durante una corta distancia cuando $s = 0$, su rapidez se incrementa entonces en $a_t = (0.05s)$ m/s^2, donde s está en metros. Determine su rapidez y la magnitud de su aceleración cuando se ha movido $s = 10$ m.

•12-141. El camión viaja a lo largo de una carretera circular de 50 m de radio a una rapidez de 4 m/s. Durante una corta distancia cuando $t = 0$, su rapidez se incrementa entonces en $a_t = (0.4t)$ m/s^2, donde t está en segundos. Determine la rapidez y la magnitud de su aceleración cuando $t = 4$ s.



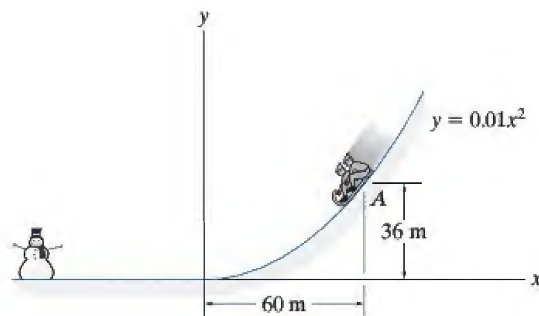
Probs. 12-140/141

12-142. Dos ciclistas A y B viajan en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de una pista circular a una rapidez constante de 8 pies/s en el instante mostrado. Si la rapidez de A se incrementa a $(a_t)_A = (s_A)$ pies/s^2, donde s_A está en pies, determine la distancia medida en sentido contrario a las manecillas del reloj a lo largo de la pista de B a A entre los ciclistas cuando $t = 1$ s. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de cada ciclista en este instante?



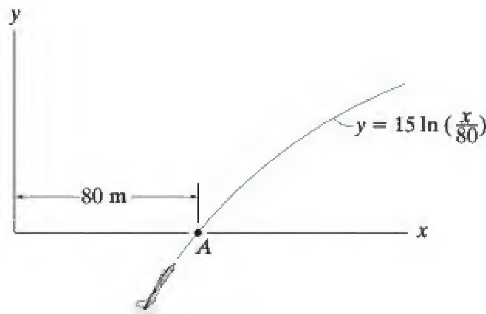
Prob. 12-142

12-143. Un tobogán se desliza hacia abajo a lo largo de una curva, la cual puede ser representada de forma aproximada por la parábola $y = 0.01x^2$. Determine la magnitud de su aceleración cuando llega al punto A, donde su rapidez es $v_A = 10$ m/s y se incrementa a razón de $(a_t)_A = 3$ m/s^2.



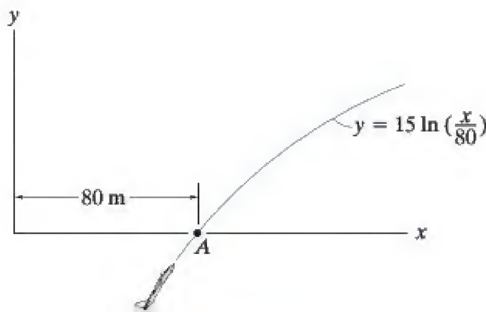
Prob. 12-143

***12-144.** El avión de reacción vuela a una rapidez de 120 m/s la cual se reduce a 40 m/s^2 cuando llega al punto A. Determine la magnitud de su aceleración cuando está en este punto. También, especifique la dirección del vuelo con respecto al eje x.



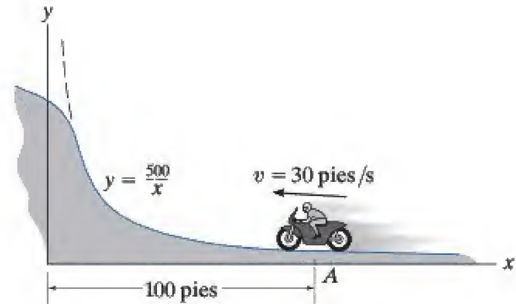
Prob. 12-144

•12-145. El avión de reacción vuela a una rapidez constante de 110 m/s a lo largo de una trayectoria curva. Determine la magnitud de su aceleración cuando llega al punto A ($y = 0$).



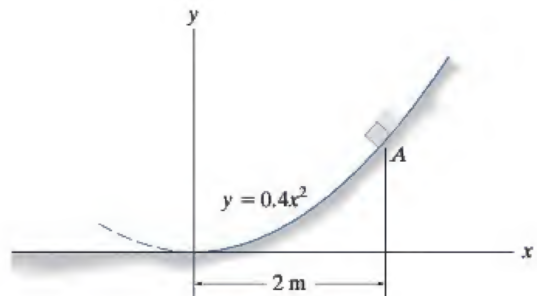
Prob. 12-145

12-146. El motociclista toma una curva a una velocidad constante de 30 pies/s. Determine su aceleración cuando está en el punto A. Al hacer el cálculo, ignore el tamaño de la motocicleta y la estatura del motociclista.



Prob. 12-146

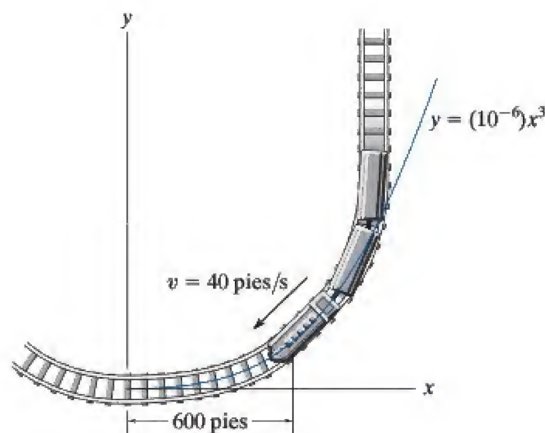
12-147. La caja, cuyo tamaño no importa, se desliza hacia abajo a lo largo de una trayectoria curva definida por la parábola $y = 0.4x^2$. Cuando está en A ($x_A = 2$ m, $y_A = 1.6$ m), la rapidez es $v_B = 8$ m/s y el incremento de su rapidez es $dv_B/dt = 4$ m/s^2. Determine la magnitud de la aceleración de la caja en este instante.



Prob. 12-147

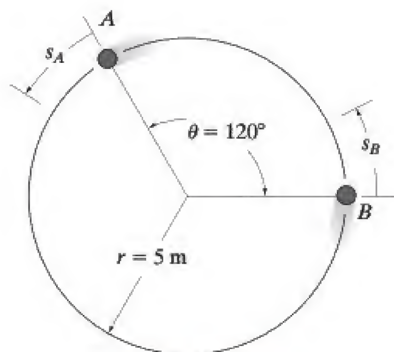
12

***12-148.** En vías de ferrocarril se utiliza una curva de transición espiral para conectar una parte recta de la vía con una curva. Si la ecuación $y = (10^{-6})x^3$ define la espiral, donde x y y están en pies, determine la magnitud de la aceleración de una máquina de tren que se desplaza a una rapidez constante de 40 pies/s, cuando está en el punto $x = 600$ pies.



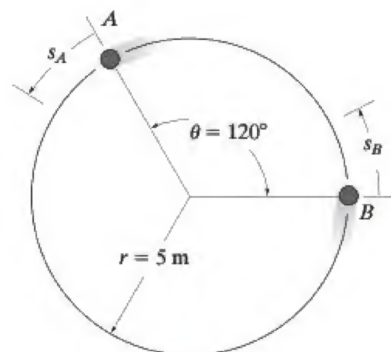
Prob. 12-148

•12-149. Las partículas A y B viajan en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de una pista circular a una rapidez constante de 8 m/s. Si en el instante mostrado la rapidez de A comienza a incrementarse en $(a_t)_A = (0.4s_A)$ m/s^2, donde s_A está en metros, determine la distancia medida en sentido contrario al de las manecillas del reloj a lo largo de la pista de B a A cuando $t = 1$ s. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de cada partícula en este instante?



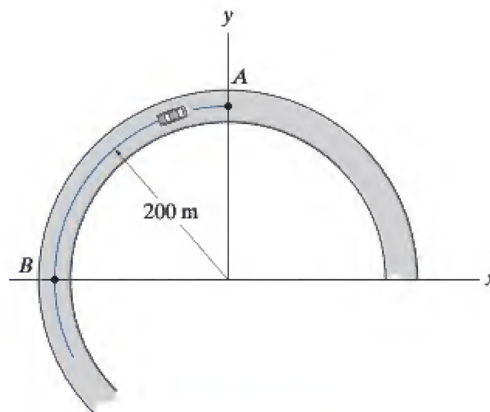
Prob. 12-149

12-150. Las partículas A y B viajan alrededor de una pista circular a una rapidez de 8 m/s en el instante que se muestra. Si la rapidez de B se incrementa en $(a_t)_B = 4$ m/s^2 y en el mismo instante A experimenta un incremento de rapidez de $(a_t)_A = 0.8t$ m/s^2, determine cuánto tiempo se requiere para que ocurra una colisión. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de cada partícula un poco antes de que ocurra la colisión?



Prob. 12-150

12-151. El auto de carreras corre alrededor de una pista circular a una rapidez de 16 m/s. Cuando llega al punto A incrementa su rapidez a $a_t = (\frac{4}{3}v^{1/4})$ m/s^2, donde v está en m/s. Determine las magnitudes de la velocidad y aceleración del automóvil cuando llega al punto B. También, ¿cuánto tiempo se requiere para que viaje de A a B?



Prob. 12-151

***12-152.** Una partícula se desplaza a lo largo de una trayectoria $y = a + bx + cx^2$, donde a, b, c son constantes. Si la rapidez de la partícula es constante, $v = v_0$, determine los componentes x y y de la velocidad y el componente normal de la aceleración cuando $x = 0$.

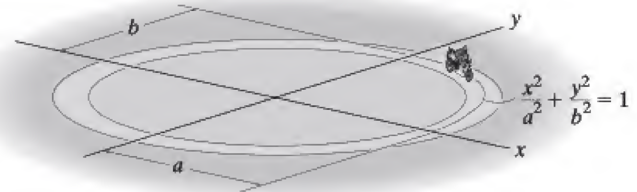
•**12-153.** El balón es pateado con una rapidez inicial $v_A = 8$ m/s a un ángulo $\theta_A = 40°$ con la horizontal. Determine la ecuación de la trayectoria, $y = f(x)$ y luego las componentes normales de su aceleración cuando $t = 0.25$ s.

12-154. Las ecuaciones $x = (2t + t^2)$ m y $y = (t^2)$ m, donde t está en segundos, definen el movimiento de una partícula. Determine las componentes normal y tangencial de la velocidad y aceleración de la partícula cuando $t = 2$ s.

12-155. El motociclista viaja a lo largo de la pista elíptica a una velocidad constante v. Determine la magnitud máxima de la aceleración si $a > b$.



Prob. 12-153

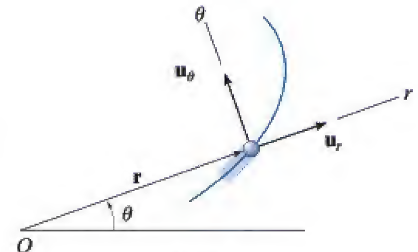


Prob. 12-155

12.8 Movimiento curvilíneo: componentes cilíndricos

En ocasiones el movimiento de una partícula se limita a una trayectoria que se describe mejor por medio de coordenadas cilíndricas. Si el movimiento se limita al plano, entonces se utilizan coordenadas polares.

Coordenadas polares. Podemos especificar la ubicación de la partícula de la figura 12-30*a* por medio de una *coordenada radial* r, la cual se extiende hacia fuera del origen fijo O hasta la partícula y una *coordenada transversal* θ, la cual es el ángulo en sentido contrario al de las manecillas del reloj entre una línea de referencia fija y el eje r. El ángulo en general se mide en grados o radianes, donde 1 rad $= 180°/\pi$. Los vectores unitarios $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\theta$ definen las direcciones positivas de las coordenadas r y θ, respectivamente. En este caso, $\mathbf{u}_r$ está en la dirección de r creciente cuando θ se mantiene fija y $\mathbf{u}_\theta$ está en una dirección de θ creciente cuando r se mantiene fija. Observe que estas direcciones son perpendiculares entre sí.

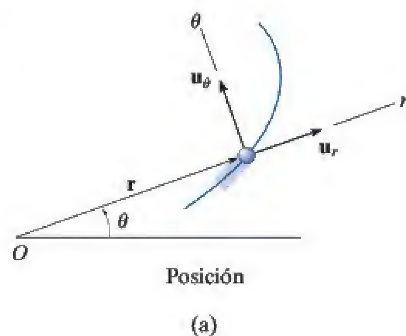


Posición

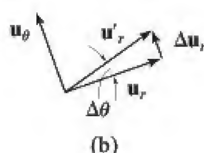
(a)

Fig. 12-30

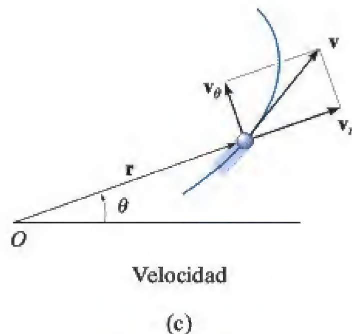
12



(a)



(b)



(c)

Fig. 12-30 (cont.)

Posición. En cualquier instante, figura 12-30*a*, la posición de la partícula está definida por el vector de posición

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r \tag{12-22}$$

Velocidad. La velocidad instantánea **v** se obtiene al tomar la derivada con respecto al tiempo de **r**. Al usar un punto para representar la derivada con respecto al tiempo, tenemos

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\mathbf{u}}_r$$

Para evaluar $\dot{\mathbf{u}}_r$, observe que $\mathbf{u}_r$ sólo cambia su dirección con respecto al tiempo, ya que por definición la magnitud de este vector siempre es una unidad. Por consiguiente, durante el tiempo Δt, un cambio de Δr no cambiará la dirección de $\mathbf{u}_r$; no obstante, un cambio $\Delta\theta$ hará que $\mathbf{u}_r$ cambie a $\mathbf{u}'_r$, donde $\mathbf{u}'_r = \mathbf{u}_r + \Delta\mathbf{u}_r$, figura 12-30*b*. El cambio de $\mathbf{u}_r$ es por tanto $\Delta\mathbf{u}_r$. Con ángulos pequeños $\Delta\theta$ la magnitud de este vector es $\Delta u_r \approx 1\ (\Delta\theta)$ y actúa en la dirección $\mathbf{u}_\theta$. Por consiguiente, $\Delta\mathbf{u}_r = \Delta\theta\mathbf{u}_\theta$, y por tanto

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{u}_r}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)\mathbf{u}_\theta$$

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \dot{\theta}\mathbf{u}_\theta \tag{12-23}$$

Al sustituir en la ecuación anterior, la velocidad se escribe en su forma de componentes como

$$\mathbf{v} = v_r\mathbf{u}_r + v_\theta\mathbf{u}_\theta \tag{12-24}$$

donde

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r} \\ v_\theta &= r\dot{\theta} \end{aligned} \tag{12-25}$$

Estos componentes se muestran gráficamente en la figura 12-30*c*. La *componente radial* $\mathbf{v}_r$ mide la tasa de incremento o decremento de la longitud de la coordenada radial, es decir, $\dot{r}$; en tanto que la *componente transversal* $\mathbf{v}_\theta$ se interpreta como la tasa de movimiento a lo largo de la circunferencia de un círculo de radio r. En particular, el término $\dot{\theta} = d\theta/dt$ se conoce como *velocidad angular*, puesto que indica el cambio con respecto al tiempo del ángulo θ. Las unidades comunes utilizadas para esta medición son rad/s.

Como $\mathbf{v}_r$ y $\mathbf{v}_\theta$ son mutuamente perpendiculares, la *magnitud* de la velocidad o rapidez es simplemente el valor positivo de

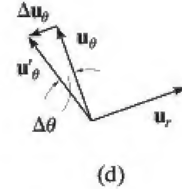
$$v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2} \tag{12-26}$$

y la *dirección* de **v** es, desde luego, tangente a la trayectoria, figura 12-30*c*.

Aceleración. Si tomamos las derivadas de tiempo de la ecuación 12-24 y utilizamos las ecuaciones 12-25, obtenemos la aceleración instantánea de la partícula,

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{r}\mathbf{u}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{u}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{u}}_\theta$$

Para evaluar $\dot{\mathbf{u}}_\theta$, lo único que se requiere es determinar el cambio de la dirección de $\mathbf{u}_\theta$ puesto que su magnitud siempre es la unidad. Durante el tiempo Δt, un cambio Δr no cambiará la dirección de $\mathbf{u}_\theta$, no obstante, un cambio $\Delta\theta$ hará que $\mathbf{u}_\theta$ se convierta en $\mathbf{u}'_\theta$, donde $\mathbf{u}'_\theta = \mathbf{u}_\theta + \Delta\mathbf{u}_\theta$, figura 12-30*d*. El cambio de $\mathbf{u}_\theta$ con el tiempo es $\Delta\mathbf{u}_\theta$. Con ángulos pequeños la magnitud de este vector es $\Delta u_\theta \approx 1(\Delta\theta)$ y actúa en la dirección $-\mathbf{u}_r$, es decir, $\Delta\mathbf{u}_\theta = -\Delta\theta\mathbf{u}_r$. Por tanto,



(d)

$$\dot{\mathbf{u}}_\theta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{u}_\theta}{\Delta t} = -\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)\mathbf{u}_r$$

$$\dot{\mathbf{u}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{u}_r \qquad (12\text{-}27)$$

Si sustituimos este resultado y la ecuación 12-23 en la ecuación anterior para $\mathbf{a}$, escribimos la aceleración en su forma de componentes como

$$\boxed{\mathbf{a} = a_r\mathbf{u}_r + a_\theta\mathbf{u}_\theta} \qquad (12\text{-}28)$$

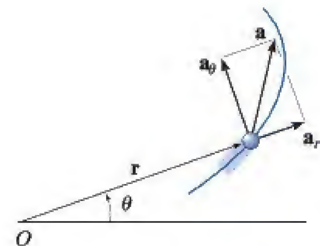
donde

$$\boxed{\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{aligned}} \qquad (12\text{-}29)$$

El término $\ddot{\theta} = d^2\theta/dt^2 = d/dt(d\theta/dt)$ se conoce como *aceleración angular* puesto que mide el cambio de la velocidad angular durante un instante. Las unidades para esta medición son rad/s^2.

Como $\mathbf{a}_r$ y $\mathbf{a}_\theta$ son siempre perpendiculares, la *magnitud* de la aceleración es simplemente el valor positivo de

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2} \qquad (12\text{-}30)$$



Aceleración

(e)

La *dirección* se determina mediante la adición vectorial de sus dos componentes. En general, $\mathbf{a}$ *no* será tangente a la trayectoria, figura 12-30*e*.

12

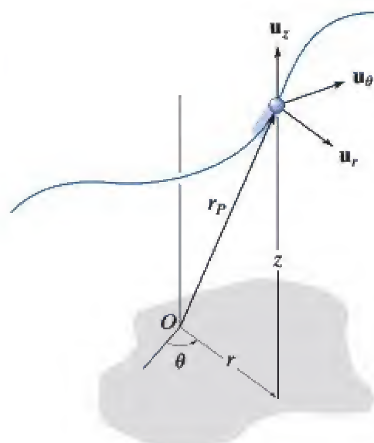


Fig. 12-31

Coordenadas cilíndricas.

Si la partícula se mueve a lo largo de una curva espacial como se muestra en la figura 12-31, entonces su ubicación se especifica por medio de las tres *coordenadas cilíndricas*, r, θ, z. La coordenada z es idéntica a la que se utilizó para coordenadas rectangulares. Como el vector unitario que define su dirección $\mathbf{u}_z$, es constante, las derivadas con respecto al tiempo de este vector son cero, y por consiguiente la posición, velocidad y aceleración de la partícula se escriben en función de sus coordenadas cilíndricas como sigue:

$$\mathbf{r}_P = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{u}_z \qquad (12\text{-}31)$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{u}_z \qquad (12\text{-}32)$$

Derivadas con respecto al tiempo.

Las ecuaciones anteriores requieren que obtengamos las derivadas con respecto al tiempo $\dot{r}, \ddot{r}, \dot{\theta}$, y $\ddot{\theta}$ para evaluar las componentes r y θ de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$. En general se presentan dos tipos de problema:

1. Si las coordenadas polares se especifican como ecuaciones paramétricas en función del tiempo, $r = r(t)$ y $\theta = \theta(t)$, entonces las derivadas con respecto al tiempo pueden calcularse directamente.
2. Si no se dan las ecuaciones paramétricas en función del tiempo, entonces debe conocerse la trayectoria $r = f(\theta)$. Si utilizamos la regla de la cadena del cálculo podemos encontrar entonces la relación entre $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$ y entre $\ddot{r}$ y $\ddot{\theta}$. En el apéndice C se explica la aplicación de la regla de la cadena junto con algunos ejemplos.



El movimiento helicoidal de este muchacho puede seguirse por medio de componentes cilíndricos. En este caso, la coordenada radial r es constante, la coordenada transversal θ se incrementa con el tiempo a medida que el muchacho gira alrededor de la vertical y su altitud z se reduce con el tiempo.

Procedimiento para el análisis

Sistema de coordenadas.

- Las coordenadas polares son una opción adecuada para resolver problemas cuando se presenta el movimiento angular de la coordenada radial r para describir el movimiento de la partícula. Asimismo, algunas trayectorias del movimiento pueden describirse de forma conveniente en función de estas coordenadas.
- Para utilizar coordenadas polares, el origen se establece en un punto fijo y la línea radial r se dirige hacia la partícula.
- La coordenada transversal θ se mide desde una línea de referencia fija hasta la línea radial.

Velocidad y aceleración.

- Con r y las cuatro derivadas con respecto al tiempo $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$, y $\ddot{\theta}$ evaluadas en el instante considerado, sus valores se sustituyen en las ecuaciones 12-25 y 12-29 para obtener las componentes radial y transversal de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$.
- Si es necesario tomar las derivadas con respecto al tiempo de $r = f(\theta)$, entonces debe utilizarse la regla de la cadena. Vea el apéndice C.
- El movimiento en tres dimensiones requiere una extensión simple del procedimiento anterior para incluir $\dot{z}$ y $\ddot{z}$.

EJEMPLO 12.17

El juego mecánico que se muestra en la figura 12-32*a* consiste en una silla que gira en una trayectoria circular horizontal de radio *r*, de modo que la velocidad angular y la aceleración angular del brazo *OB* son $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$, respectivamente. Determine las componentes radial y transversal de la velocidad y aceleración del pasajero, cuya estatura no se toma en cuenta en el cálculo.

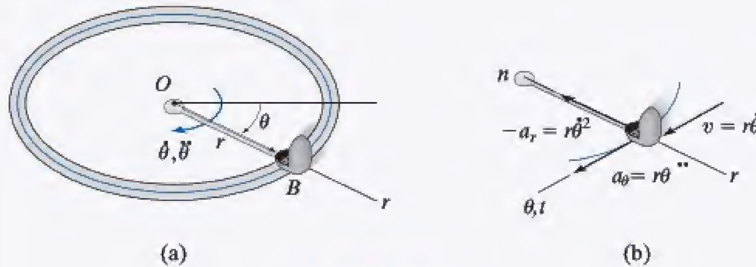


Fig. 12-32

SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. Como se reporta el movimiento angular del brazo, se eligen coordenadas polares para la solución, figura 12-32*a*. En este caso θ no está relacionado con *r*, puesto que el radio es constante para todos los ángulos θ.

Velocidad y aceleración. Primero es necesario especificar la primera y segunda derivadas con respecto al tiempo de *r* y θ. Como *r* es *constante*, tenemos

$$r = r \qquad \dot{r} = 0 \qquad \ddot{r} = 0$$

Por tanto,

$$v_r = \dot{r} = 0 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$
$$v_\theta = r\dot{\theta} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -r\dot{\theta}^2 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = r\ddot{\theta} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Estos resultados se muestran en la figura 12-32*b*.

NOTA: los ejes *n*, *t* también se muestran en la figura 12-32*b*, que en este caso especial de movimiento circular son *colineales* con los ejes *r* y θ, respectivamente. Como $v = v_\theta = v_t = r\theta$, entonces por comparación,

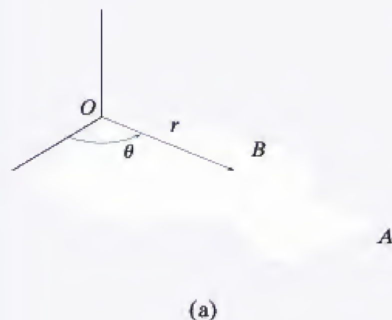
$$-a_r = a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(r\dot{\theta})^2}{r} = r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}) = \frac{dr}{dt}\dot{\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt} = 0 + r\ddot{\theta}$$

12

EJEMPLO 12.18

La barra OA en la figura 12-33a gira en el plano horizontal de modo que $\theta = (t^3)$ rad. Al mismo tiempo, el collar B se desliza hacia fuera a lo largo de OA de modo que $r = (100t^2)$ mm. Si en ambos casos t está en segundos, determine la velocidad y aceleración del collar cuando $t = 1$ s.



(a)

SOLUCIÓN

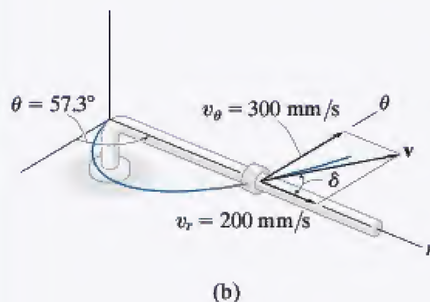
Sistema de coordenadas. Como se dan las ecuaciones paramétricas en función del tiempo de la trayectoria, no es necesario relacionar r con θ.

Velocidad y aceleración. Si determinamos las derivadas con respecto al tiempo y las evaluamos cuando $t = 1$ s, tenemos

$$r = 100t^2\Big|_{t=1\text{ s}} = 100\text{ mm} \quad \theta = t^3\Big|_{t=1\text{ s}} = 1\text{ rad} = 57.3^\circ$$

$$\dot{r} = 200t\Big|_{t=1\text{ s}} = 200\text{ mm/s} \quad \dot{\theta} = 3t^2\Big|_{t=1\text{ s}} = 3\text{ rad/s}$$

$$\ddot{r} = 200\Big|_{t=1\text{ s}} = 200\text{ mm/s}^2 \quad \ddot{\theta} = 6t\Big|_{t=1\text{ s}} = 6\text{ rad/s}^2.$$



(b)

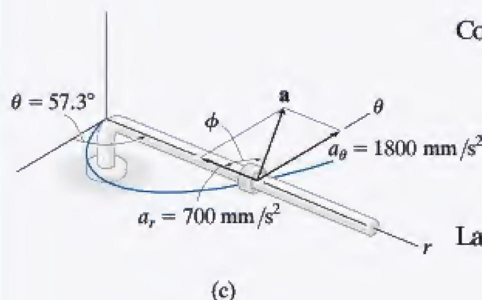
Como se muestra en la figura 12-33b,

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta \\ &= 200\mathbf{u}_r + 100(3)\mathbf{u}_\theta = \{200\mathbf{u}_r + 300\mathbf{u}_\theta\}\text{ mm/s}\end{aligned}$$

La magnitud de **v** es

$$v = \sqrt{(200)^2 + (300)^2} = 361\text{ mm/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{300}{200}\right) = 56.3^\circ \qquad \delta + 57.3^\circ = 114^\circ \qquad \textit{Resp.}$$



(c)

Fig. 12-33

Como se muestra en la figura 12-33c,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta \\ &= [200 - 100(3)^2]\mathbf{u}_r + [100(6) + 2(200)3]\mathbf{u}_\theta \\ &= \{-700\mathbf{u}_r + 1800\mathbf{u}_\theta\}\text{ mm/s}^2\end{aligned}$$

La magnitud de **a** es

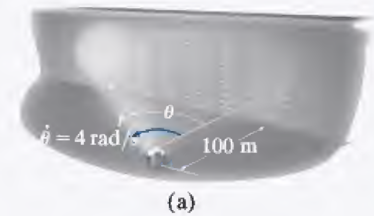
$$a = \sqrt{(700)^2 + (1800)^2} = 1930\text{ mm/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{1800}{700}\right) = 68.7^\circ \qquad (180^\circ - \phi) + 57.3^\circ = 169^\circ \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: la velocidad es tangente a la trayectoria; sin embargo, la aceleración está dirigida hacia dentro de la curvatura de la trayectoria, como se esperaba.

EJEMPLO 12.19

El faro buscador en la figura 12-34*a* emite un rayo de luz a lo largo de un muro situado a 100 m. Determine las magnitudes de la velocidad y aceleración a las cuales el rayo de luz parece viajar a través del muro en el instante $\theta = 45°$. El faro buscador gira a una velocidad constante de $\dot{\theta} = 4$ rad/s.



(a)

SOLUCIÓN

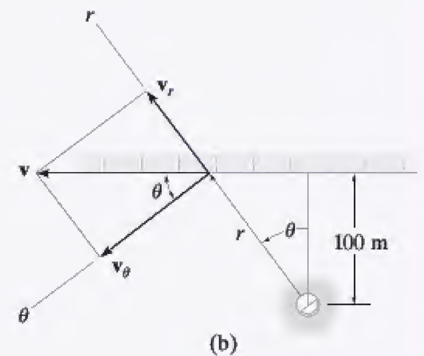
Sistema de coordenadas. Se utilizarán coordenadas polares para resolver este problema puesto que se proporciona la velocidad angular del faro buscador. Para determinar las derivadas con respecto al tiempo necesarias, primero se tiene que relacionar r con θ. De acuerdo con la figura 12-34*a*,

$$r = 100/\cos\theta = 100\sec\theta$$

Velocidad y aceleración. Al utilizar la regla de la cadena del cálculo y puesto que $d(\sec\theta) = \sec\theta\tan\theta\, d\theta$, y $d(\tan\theta) = \sec^2\theta\, d\theta$, tenemos

$$\dot{r} = 100(\sec\theta\tan\theta)\dot{\theta}$$

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= 100(\sec\theta\tan\theta)\dot{\theta}(\tan\theta)\dot{\theta} + 100\sec\theta(\sec^2\theta)\dot{\theta}(\dot{\theta})\\ &\quad + 100\sec\theta\tan\theta(\ddot{\theta})\\ &= 100\sec\theta\tan^2\theta\,(\dot{\theta})^2 + 100\sec^3\theta\,(\dot{\theta})^2 + 100(\sec\theta\tan\theta)\ddot{\theta}\end{aligned}$$



(b)

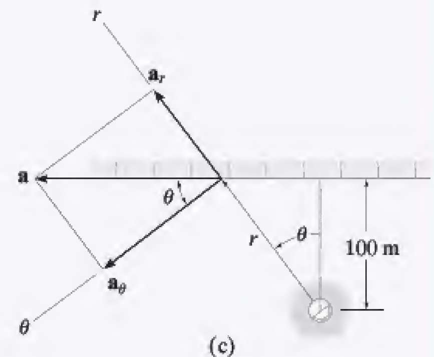
Como $\dot{\theta} = 4$ rad/s = constante, entonces $\ddot{\theta} = 0$ y las ecuaciones anteriores, cuando $\theta = 45°$, se convierten en

$$\begin{aligned}r &= 100\sec 45° = 141.4\\ \dot{r} &= 400\sec 45°\tan 45° = 565.7\\ \ddot{r} &= 1600\,(\sec 45°\tan^2 45° + \sec^3 45°) = 6788.2\end{aligned}$$

Como se muestra en la figura 12-34*b*,

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta\\ &= 565.7\mathbf{u}_r + 141.4(4)\mathbf{u}_\theta\\ &= \{565.7\mathbf{u}_r + 565.7\mathbf{u}_\theta\}\text{ m/s}\\ v &= \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{(565.7)^2 + (565.7)^2}\\ &= 800\text{ m/s}\end{aligned}$$

Resp.



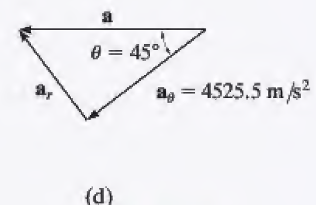
(c)

Como se muestra en la figura 12-34*c*,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta\\ &= [6788.2 - 141.4(4)^2]\mathbf{u}_r + [141.4(0) + 2(565.7)4]\mathbf{u}_\theta\\ &= \{4525.5\mathbf{u}_r + 4525.5\mathbf{u}_\theta\}\text{ m/s}^2\\ a &= \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{(4525.5)^2 + (4525.5)^2}\\ &= 6400\text{ m/s}^2\end{aligned}$$

Resp.

NOTA: también es posible determinar a sin tener que calcular $\ddot{r}$ (o a_r). Como se muestra en la figura 12-34*d*, como $a_\theta = 4525.5$ m/s^2, entonces mediante resolución vectorial, $a = 4525.5/\cos 45° = 6400$ m/s^2.

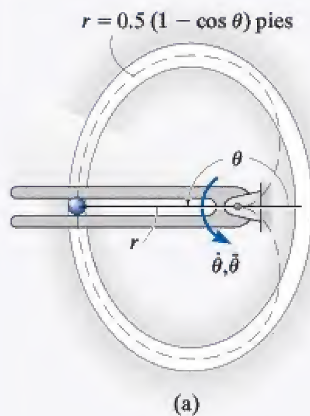


(d)

Fig. 12-34

12

EJEMPLO 12.20



(a)

Debido a la rotación de la barra ahorquillada, la bola en la figura 12-35*a* se mueve alrededor de una trayectoria ranurada, una parte de la cual tiene la forma de un cardioide, $r = 0.5(1 - \cos\theta)$ pies, donde θ está en radianes. Si la velocidad de la bola es $v = 4$ pies/s y su aceleración es $a = 30$ pies/s^2 en el instante $\theta = 180°$, determine la velocidad angular $\dot{\theta}$ y la aceleración angular $\ddot{\theta}$ de la horquilla.

SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. Esta trayectoria es muy rara, y matemáticamente se expresa mejor por medio de coordenadas polares, como se hace aquí, en lugar de coordenadas rectangulares. También, como $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ deben determinarse, entonces las coordenadas r, θ no son una opción obvia.

Velocidad y aceleración. Las derivadas con respecto al tiempo de r y θ se determinan con la regla de la cadena.

$$r = 0.5(1 - \cos\theta)$$
$$\dot{r} = 0.5(\operatorname{sen}\theta)\dot{\theta}$$
$$\ddot{r} = 0.5(\cos\theta)\dot{\theta}(\dot{\theta}) + 0.5(\operatorname{sen}\theta)\ddot{\theta}$$

Si evaluamos estos resultados cuando $\theta = 180°$, tenemos

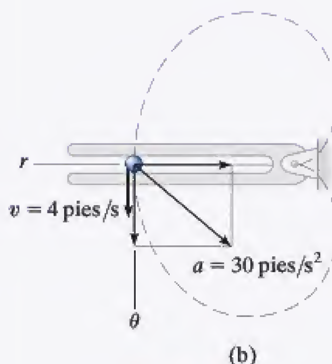
$$r = 1 \text{ pie} \qquad \dot{r} = 0 \qquad \ddot{r} = -0.5\dot{\theta}^2$$

Como $v = 4$ pies/s, al utilizar la ecuación 12-26 para determinar $\dot{\theta}$ se obtiene

$$v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}$$
$$4 = \sqrt{(0)^2 + (1\dot{\theta})^2}$$
$$\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Del mismo modo, $\ddot{\theta}$ se determina con la ecuación 12-30.

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2}$$
$$30 = \sqrt{[-0.5(4)^2 - 1(4)^2]^2 + [1\ddot{\theta} + 2(0)(4)]^2}$$
$$(30)^2 = (-24)^2 + \ddot{\theta}^2$$
$$\ddot{\theta} = 18 \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

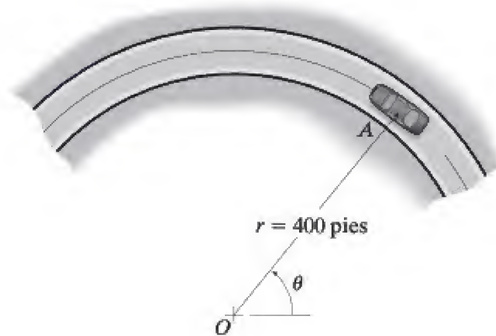
Fig. 12-35

En la figura 12-35*b* se muestran los vectores **a** y **v**.

NOTA: en esta ubicación, los ejes θ y t (tangenciales) coinciden. El eje $+n$ (normal) está dirigido hacia la derecha, opuesto a $+r$.

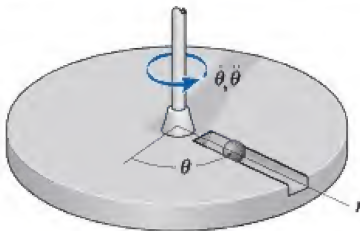
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F12-33. La rapidez del automóvil es de 55 pies/s. Determine la velocidad angular $\dot{\theta}$ de la línea radial OA en este instante.



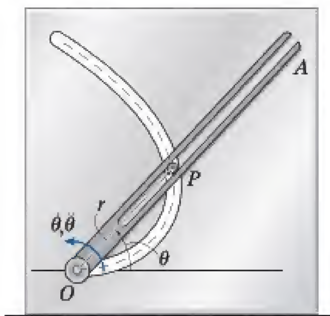
F12-33

F12-34. La plataforma gira en torno al eje vertical de modo que en cualquier instante su posición angular es $\theta = (4t^{3/2})$ rad, donde t está en segundos. Una bola rueda hacia fuera a lo largo de la ranura radial de modo que su posición es $r = (0.1t^3)$ m, donde t está en segundos. Determine las magnitudes de la velocidad y aceleración de la bola cuando $t = 1.5$ s.



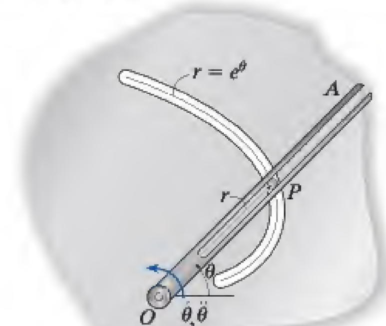
F12-34

F12-35. La espiga P es propulsada por el eslabón ahorquillado OA a lo largo de la trayectoria curva descrita por $r = (2\theta)$ pies. En el instante $\theta = \pi/4$ rad, la velocidad y aceleración angulares del eslabón son $\dot{\theta} = 3$ rad/s y $\ddot{\theta} = 1$ rad/s^2. Determine la magnitud de la aceleración de la espiga en este instante.



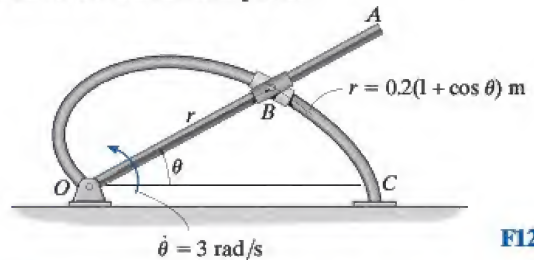
F12-35

F12-36. La espiga P es propulsada por el eslabón ahorquillado OA a lo largo de la trayectoria descrita por $r = e^{\theta}$. Cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad, la velocidad y aceleración angulares del eslabón $\dot{\theta} = 2$ rad/s y $\ddot{\theta} = 4$ rad/s^2. Determine las componentes radial y transversal de la aceleración de la espiga en este instante.



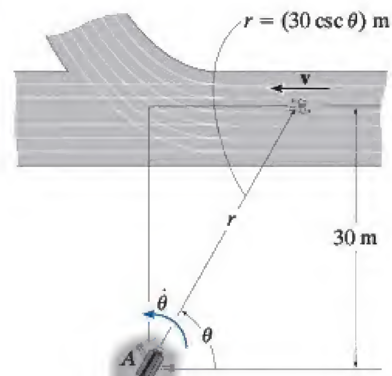
F12-36

F12-37. Los collares están conectados por pasadores en B y pueden moverse libremente a lo largo de la barra OA y la guía curva OC tiene la forma de un cardioide, $r = [0.2(1 + \cos\theta)]$ m. Cuando $\theta = 30°$, la velocidad angular de OA es $\dot{\theta} = 3$ rad/s. Determine las magnitudes de la velocidad de los collares en este punto.



F12-37

F12-38. En el instante $\theta = 45°$, el atleta está corriendo a una rapidez constante de 2 m/s. Determine la velocidad angular a la cual la cámara debe virar para seguir el movimiento.



F12-38

12

PROBLEMAS

***12-156.** Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria circular de 300 mm de radio. Si su velocidad angular es $\dot{\theta} = (2t^2)$ rad/s, donde t está en segundos, determine la magnitud de la aceleración de la partícula cuando $t = 2$ s.

•12-157. Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria circular de 300 mm de radio. Si su velocidad angular es $\dot{\theta} = (3t^2)$ rad/s donde t está en segundos, determine las magnitudes de la velocidad y aceleración de la partícula cuando $\theta = 45°$. La partícula arranca del reposo cuando $\theta = 0°$.

12-158. Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria circular de 5 pies de radio. Si su posición es $\theta = (e^{0.5t})$ rad, donde t está en segundos. Determine la magnitud de la aceleración de la partícula cuando $\theta = 90°$.

12-159. Las ecuaciones $r = (t^3 + 4t - 4)$ m y $\theta = (t^{3/2})$ rad, donde t está en segundos, describen la posición de una partícula. Determine las magnitudes de la velocidad y aceleración en el instante $t = 2$ s.

***12-160.** Las ecuaciones $r = (300e^{-0.5t})$ mm y $\theta = (0.3t^2)$ rad, donde t está en segundos, describen la posición de una partícula. Determine las magnitudes de la velocidad y aceleración de la partícula en el instante $t = 1.5$ s.

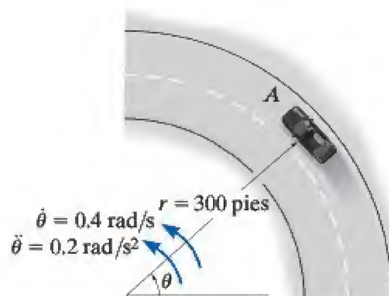
•12-161. Un avión vuela en línea recta a 200 mi/h y una aceleración de 3 mi/h^2. Si el diámetro de la hélice es de 6 pies y rota a una velocidad angular de 120 rad/s, determine las magnitudes de la velocidad y aceleración de una partícula situada en la punta de la hélice.

12-162. Una partícula se desplaza a lo largo de una trayectoria circular de 4 pulg de radio de modo que su posición en función del tiempo está dada por $\theta = (\cos 2t)$ rad, donde t está en segundos. Determine la magnitud de su aceleración cuando $\theta = 30°$.

12-163. Una partícula se desplaza alrededor de un limaçon definido por la ecuación $r = b - a \cos \theta$, donde a y b son constantes. Determine las componentes radial y transversal de la velocidad y aceleración de la partícula en función de θ y sus derivadas con respecto al tiempo.

***12-164.** Una partícula viaja alrededor de un litus, definido por la ecuación $r^2\theta = a^2$, donde a es una constante. Determine los componentes radial y transversal de la velocidad y aceleración de la partícula en función de θ y sus derivadas con respecto al tiempo.

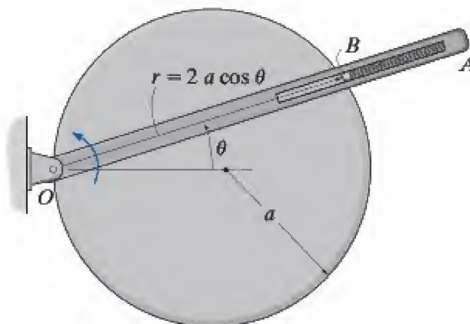
•12-165. Un automóvil viaja a lo largo de una curva circular de radio $r = 300$ pies. En el instante mostrado, su velocidad angular de rotación es $\dot{\theta} = 0.4$ rad/s, la cual se incrementa a razón de $\ddot{\theta} = 0.2$ rad/s^2. Determine las magnitudes de la velocidad y aceleración del automóvil en este instante.



Prob. 12-165

12-166. El brazo ranurado OA gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de O a una velocidad angular constante de $\dot{\theta}$. El movimiento del pasador B está limitado a la superficie circular fija y a lo largo de la ranura en OA. Determine las magnitudes de la velocidad y aceleración del pasador B como una función de θ.

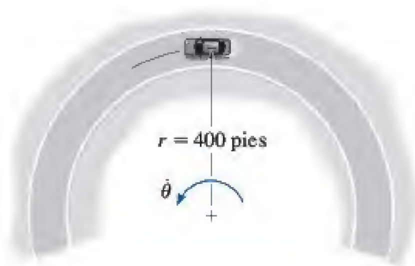
12-167. El brazo ranurado OA gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de O de modo que cuando $\theta = \pi/4$, el brazo OA gira con una velocidad angular de $\dot{\theta}$ y una aceleración angular de $\ddot{\theta}$. Determine las magnitudes de la velocidad y aceleración del pasador B en este instante. El movimiento del pasador B está limitado a la superficie circular fija y a lo largo de la ranura en OA.



Probs. 12-166/167

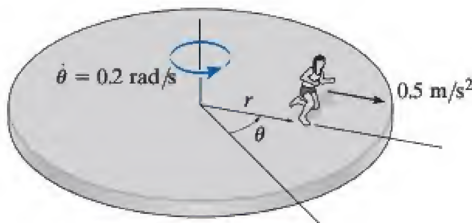
***12-168.** El automóvil viaja a lo largo de una curva circular de radio $r = 400$ pies. En el instante que se muestra, su velocidad angular de rotación es $\dot{\theta} = 0.025$ rad/s, la cual se reduce a razón de $\ddot{\theta} = -0.008$ rad/s^2. Determine los componentes radial y transversal de la velocidad y aceleración del automóvil en este instante y trácelos en la curva.

•**12-169.** El automóvil viaja a lo largo de una curva circular de radio $r = 400$ pies a una velocidad constante de $v = 30$ pies/s. Determine la velocidad angular de rotación $\dot{\theta}$ de la línea radial r y la magnitud de la aceleración del automóvil.



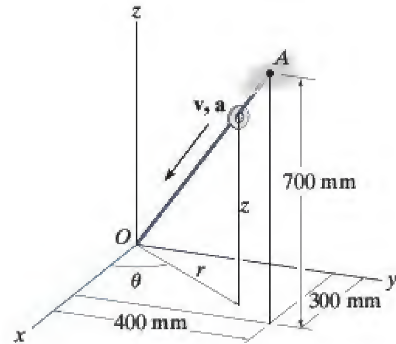
Probs. 12-168/169

12-170. Al arrancar del reposo, el muchacho corre hacia fuera en la dirección radial del centro de la plataforma con una aceleración constante de 0.5 m/s^2. Si la plataforma gira a una velocidad constante $\dot{\theta} = 0.2$ rad/s, determine los componentes radial y transversal de la velocidad y aceleración del muchacho cuando $t = 3$ s. Ignore su estatura.



Prob. 12-170

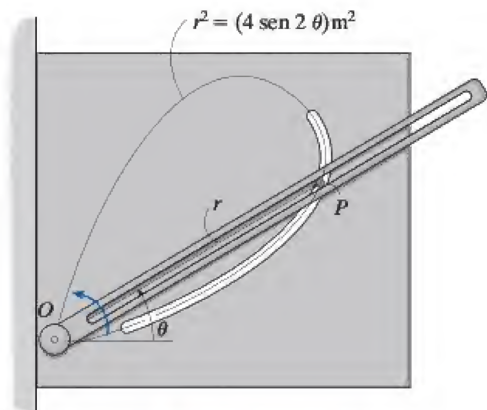
12-171. La pequeña rondana se desliza hacia abajo de la cuerda OA. Cuando está a la mitad, su velocidad es de 200 mm/s y su aceleración es 10 mm/s^2. Exprese la velocidad y aceleración de la rondana en este punto en función de sus componentes cilíndricos.



Prob. 12-171

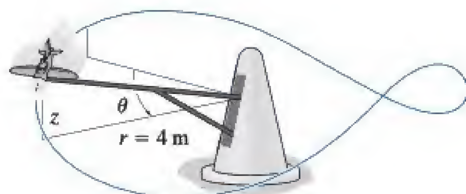
***12-172.** Si el brazo OA gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj con una velocidad angular de $\dot{\theta} = 2$ rad/s, determine las magnitudes de la velocidad y aceleración de la espiga P cuando $\theta = 30°$. La espiga se mueve en la ranura fija definida por la lemniscata y a lo largo de la ranura del brazo.

•**12-173.** La clavija se mueve en la ranura curva definida por la lemniscata y a través de la ranura en el brazo. Cuando $\theta = 30°$, la velocidad angular es $\dot{\theta} = 2$ rad/s y la aceleración angular es $\ddot{\theta} = 1.5$ rad/s^2. Determine las magnitudes de la velocidad y aceleración de la clavija P en este instante.



Probs. 12-172/173

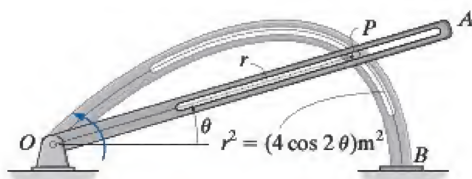
12-174. El avión del juego mecánico se mueve a lo largo de una trayectoria definida por las ecuaciones $r = 4$ m, $\theta = (0.2t)$ rad y $z = (0.5 \cos \theta)$ m, donde t está en segundos. Determine los componentes cilíndricos de la velocidad y aceleración del avión cuando $t = 6$ s.



Prob. 12-174

12-175. El movimiento de la clavija P está limitado por la ranura en forma de lemniscata en OB y por el brazo ranurado OA. Si OA rota en sentido contrario al de las manecillas del reloj con una velocidad angular constante de $\dot{\theta} = 3$ rad/s, determine las magnitudes de la velocidad y aceleración de la clavija P cuando $\theta = 30°$.

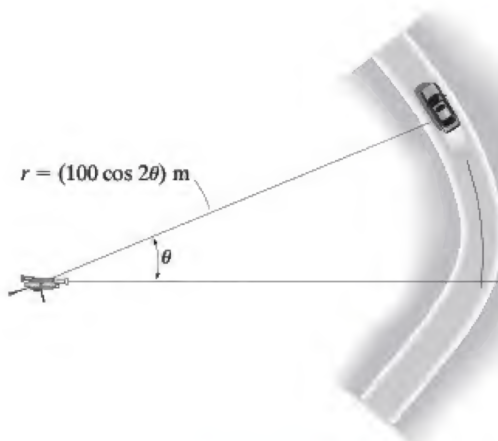
***12-176.** El movimiento de la clavija P está limitado por la ranura en forma de lemniscata en OB y por el brazo ranurado OA. Si OA gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj con una velocidad angular constante de $\dot{\theta} = (3t^{3/2})$ rad/s, donde t está en segundos, determine las magnitudes de la velocidad y aceleración de la clavija P cuando $\theta = 30°$. Cuando $t = 0$, $\theta = 0°$.



Probs. 12-175/176

•**12-177.** El conductor del automóvil mantiene una rapidez constante de 40 m/s. Determine la velocidad angular de la cámara que sigue al automóvil cuando $\theta = 15°$.

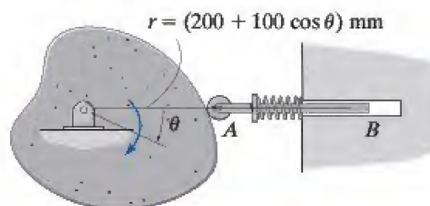
12-178. Cuando $\theta = 15°$, la rapidez del automóvil es de 50 m/s la cual se incrementa a 6 m/s^2. Determine la velocidad angular de la cámara que sigue al automóvil en este instante.



Probs. 12-177/178

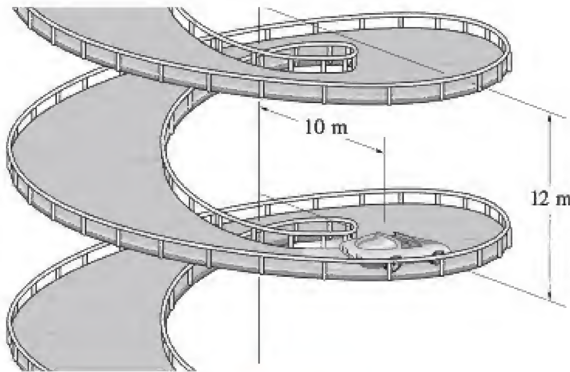
12-179. Si la leva gira en sentido horario a una velocidad angular constante de $\dot{\theta} = 5$ rad/s, determine las magnitudes de la velocidad y aceleración del seguidor AB en el instante $\theta = 30°$. La superficie de la leva tiene la forma de limaçon definida por $r = (200 + 100 \cos \theta)$ mm.

***12-180.** En el instante $\theta = 30°$, la leva gira en sentido de las manecillas del reloj con una velocidad angular de $\dot{\theta} = 5$ rad/s y una aceleración angular de $\ddot{\theta} = 6$ rad/s^2. Determine las magnitudes de la velocidad y aceleración del seguidor AB en este instante. La superficie de la leva tiene la forma de un limaçon, definida por $r = (200 + 100 \cos \theta)$ mm.



Probs. 12-179/180

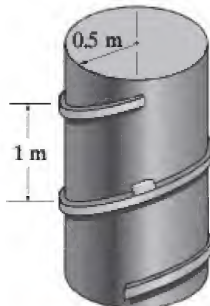
•**12-181.** El automóvil desciende de un estacionamiento por una rampa espiral cilíndrica a una rapidez constante de $v = 1.5$ m/s. Si la rampa desciende una distancia de 12 m por cada revolución completa, $\theta = 2\pi$ rad, determine la magnitud de la aceleración del automóvil a medida que desciende por la rampa, $r = 10$ m. *Sugerencia:* para una parte de la solución, observe que la tangente a la rampa en cualquier punto forma un ángulo $\phi = \tan^{-1}(12/[2\pi(10)])$ $= 10.81°$ con la horizontal. Utilícelo para determinar las componentes de velocidad v_θ y v_z, que a su vez se utilizan para determinar $\dot{\theta}$ y $\dot{z}$.



Prob. 12-181

12-182. La caja desciende por una rampa helicoidal a una rapidez constante de $v = 2$ m/s. Determine la magnitud de su aceleración. La rampa desciende una distancia vertical de 1 m por cada revolución completa. El radio medio de la rampa es $r = 0.5$ m.

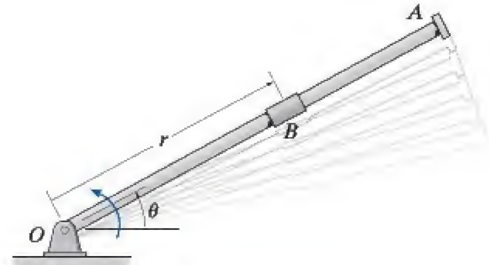
12-183. La caja desciende por una rampa helicoidal definida por $r = 0.5$ m, $\theta = (0.5t^3)$ rad, y $z = (2 - 0.2t^2)$ m, donde t está en segundos. Determine las magnitudes de la velocidad y aceleración de la caja en el instante $\theta = 2\pi$ rad.



Probs. 12-182/183

*__12-184.__ La barra OA gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj a una velocidad angular constante de $\dot{\theta} = 6$ rad/s. Mediante conexiones mecánicas el collarín B se mueve a lo largo de la barra a una rapidez de $\dot{r} = (4t^2)$ m/s, donde t está en segundos. Si $r = 0$ cuando $t = 0$, determine las magnitudes de la velocidad y aceleración del collarín cuando $t = 0.75$ s.

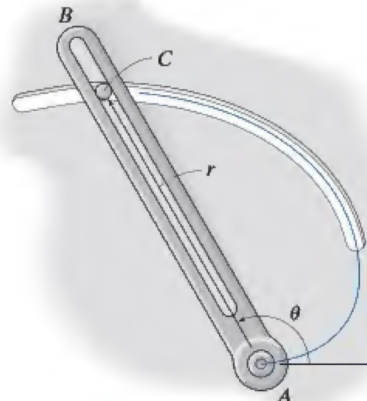
•**12-185.** La barra OA gira en sentido antihorario con una velocidad angular de $\dot{\theta} = (2t^2)$ rad/s. Mediante conexiones mecánicas el collarín B se mueve a lo largo de la barra con una rapidez de $\dot{r} = (4t^2)$ m/s. Si $\theta = 0$ y $r = 0$ cuando $t = 0$, determine las magnitudes de la velocidad y aceleración del collarín cuando $\theta = 60°$.



Probs. 12-184/185

12-186. El brazo ranurado AB mueve el pasador C a través de la ranura espiral descrita por la ecuación $r = a\theta$. Si la velocidad angular se mantiene constante a $\dot{\theta}$, determine los componentes radial y transversal de la velocidad y aceleración del pasador.

12-187. El brazo ranurado AB mueve el pasador C a través de la ranura espiral descrita por la ecuación $r = (1.5\,\theta)$ pies, donde θ está en radianes. Si el brazo comienza a moverse del reposo cuando $\theta = 60°$ y es propulsado a una velocidad angular de $\dot{\theta} = (4t)$ rad/s, donde t está en segundos, determine los componentes radial y transversal de la velocidad y aceleración del pasador C cuando $t = 1$ s.

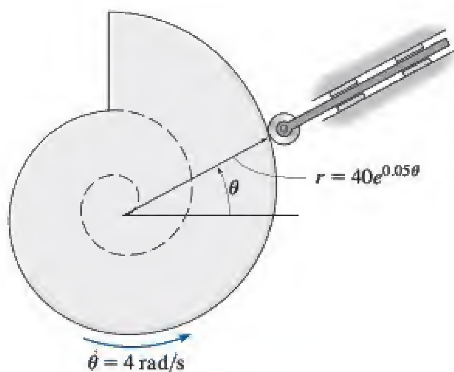


Probs. 12-186/187

12

***12-188.** La superficie parcial de la leva es la de una espiral logarítmica $r = (40e^{0.05\theta})$ mm, donde θ está en radianes. Si la leva gira a una velocidad angular constante de $\dot{\theta} = 4$ rad/s, determine las magnitudes de la velocidad y aceleración del punto en la leva que está en contacto con el seguidor en el instante $\theta = 30°$.

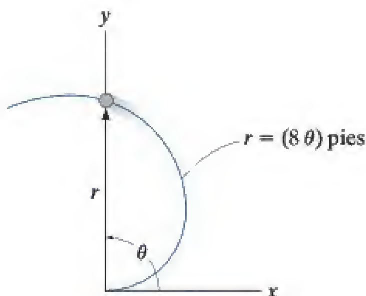
•12-189. Resuelva el problema 12-188, si la aceleración angular de la leva es $\ddot{\theta} = 2$ rad/s^2 cuando su velocidad angular es $\dot{\theta} = 4$ rad/s con $\theta = 30°$.



Probs. 12-188/189

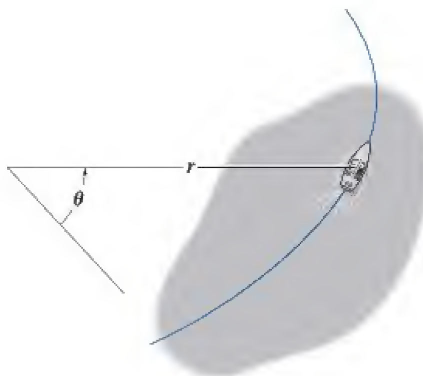
12-190. Una partícula se mueve a lo largo de una espiral arquimedeana de $r = (8\theta)$ pies, donde θ está en radianes. Si $\dot{\theta} = 4$ rad/s (constante), determine los componentes radial y transversal de la velocidad y aceleración de la partícula en el instante $\theta = \pi/2$ rad. Trace la curva y muestre los componentes en la curva.

12-191. Resuelva el problema 12-190 si la aceleración angular de la partícula es $\ddot{\theta} = 5$ rad/s^2 cuando $\dot{\theta} = 4$ rad/s con $\theta = \pi/2$ rad.



Probs. 12-190/191

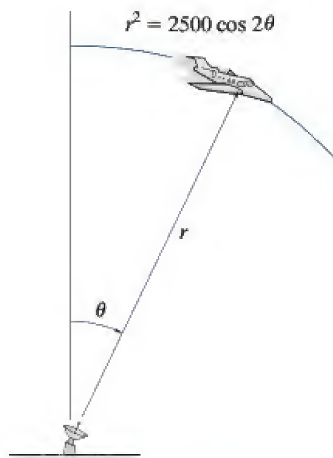
***12-192.** El bote navega a lo largo de una trayectoria definida por $r^2 = [10(10^3)\cos 2\theta]$ pies^2, donde θ está en radianes. Si $\theta = (0.4t^2)$ rad, donde t está en segundos, determine los componentes radial y transversal de la velocidad y aceleración del bote en el instante $t = 1$ s.



Prob. 12-192

•12-193. Un automóvil viaja por una carretera, la que en una corta distancia está definida por $r = (200/\theta)$ pies, donde θ está en radianes. Si mantiene una velocidad constante de $v = 35$ pies/s, determine los componentes radial y transversal de su velocidad cuando $\theta = \pi/3$ rad.

12-194. Durante un corto tiempo el avión de reacción vuela en una trayectoria en forma de lemniscata, $r^2 = (2500\cos 2\theta)$ km^2. En el instante $\theta = 30°$, el dispositivo rastreador del radar gira a $\dot{\theta} = 5(10^{-3})$ rad/s con $\ddot{\theta} = 2(10^{-3})$ rad/s^2. Determine los componentes radial y transversal de la velocidad y aceleración del avión en este instante.



Prob. 12-194

12.9 Análisis del movimiento dependiente absoluto de dos partículas

En algunos tipos de problemas el movimiento de una partícula *dependerá* del movimiento correspondiente de otra partícula. Esta dependencia ocurre por lo común si las partículas, en este caso representadas por bloques, están interconectadas por medio de cuerdas no extensibles, las cuales están enrolladas alrededor de poleas. Por ejemplo, el movimiento de un bloque A hacia abajo del plano inclinado en la figura 12-36 provocará un movimiento correspondiente del bloque B hacia arriba del otro plano inclinado. Podemos demostrar esto matemáticamente si primero especificamos la ubicación de los bloques por medio de *coordenadas de posición* s_A y s_B. Observe que cada uno de los ejes coordenados (1) está medido a partir de un punto *fijo* (O) o de una línea de referencia *fija*; (2) está medido a lo largo de cada plano inclinado *en la dirección del movimiento* de cada bloque y (3) tiene un sentido positivo de C a A y de D a B. Si la longitud total de la cuerda es l_T, las dos coordenadas de posición están relacionadas por la ecuación

$$s_A + l_{CD} + s_B = l_T$$

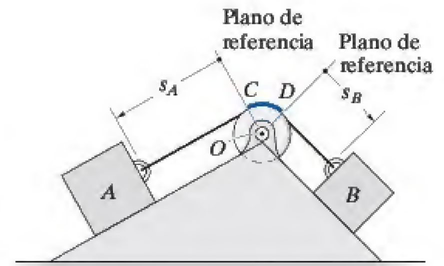


Fig. 12-36

En este caso, l_{CD} es la longitud de la cuerda que pasa sobre el arco CD. Si tomamos la derivada con respecto al tiempo de esta expresión, y tenemos en cuenta que l_{CD} y l_T *permanecen constantes*, en tanto que s_A y s_B miden los segmentos de la cuerda que cambian de longitud, tenemos

$$\frac{ds_A}{dt} + \frac{ds_B}{dt} = 0 \qquad \text{o} \qquad v_B = -v_A$$

El signo negativo indica que cuando el bloque A tiene una velocidad dirigida hacia abajo, es decir, en la dirección de s_A positiva, provoca una velocidad hacia arriba correspondiente del bloque B, es decir, B se mueve en la dirección s_B negativa.

Del mismo modo, la diferenciación con respecto al tiempo de las velocidades tiene como resultado la relación entre las aceleraciones, es decir,

$$a_B = -a_A$$

En la figura 12-37*a* se muestra un ejemplo más complicado. En este caso, s_A especifica la posición del bloque A y s_B define la posición del *extremo* de la cuerda del cual el bloque B está suspendido. Como previamente, elegimos coordenadas de posición (1) con su origen en puntos fijos o líneas de referencia (2) medidas en la dirección del movimiento de cada bloque y (3) positivas a la derecha para s_A y positivas hacia abajo para s_B. Durante el movimiento, la longitud de los segmentos de color azul de la cuerda en la figura 12-37*a permanece constante*. Si l representa la longitud total de la cuerda menos estos segmentos, entonces las coordenadas de posición pueden relacionarse por medio de la ecuación

$$2s_B + h + s_A = l$$

Como l y h permanecen constantes durante el movimiento, las dos derivadas con respecto al tiempo resultan

$$2v_B = -v_A \qquad 2a_B = -a_A$$

Por consiguiente, cuando B se mueve hacia abajo ($+s_B$), A lo hace a la izquierda ($-s_A$) con dos veces el movimiento.

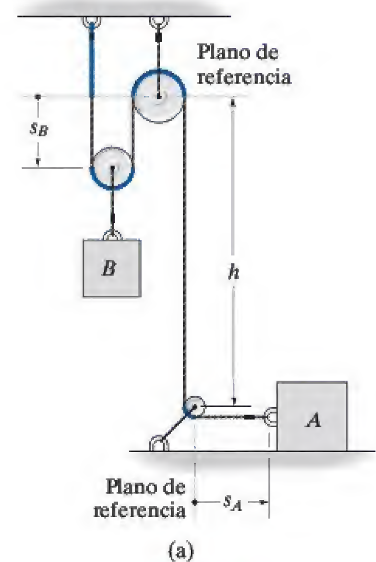


Fig. 12-37

12

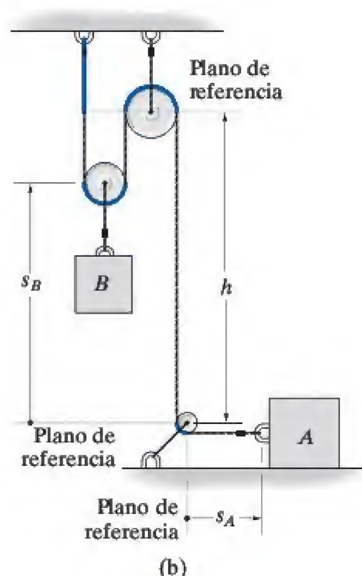


Fig. 12-37 (cont.)

Este ejemplo también puede resolverse definiendo la posición del bloque B con respecto al centro de la polea inferior (un punto fijo), figura 12-37*b*. En este caso

$$2(h - s_B) + h + s_A = l$$

La diferenciación con respecto al tiempo resulta

$$2v_B = v_A \qquad 2a_B = a_A$$

En este caso los signos son los mismos. ¿Por qué?

Procedimiento para el análisis

El método anterior de relacionar el movimiento dependiente de una partícula con el de otra puede realizarse con escalares algebraicos o coordenadas de posición siempre que cada partícula se mueva en línea recta. Cuando éste es el caso, sólo las magnitudes de la velocidad y aceleración de las partículas cambiarán, pero no su línea de dirección.

Ecuación de coordenadas de posición.

- Establezca cada coordenada de posición con un origen localizado en un punto *fijo* o plano de referencia.
- *No es necesario* que el *origen* sea el *mismo* para cada una de las coordenadas; sin embargo, es *importante* que cada eje de coordenadas seleccionado esté dirigido a lo largo de la *trayectoria del movimiento* de la partícula.
- Mediante geometría o trigonometría, relacione las coordenadas de posición con la longitud total de la cuerda, l_T, o con la porción de la cuerda, l, la cual *excluye* los segmentos que no cambian de longitud a medida que las partículas se muevan, como los segmentos de arco enrollados sobre las poleas.
- Si un problema implica un *sistema* de dos o más cuerdas enrolladas alrededor de las poleas, entonces la posición de un punto en una cuerda debe ser relacionada con la posición de un punto en otra cuerda por medio del procedimiento anterior. Se escriben ecuaciones distintas para una longitud fija de cada cuerda del sistema y las posiciones de las dos partículas se relacionan entonces mediante estas ecuaciones (vea los ejemplos 12.22 y 12.23).

Derivadas con respecto al tiempo.

- Dos derivadas con respecto al tiempo sucesivas de las ecuaciones de coordenadas de posición ofrecen como resultado las ecuaciones de velocidad y aceleración requeridas, las cuales relacionan los movimientos de las partículas.
- Los signos de los términos en estas ecuaciones serán consistentes con los que especifican el sentido positivo y negativo de las coordenadas de posición.



El movimiento del bloque en esta torre de perforación petrolera depende del movimiento del cable conectado al malacate que lo opera. Es importante ser capaz de relacionar estos movimientos para determinar los requerimientos de potencia del malacate y la fuerza en el cable, ocasionada por cualquier movimiento acelerado.

EJEMPLO 12.21

Determine la rapidez del bloque A que se muestra en la figura 12-38 si el bloque B se mueve hacia arriba a una rapidez de 6 pies/s.

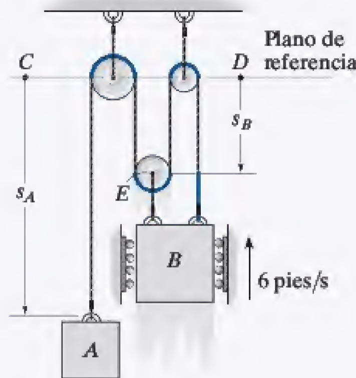


Fig. 12-38

SOLUCIÓN

Ecuación de coordenadas de posición. Hay *una cuerda* en este sistema que incluye segmentos que cambian de longitud. Se utilizarán coordenadas de posición s_A y s_B puesto que cada una se mide con respecto a un punto fijo (C o D) y se extiende a lo largo de la *trayectoria del movimiento* del bloque. En particular, s_B está dirigida al punto E puesto que el movimiento de B y E es el *mismo*.

Los segmentos de color azul de la cuerda en la figura 12-38 permanecen a una longitud constante y no tienen que ser considerados a medida que los bloques se mueven. La longitud de la cuerda restante, l, también es constante y está relacionada con las coordenadas de posición cambiantes s_A y s_B por la ecuación

$$s_A + 3s_B = l$$

Derivadas con respecto al tiempo. Al realizar la derivada con respecto al tiempo se tiene

$$v_A + 3v_B = 0$$

de modo que cuando $v_B = -6$ pies/s (hacia arriba),

$$v_A = 18 \text{ pies/s}\downarrow \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

12

EJEMPLO 12.22

Determine la rapidez de A en la figura 12-39 si B tiene una rapidez hacia arriba de 6 pies/s.

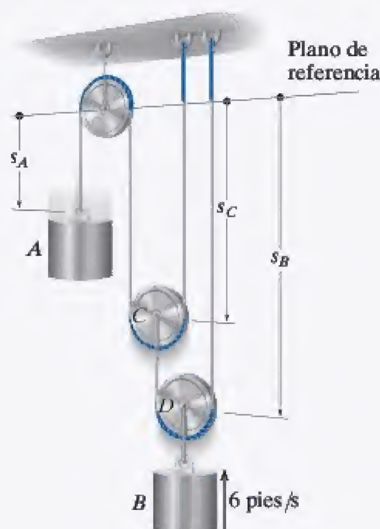


Fig. 12-39

SOLUCIÓN

Ecuación de coordenadas de posición. Como se muestra, s_A y s_B definen las posiciones de los bloques A y B. Como el sistema incluye *dos cuerdas* con segmentos que cambian de longitud, será necesario utilizar una tercera coordenada, s_C, para relacionar s_A con s_B. En otros términos, la longitud de una de las cuerdas puede expresarse en función de s_A y s_C y la longitud de la otra puede expresarse en función de s_B y s_C.

Los segmentos de color azul de las cuerdas en la figura 12-39 no tienen que ser considerados en el análisis. ¿Por qué? Para las longitudes de cuerdas restantes, por ejemplo l_1 y l_2, tenemos

$$s_A + 2s_C = l_1 \qquad s_B + (s_B - s_C) = l_2$$

Derivada con respecto al tiempo. Al tomar la derivada con respecto al tiempo de estas ecuaciones se obtiene

$$v_A + 2v_C = 0 \qquad 2v_B - v_C = 0$$

Al eliminar v_C se produce la relación entre el movimiento de cada cilindro.

$$v_A + 4v_B = 0$$

de modo que cuando $v_B = -6$ pies/s (hacia arriba)

$$v_A = +24 \text{ pies/s} = 24 \text{ pies/s} \downarrow$$ ***Resp.***

EJEMPLO 12.23

Determine la rapidez del bloque B en la figura 12-40 si el extremo de la cuerda en A se jala hacia abajo con una rapidez de 2 m/s.

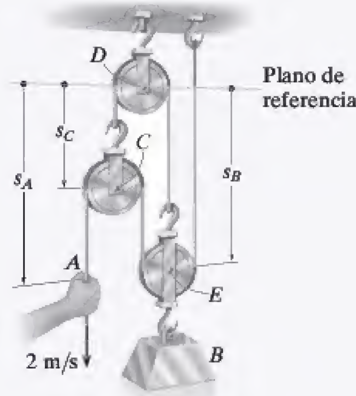


Fig. 12-40

SOLUCIÓN

Ecuación de coordenadas de posición. La coordenada s_A define la posición del punto A y s_B especifica la posición del bloque B puesto que E en la polea tendrá el *mismo movimiento* que el bloque. Ambas coordenadas se miden con respecto a un plano de referencia horizontal que pasa por el pasador *fijo* en la polea D. Como el sistema se compone de *dos* cuerdas, las coordenadas s_A y s_B no se pueden relacionar de forma directa. En cambio, si se establece una tercera coordenada de posición, s_C, ahora podemos expresar la longitud de una de las cuerdas en función de s_B y s_C y la longitud de la otra en función de s_A, s_B y s_C.

Si se excluyen los segmentos de color azul de las cuerdas en la figura 12-40, las longitudes de cuerda constantes restantes l_1 y l_2 (junto con las dimensiones del gancho y el eslabón) se expresan como

$$s_C + s_B = l_1$$
$$(s_A - s_C) + (s_B - s_C) + s_B = l_2$$

Derivada con respecto al tiempo. La derivada con respecto al tiempo de cada ecuación resulta

$$v_C + v_B = 0$$
$$v_A - 2v_C + 2v_B = 0$$

Al eliminar v_C, obtenemos

$$v_A + 4v_B = 0$$

de modo que cuando $v_A = 2$ m/s (hacia abajo),

$$v_B = -0.5 \text{ m/s} = 0.5 \text{ m/s} \uparrow$$ ***Resp.***

12

EJEMPLO 12.24

Un hombre parado en A iza una caja fuerte S como se muestra en la figura 12-41 al caminar hacia la derecha con una velocidad constante $v_A = 0.5$ m/s. Determine la velocidad y aceleración de la caja fuerte cuando alcance la altura de 10 m. La cuerda de 30 m de largo pasa sobre una pequeña polea en D.

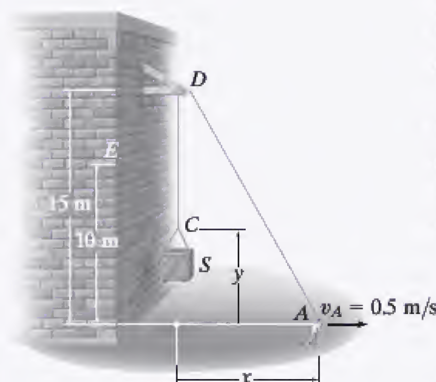


Fig. 12-41

SOLUCIÓN

Ecuación de coordenadas de posición. Este problema difiere de los ejemplos anteriores puesto que el segmento de cuerda DA cambia *tanto de dirección como de magnitud*. Sin embargo, los extremos de la cuerda que definen las posiciones de S y A, se especifican por medio de las coordenadas x y y puesto que están medidas con respecto a un punto fijo y *dirigidas a lo largo de las trayectorias del movimiento* de los extremos de la cuerda.

Las coordenadas x y y pueden relacionarse puesto que la cuerda tiene una longitud fija $l = 30$ m, la cual en todo momento es igual a la longitud del segmento DA más CD. Mediante el teorema de Pitágoras para determinar l_{DA}, tenemos $l_{DA} = \sqrt{(15)^2 + x^2}$; también, $l_{CD} = 15 - y$. Por consiguiente,

$$l = l_{DA} + l_{CD}$$

$$30 = \sqrt{(15)^2 + x^2} + (15 - y)$$

$$y = \sqrt{225 + x^2} - 15 \qquad (1)$$

Derivadas con respecto al tiempo. Con la derivada con respecto al tiempo y la regla de la cadena (vea el apéndice C), donde $v_S = dy/dt$ y $v_A = dx/dt$, se obtiene

$$v_S = \frac{dy}{dt} = \left[\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{225 + x^2}}\right]\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{225 + x^2}}v_A \qquad (2)$$

Cuando $y = 10$ m, x se determina con la ecuación 1, es decir, $x = 20$ m. Por consiguiente, a partir de la ecuación 2 con $v_A = 0.5$ m/s,

$$v_S = \frac{20}{\sqrt{225 + (20)^2}}(0.5) = 0.4\text{m/s} = 400\,\text{mm/s} \uparrow \qquad \textit{Resp.}$$

La aceleración se determina al tomar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 2. Como v_A es constante, entonces $a_A = dv_A/dt = 0$, y tenemos

$$a_S = \frac{d^2y}{dt^2} = \left[\frac{-x(dx/dt)}{(225 + x^2)^{3/2}}\right]xv_A + \left[\frac{1}{\sqrt{225 + x^2}}\right]\left(\frac{dx}{dt}\right)v_A + \left[\frac{1}{\sqrt{225 + x^2}}\right]x\frac{dv_A}{dt} = \frac{225v_A^2}{(225 + x^2)^{3/2}}$$

Cuando $x = 20$ m, con $v_A = 0.5$ m/s, la aceleración es

$$a_S = \frac{225(0.5\text{ m/s})^2}{[225 + (20\text{ m})^2]^{3/2}} = 0.00360\text{ m/s}^2 = 3.60\text{ mm/s}^2 \uparrow \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: la velocidad constante en A hace que el otro extremo C de la cuerda se acelere, puesto que v_A cambia la dirección del segmento DA y también su longitud.

12.10 Movimiento relativo de dos partículas al utilizar ejes trasladantes

A lo largo de todo este capítulo el movimiento absoluto de una partícula se ha determinado por medio de un marco de referencia fijo. Existen muchos casos, sin embargo, en los que la trayectoria del movimiento de una partícula se complica, de modo que puede ser más fácil analizar el movimiento en partes por medio de dos o más marcos de referencia. Por ejemplo, el movimiento de una partícula localizada en la punta de la hélice de un avión, mientras éste está en vuelo, se describe mejor si primero se observa el movimiento del avión desde una referencia fija y luego se superpone (vectorialmente) el movimiento circular de la partícula medido con respecto a una referencia fija al avión.

En esta sección se considerarán *marcos de referencia trasladantes* en el análisis. El análisis de movimiento relativo de partículas por medio de marcos rotatorios de referencia se tratará en las secciones 16.8 y 20.4, puesto que dicho análisis depende del conocimiento previo de la cinemática de segmentos de líneas.

Posición. Considere las partículas A y B, las cuales se desplazan a lo largo de las trayectorias arbitrarias de la figura 12-42. La *posición absoluta* de cada partícula, $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ está medida con respecto al origen común O del marco de referencia *fijo* x, y, z. El origen de un segundo marco de referencia x', y', z' se fija a y se mueve con la partícula A. Se *permite* que los ejes de este marco *se trasladen sólo* con respecto al marco fijo. El *vector de posición relativa* $\mathbf{r}_{B/A}$ denota la posición de B medida con respecto a A. Por medio de la adición vectorial, los tres vectores mostrados en la figura 12-42 pueden relacionarse mediante la ecuación

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \tag{12-33}$$

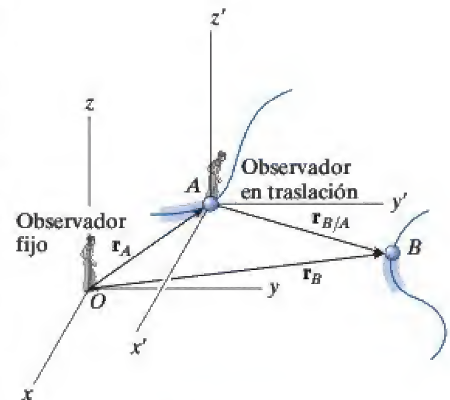


Fig. 12-42

Velocidad. Si se toman las derivadas con respecto al tiempo de la ecuación anterior, se determina una ecuación que relaciona las velocidades de las partículas; es decir,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \tag{12-34}$$

Donde $\mathbf{v}_B = d\mathbf{r}_B/dt$ y $\mathbf{v}_A = d\mathbf{r}_A/dt$ se refieren a *velocidades absolutas*, puesto que se observan desde el marco fijo; en tanto que la *velocidad relativa* $\mathbf{v}_{B/A} = d\mathbf{r}_{B/A}/dt$ se observa desde el marco trasladante. Es importante señalar que puesto que los ejes x', y', z' se trasladan, los *componentes* de $\mathbf{r}_{B/A}$ *no* cambiarán de dirección y por consiguiente la derivada con respecto al tiempo de estos componentes sólo tendrán que responder del cambio de sus magnitudes. La ecuación 12-34 establece, por consiguiente, que la velocidad de B es igual a la velocidad de A más (vectorialmente) la velocidad de *"B* con respecto a *A"*, medida por el *observador trasladante* fijo en el marco de referencia x', y', z'.

12

Aceleración. La derivada con respecto al tiempo de la ecuación 12-34 proporciona una relación vectorial similar entre las *aceleraciones absoluta* y *relativa* de las partículas A y B.

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \tag{12-35}$$

Aquí $\mathbf{a}_{B/A}$ es la aceleración de B vista por el observador localizado en A y que se traslada con el marco de referencia x', y', z'.*

Procedimiento para el análisis

- Cuando se aplican las ecuaciones de velocidad y aceleración relativas, primero se tiene que especificar la partícula A que es el origen de los ejes x', y', z' trasladantes. Por lo común, este punto tiene una velocidad o aceleración *conocida*.
- Como la adición vectorial forma un triángulo, cuando mucho puede haber *dos incógnitas* representadas por las magnitudes y/o direcciones de las cantidades vectoriales.
- Estas incógnitas se pueden resolver gráficamente por medio de trigonometría (ley de los senos, ley de los cosenos), o al descomponer cada uno de los tres vectores en componentes rectangulares o cartesianos, con lo cual se genera un sistema de ecuaciones escalares.

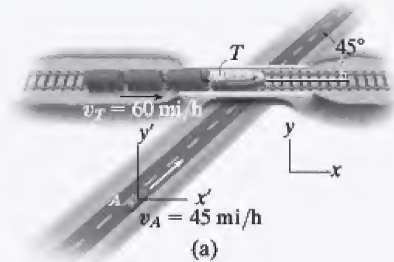


Los pilotos de estos aviones de propulsión que vuelan muy cerca uno de otro no deben perder de vista sus posiciones y velocidades relativas en todo momento para evitar una colisión.

*Una forma fácil de recordar la configuración de estas ecuaciones es observar la "cancelación" del subíndice A entre los dos términos, por ejemplo, $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$.

EJEMPLO 12.25

Un tren viaja a una rapidez constante de 60 mi/h y cruza una carretera como se muestra en la figura 12-43*a*. Si el automóvil *A* viaja a 45 mi/h por la carretera, determine la magnitud y dirección de la velocidad del tren con respecto al automóvil.



(a)

SOLUCIÓN 1

Análisis vectorial. La velocidad relativa $\mathbf{v}_{T/A}$ se mide con respecto a los ejes x', y' trasladantes fijos en el automóvil, figura 12-43*a*. Se determina a partir de la ecuación $\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A}$. Como se conoce *tanto* la magnitud *como* la dirección de $\mathbf{v}_T$ y $\mathbf{v}_A$, las incógnitas son las componentes *x* y *y* de $\mathbf{v}_{T/A}$. Si utilizamos los ejes *x*, *y* en la figura 12-43*a*, tenemos

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A}$$

$$60\mathbf{i} = (45\cos 45°\mathbf{i} + 45 \text{ sen } 45°\mathbf{j}) + \mathbf{v}_{T/A}$$

$$\mathbf{v}_{T/A} = \{28.2\mathbf{i} - 31.8\mathbf{j}\} \text{ mi/h} \qquad \textit{Resp.}$$

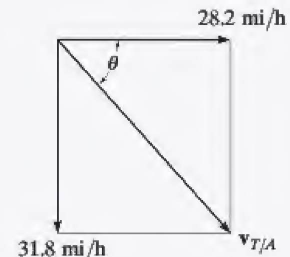
La magnitud de $\mathbf{v}_{T/A}$ es, por tanto,

$$v_{T/A} = \sqrt{(28.2)^2 + (-31.8)^2} = 42.5 \text{ mi/h} \qquad \textit{Resp.}$$

A partir de la dirección de cada componente, figura 12-43*b*, la dirección de $\mathbf{v}_{T/A}$ es

$$\tan\theta = \frac{(v_{T/A})_y}{(v_{T/A})_x} = \frac{31.8}{28.2}$$

$$\theta = 48.5° \quad \measuredangle \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

Observe que la suma vectorial mostrada en la figura 12-43*b* indica el sentido correcto de $\mathbf{v}_{T/A}$. Esta figura anticipa la respuesta y puede utilizarse para comprobarla.

SOLUCIÓN II

Análisis escalar. Las componentes desconocidas de $\mathbf{v}_{T/A}$ también pueden determinarse con un análisis escalar. Supondremos que estas componentes actúan en las direcciones *x* y *y positivas*. Por tanto,

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A}$$

$$\begin{bmatrix} 60 \text{ mi/h} \\ \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \text{ mi/h} \\ \measuredangle^{45°} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (v_{T/A})_x \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (v_{T/A})_y \\ \uparrow \end{bmatrix}$$

Si descomponemos cada vector en sus componentes *x* y *y* obtenemos

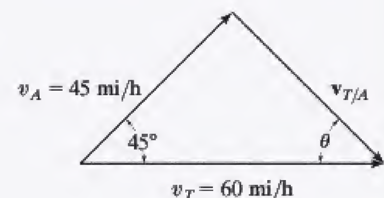
$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad 60 = 45\cos 45° + (v_{T/A})_x + 0$$

$$(+\uparrow) \qquad 0 = 45 \text{ sen } 45° + 0 + (v_{T/A})_y$$

Al resolver, obtenemos los resultados previos,

$$(v_{T/A})_x = 28.2 \text{ mi/h} = 28.2 \text{ mi/h} \rightarrow$$

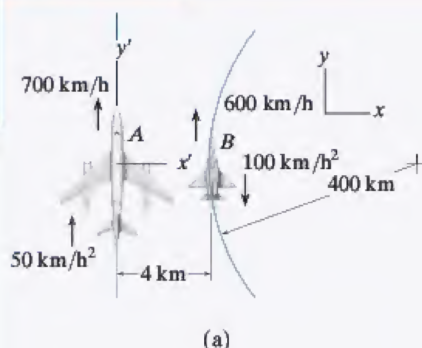
$$(v_{T/A})_y = -31.8 \text{ mi/h} = 31.8 \text{ mi/h} \downarrow$$



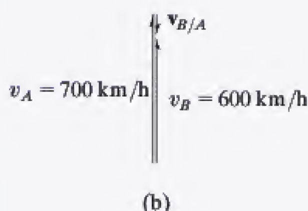
(c)

Fig. 12-43

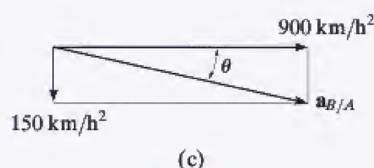
EJEMPLO 12.26



(a)



(b)



(c)

Fig. 12–44

El avión A en la figura 12-44*a* vuela a lo largo de una línea recta, mientras que el avión B lo hace a lo largo de una trayectoria circular que tiene un radio de curvatura $\rho_B = 400$ km. Determine la velocidad y aceleración de B medidas por el piloto de A.

SOLUCIÓN

Velocidad. El origen de los ejes x y y están en un punto fijo arbitrario. Como se tiene que determinar el movimiento con respecto al plano A, el *marco de referencia trasladante* x', y' se fija en él, figura 12-44*a*. Al aplicar la ecuación de velocidad relativa en forma escalar ya que los vectores de la velocidad de ambos aviones son paralelos en el instante mostrado, tenemos

$$(+\uparrow) \qquad v_B = v_A + v_{B/A}$$

$$600 \text{ km/h} = 700 \text{ km/h} + v_{B/A}$$

$$v_{B/A} = -100 \text{ km/h} = 100 \text{ km/h} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

La adición vectorial se muestra en la figura 12-44*b*.

Aceleración. El avión B tiene componentes tanto tangenciales como normales de aceleración puesto que vuela a lo largo de una *trayectoria curva*. De acuerdo con la ecuación 12-20, la magnitud del componente normal es

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(600 \text{ km/h})^2}{400 \text{ km}} = 900 \text{ km/h}^2$$

Al aplicar la ecuación de aceleración relativa se obtiene

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

$$900\mathbf{i} - 100\mathbf{j} = 50\mathbf{j} + \mathbf{a}_{B/A}$$

Por tanto,

$$\mathbf{a}_{B/A} = \{900\mathbf{i} - 150\mathbf{j}\} \text{ km/h}^2$$

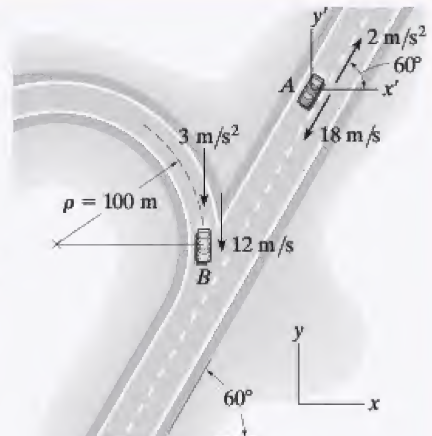
De acuerdo con la figura 12-44*c*, la magnitud y dirección de $\mathbf{a}_{B/A}$ son por consiguiente

$$a_{B/A} = 912 \text{ km/h}^2 \quad \theta = \tan^{-1}\frac{150}{900} = 9.46^\circ \;\measuredangle \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: la solución de este problema fue posible gracias al uso de un marco de referencia trasladante, puesto que el piloto del avión A se está "trasladando". La observación del movimiento del avión A con respecto al piloto del avión B, sin embargo, se obtiene por medio de un sistema de ejes *rotatorio* fijo en el avión B. (Esto supone, desde luego, que el piloto de B está fijo en el marco rotatorio, así que no tiene que mover sus ojos para seguir el movimiento de A.) Este caso se analiza en el ejemplo 16.21.

EJEMPLO 12.27

En el instante que se muestra en la figura 12-45*a*, los automóviles *A* y *B* viajan con una rapidez de 18 m/s y 12 m/s, respectivamente. Asimismo, en este instante, *A* experimenta una desaceleración de 2 m/s^2 y *B* tiene una aceleración de 3 m/s^2. Determine la velocidad y aceleración de *B* con respecto a *A*.



(a)

SOLUCIÓN

Velocidad. Los ejes *x*, *y* fijos se establecen en un punto arbitrario en el suelo, y los ejes *x*′, *y*′ trasladantes se fijan al carro *A*, figura 12-45*a*. ¿Por qué? La velocidad relativa se determina con $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$. ¿Cuáles son las dos incógnitas? Si utilizamos un análisis vectorial cartesiano, tenemos

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$-12\mathbf{j} = (-18\cos 60°\mathbf{i} - 18\,\text{sen}\,60°\mathbf{j}) + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$\mathbf{v}_{B/A} = \{9\mathbf{i} + 3.588\mathbf{j}\}\ \text{m/s}$$

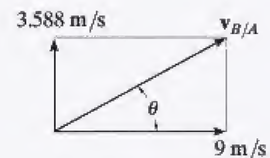
Por tanto,

$$v_{B/A} = \sqrt{(9)^2 + (3.588)^2} = 9.69\ \text{m/s} \qquad \textit{\textbf{Resp.}}$$

Observemos que $\mathbf{v}_{B/A}$ tiene componentes $+\mathbf{i}$ y $+\mathbf{j}$, figura 12-45*b*, su dirección es

$$\tan\theta = \frac{(v_{B/A})_y}{(v_{B/A})_x} = \frac{3.588}{9}$$

$$\theta = 21.7° \quad \measuredangle \qquad \textit{\textbf{Resp.}}$$



(b)

Aceleración. El automóvil *B* tiene componentes tanto tangenciales como normales de aceleración. ¿Por qué? La magnitud de la componente normal es

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(12\ \text{m/s})^2}{100\ \text{m}} = 1.440\ \text{m/s}^2$$

Al aplicar la ecuación de la aceleración relativa se obtiene

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

$$(-1.440\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) = (2\cos 60°\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,60°\mathbf{j}) + \mathbf{a}_{B/A}$$

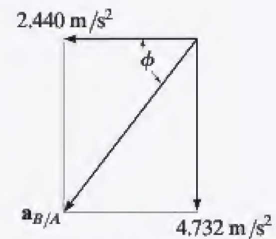
$$\mathbf{a}_{B/A} = \{-2.440\mathbf{i} - 4.732\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2$$

Aquí $\mathbf{a}_{B/A}$ tiene componentes $-\mathbf{i}$ y $-\mathbf{j}$. Por tanto, con la figura 12-45*c*,

$$a_{B/A} = \sqrt{(2.440)^2 + (4.732)^2} = 5.32\ \text{m/s}^2 \qquad \textit{\textbf{Resp.}}$$

$$\tan\phi = \frac{(a_{B/A})_y}{(a_{B/A})_x} = \frac{4.732}{2.440}$$

$$\phi = 62.7° \quad \measuredangle \qquad \textit{\textbf{Resp.}}$$



(c)

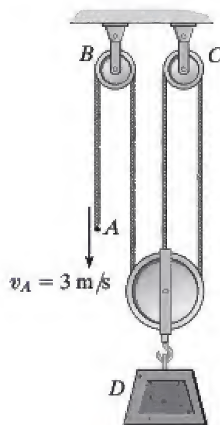
Fig. 12–45

NOTA: ¿es posible obtener la aceleración relativa $\mathbf{a}_{A/B}$ con este método? Vea el comentario al final del ejemplo 12.26.

12

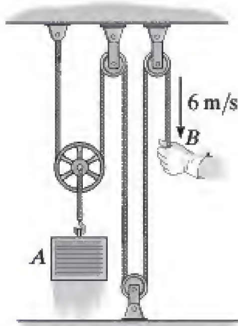
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F12-39. Determine la rapidez del bloque D si el extremo A de la cuerda se jala hacia abajo con una rapidez de $v_A = 3$ m/s.



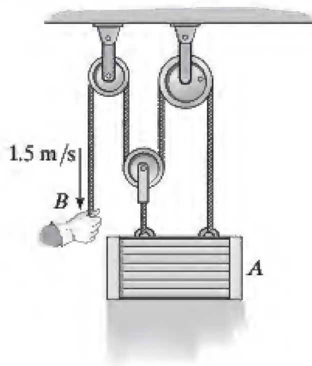
F12-39

F12-40. Determine la rapidez del bloque A si el extremo B de la cuerda se jala hacia abajo con una rapidez de 6 m/s.



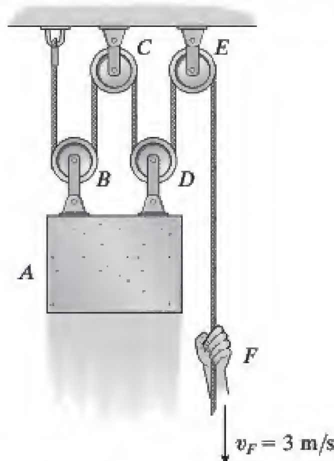
F12-40

F12-41. Determine la rapidez del bloque A si el extremo B de la cuerda se jala hacia abajo con una rapidez de 1.5 m/s.



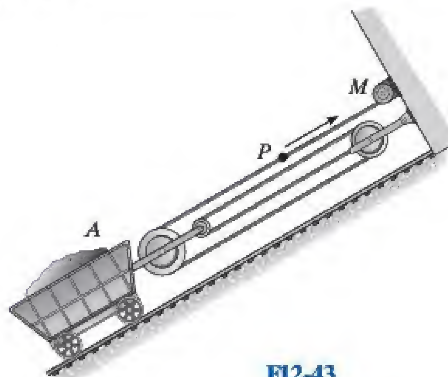
F12-41

F12-42. Determine la rapidez del bloque A si el extremo F de la cuerda se jala hacia abajo con una rapidez de $v_F = 3$ m/s.



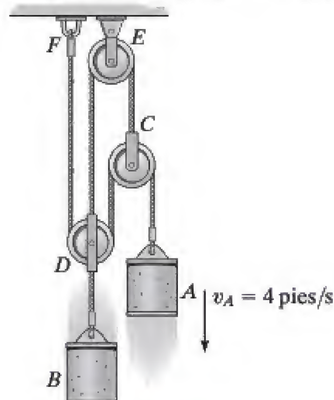
F12-42

F12-43. Determine la rapidez del carro A si el punto P en el cable tiene una rapidez de 4 m/s cuando el motor M enrolla el cable.



F12-43

F12-44. Determine la rapidez del cilindro B si el cilindro A desciende con una rapidez de $v_A = 4$ pies/s.



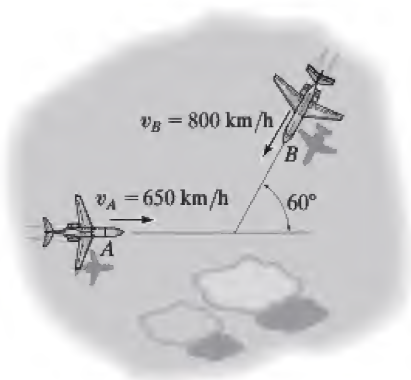
F12-44

F12-45. El automóvil A viaja a una rapidez constante de 80 km/h al norte, mientras que el automóvil B viaja a una rapidez constante de 100 km/h al este. Determine la velocidad del automóvil B con respecto al automóvil A.



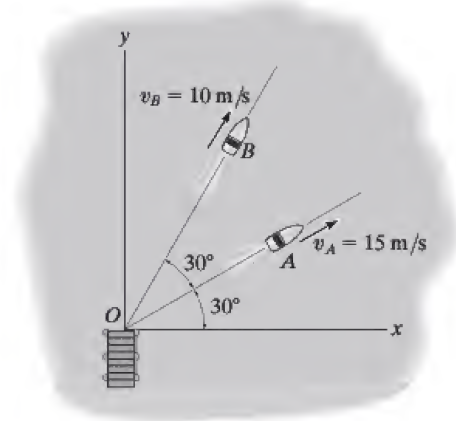
F12-45

F12-46. Dos aviones A y B vuelan a las velocidades constantes mostradas. Determine la magnitud y dirección de la velocidad del avión B con respecto al avión A.



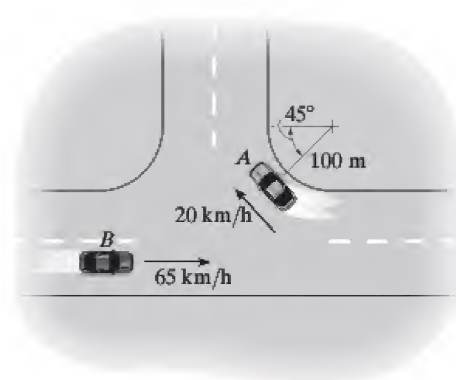
F12-46

F12-47. Los botes A y B navegan con una rapidez constante de $v_A = 15$ m/s y $v_B = 10$ m/s respectivamente cuando salen del muelle en O al mismo tiempo. Determine la distancia entre ambos cuando $t = 4$ s.



F12-47

F12-48. En el instante que se presenta, los automóviles A y B viajan a la rapidez mostrada. Si B está acelerando a 1200 km/h^2 mientras que A mantiene una rapidez constante, determine la velocidad y aceleración de A con respecto a B.

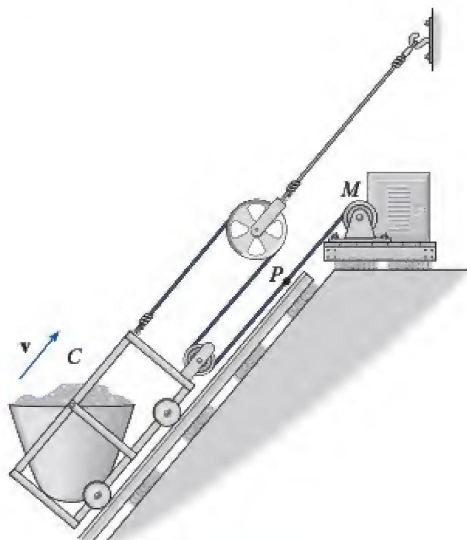


F12-48

12

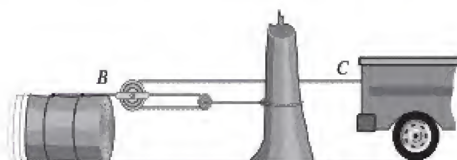
PROBLEMAS

12-195. Al carro de minería C lo jalan hacia arriba del plano inclinado el motor M y la combinación de cuerda y polea que se muestra. Determine la rapidez v_P a la cual el punto P en el cable debe moverse hacia el motor para que el carro suba por el plano a una rapidez constante $v = 2$ m/s.



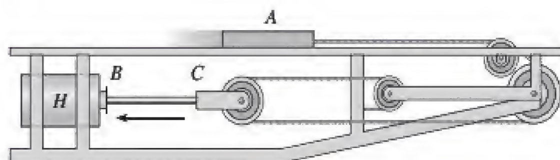
Prob. 12-195

***12-196.** Determine el desplazamiento del tronco si el camión en C jala el cable 4 pies a la derecha.



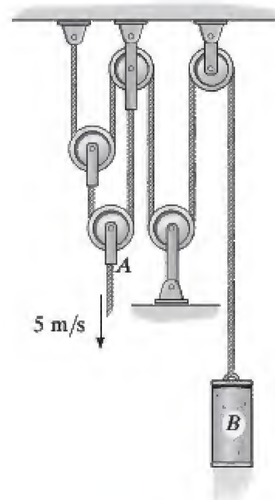
Prob. 12-196

•**12-197.** Si el cilindro hidráulico H jala hacia dentro la barra BC a 2 pies/s, determine la rapidez de la corredera A.



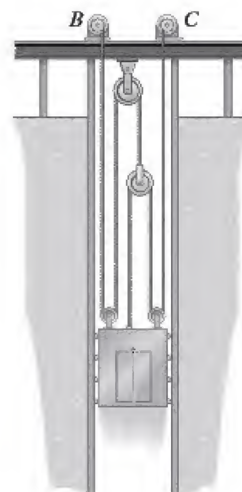
Prob. 12-197

12-198. Si el extremo A de la cuerda desciende a una rapidez de 5 m/s, determine la rapidez del cilindro B.



Prob. 12-198

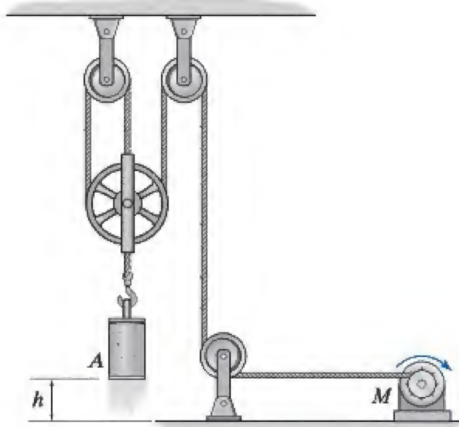
12-199. Determine la rapidez del elevador si cada motor enrolla el cable a una rapidez constante de 5 m/s.



Prob. 12-199

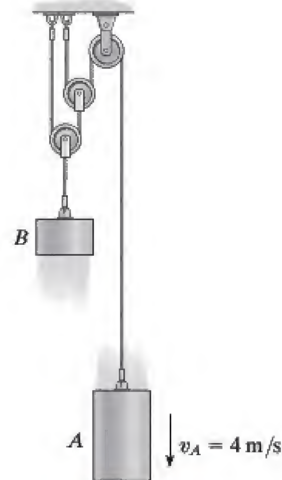
***12-200.** Determine la rapidez del cilindro A, si la cuerda se enrolla hacia el motor M a una razón constante de 10 m/s.

•12-201. Si la cuerda se jala hacia el motor M a una rapidez de $v_M = (5t^{3/2})$ m/s, donde t está en segundos, determine la rapidez del cilindro A cuando $t = 1$ s.



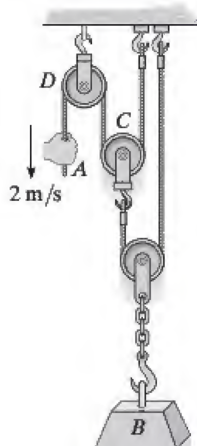
Probs. 12-200/201

12-203. Determine la rapidez de B si A desciende con una rapidez de $v_A = 4$ m/s en el instante mostrado.



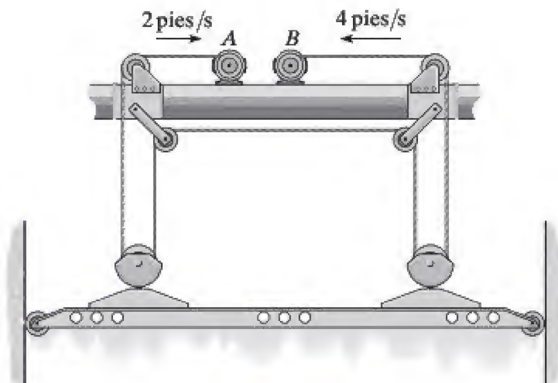
Prob. 12-203

12-202. Si el extremo del cable en A se jala hacia abajo con una rapidez de 2 m/s, determine la rapidez a la cual se eleva el bloque B.



Prob. 12-202

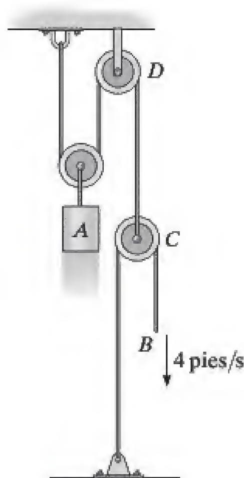
***12-204.** La grúa se utiliza para izar la carga. Si los motores en A y B jalan el cable a una rapidez de 2 pies/s y 4 pies/s, respectivamente, determine la rapidez de la carga.



Prob. 12-204

12

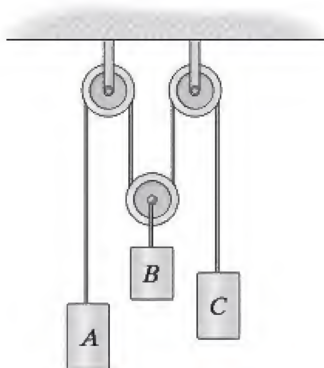
•**12-205.** El cable en B se jala hacia abajo a 4 pies/s y la rapidez se reduce a 2 pies/s^2. Determine la velocidad y aceleración del bloque A en este instante.



Prob. 12-205

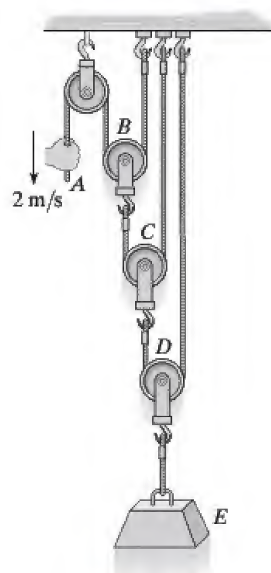
12-206. Si el bloque A desciende con una rapidez de 4 pies/s mientras C sube a 2 pies/s, determine la rapidez del bloque B.

12-207. Si el bloque A baja a 6 pies/s mientras que el bloque C baja a 18 pies/s, determine la rapidez del bloque B.



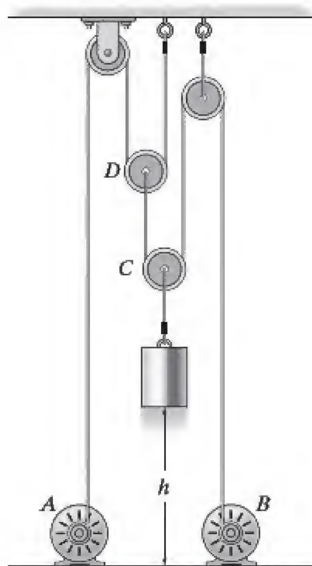
Probs. 12-206/207

***12-208.** Si el extremo del cable en A se jala hacia abajo con una rapidez de 2 m/s, determine la rapidez a la cual se eleva el bloque E.



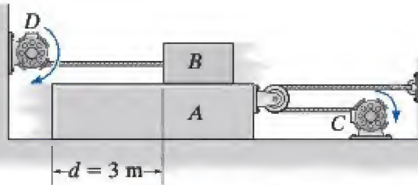
Prob. 12-208

•**12-209.** Si los motores A y B tiran de los cables con una aceleración de $a = (0.2t)$ m/s^2, donde t está en segundos, determine la rapidez del bloque cuando alcanza una altura $h = 4$ m, partiendo del reposo en $h = 0$. Incluso, ¿cuánto tiempo le lleva alcanzar esta altura?



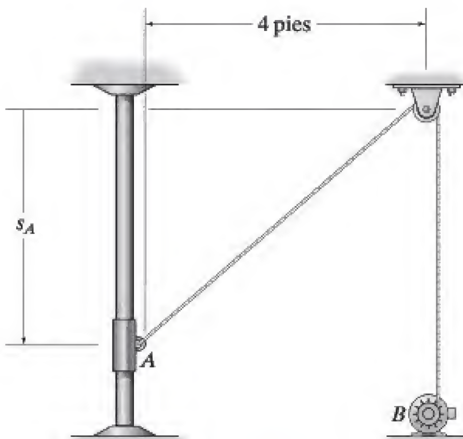
Prob. 12-209

12-210. El motor en C jala el cable con una aceleración constante $a_C = (3t^2)$ m/s^2, donde t está en segundos. El motor en D jala su cable a $a_D = 5$ m/s^2. Si ambos motores arrancan al mismo tiempo del reposo cuando $d = 3$ m, determine (a) el tiempo requerido para $d = 0$ y (b) las velocidades de los bloques A y B cuando esto ocurre.



Prob. 12-210

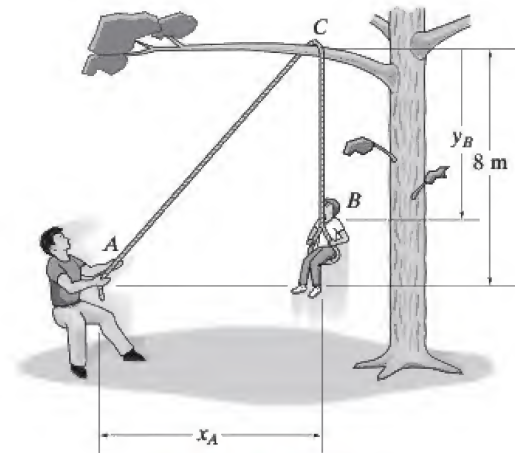
12-211. El movimiento del collar en A lo controla un motor en B, de modo que cuando el collar está en $s_A = 3$ pies sube a 2 pies/s y su velocidad se reduce a 1 pie/s^2. Determine la velocidad y aceleración de un punto en el cable a medida que se jala hacia el motor B en este instante.



Prob. 12-211

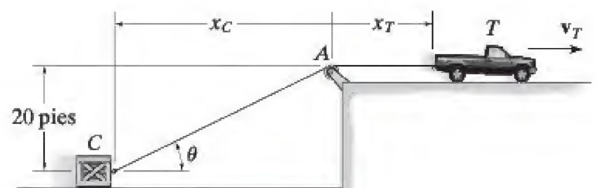
***12-212.** El hombre jala la cuerda para subir al muchacho hasta la rama del árbol C retrocediendo a una rapidez constante de 1.5 m/s. Determine la rapidez a la cual el muchacho sube en el instante $x_A = 4$ m. Ignore el tamaño de la rama. Cuando $x_A = 0$, $y_B = 8$ m, de modo que A y B coincidan; es decir, la cuerda es de 16 m de largo.

•12-213. El hombre jala la cuerda al retroceder para subir al muchacho hasta la rama del árbol C. Si comienza a retroceder del reposo cuando $x_A = 0$ con una aceleración constante $a_A = 0.2$ m/s^2, determine la rapidez del muchacho en el instante $y_B = 4$ m. Ignore el tamaño de la rama. Cuando $x_A = 0$, $y_B = 8$ m, de modo que A y B coincidan, es decir, la cuerda es de 16 m de largo.



Probs. 12-212/213

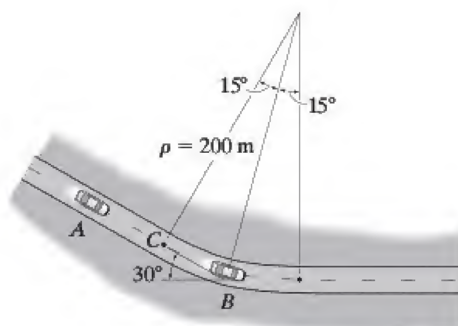
12-214. Si el camión viaja a una rapidez constante de $v_T = 6$ pies/s, determine la rapidez del embalaje a cualquier ángulo θ de la cuerda. La cuerda es de 100 pies de largo y pasa sobre una polea de tamaño insignificante en A. *Sugerencia:* relacione las coordenadas x_T y x_C con la longitud de la cuerda y evalúe la derivada con respecto al tiempo. Luego sustituya la relación trigonométrica entre x_C y θ.



Prob. 12-214

12

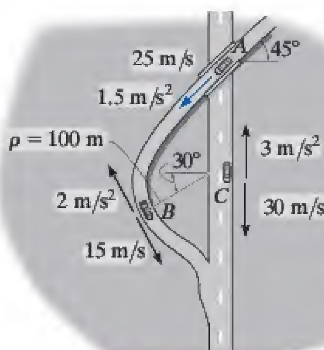
12-215. En el instante que se muestra, el automóvil A viaja a lo largo de una parte recta de la carretera a una rapidez de 25 m/s. En este mismo instante el automóvil B viaja a lo largo de la parte circular de la carretera a una velocidad de 15 m/s. Determine la velocidad del automóvil B con respecto al automóvil A.



Prob. 12-215

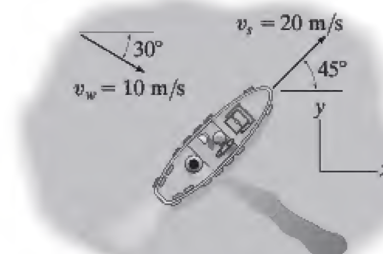
***12-216.** El automóvil A viaja por una carretera recta a una rapidez de 25 m/s mientras acelera a 1.5 m/s^2. En este mismo instante el automóvil C viaja por una carretera recta a una rapidez de 30 m/s mientras desacelera a 3 m/s^2. Determine la velocidad y aceleración del automóvil A con respecto al automóvil C.

•**12-217.** El automóvil B viaja por una carretera curva con una rapidez de 15 m/s mientras desacelera a 2 m/s^2. En este mismo instante el automóvil C viaja por la carretera recta con una rapidez de 30 m/s mientras desacelera su rapidez a 3 m/s^2. Determine la velocidad y aceleración del automóvil B con respecto al automóvil C.



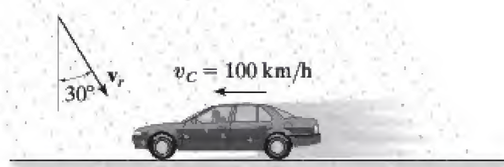
Probs. 12-216/217

12-218. El barco navega a una rapidez constante de $v_s = 20$ m/s y el viento sopla a una rapidez de $v_w = 10$ m/s, como se muestra. Determine la magnitud y dirección de la componente horizontal de la velocidad del humo que sale de la chimenea, contemplado por un pasajero en el barco.



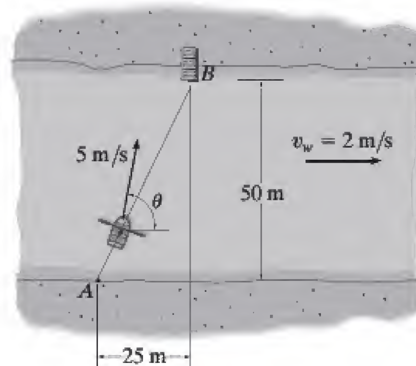
Prob. 12-218

12-219. El automóvil viaja a una rapidez constante de 100 km/h. Si la lluvia cae a 6 m/s en la dirección mostrada, determine la velocidad de la lluvia vista por el conductor.



Prob. 12-219

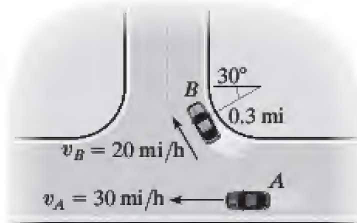
***12-220.** El hombre puede remar en bote en aguas tranquilas con una rapidez de 5 m/s. Si el río fluye a 2 m/s, determine la rapidez del bote y el ángulo θ al que debe dirigir el bote de modo que vaya de A a B.



Prob. 12-220

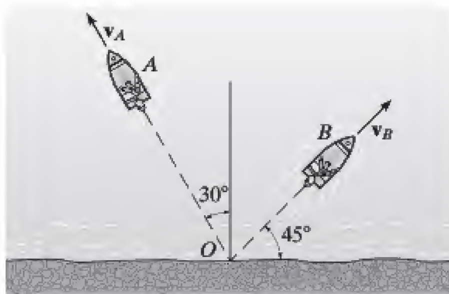
•**12-221.** En el instante mostrado, los automóviles A y B viajan a una rapidez de 30 mi/h y 20 mi/h, respectivamente. Si B incrementa su rapidez a 1200 mi/h^2, mientras que A mantiene una velocidad constante, determine la velocidad y aceleración de B con respecto a A.

12-222. En el instante mostrado, los automóviles A y B viajan a una rapidez de 30 mi/h y 20 mi/h, respectivamente. Si A incrementa su rapidez a 400 mi/h^2, mientras que la rapidez de B se reduce a 800 mi/h^2, determine la velocidad y aceleración de B con respecto a A.



Probs. 12-221/222

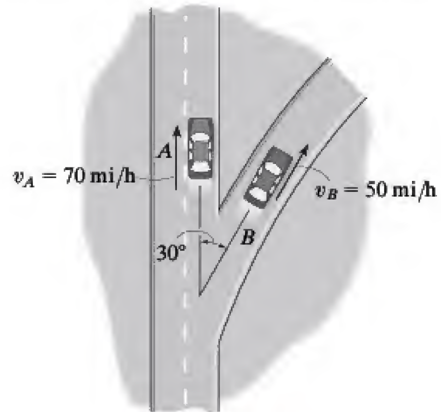
12-223. Dos botes parten de la playa al mismo tiempo y navegan en las direcciones que se muestran. Si $v_A = 20$ pies/s y $v_B = 15$ pies/s, determine la velocidad del bote A con respecto al bote B. ¿Cuánto tiempo después de dejar la playa los botes estarán a 800 pies uno de otro?



Prob. 12-223

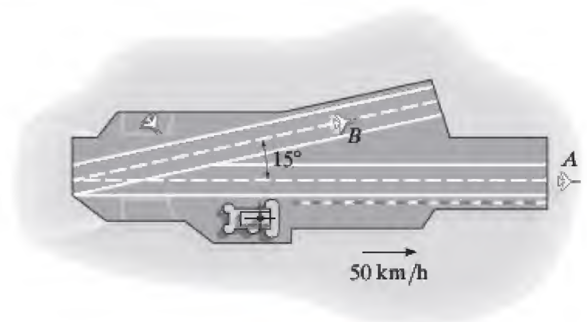
*__12-224.__ En el instante mostrado, los automóviles A y B viajan a una rapidez de 70 mi/h y 50 mi/h, respectivamente. Si B incrementa su rapidez a 1100 mi/h^2, mientras que A mantiene una rapidez constante, determine la velocidad y aceleración de B con respecto a A. El automóvil B se desplaza a lo largo de una curva que tiene un radio de curvatura de 0.7 mi.

•**12-225.** En el instante mostrado, los automóviles A y B viajan a una rapidez de 70 mi/h y 50 mi/h, respectivamente. Si B reduce su rapidez a 1400 mi/h^2, mientras que A incrementa su rapidez a 800 mi/h^2, determine la aceleración de B con respecto a A. El automóvil B se desplaza a lo largo de una curva de un radio de curvatura de 0.7 mi.



Probs. 12-224/225

12-226. Un portaaviones navega con una velocidad de 50 km/h. En el instante mostrado, el avión en A acaba de despegar y ha alcanzado una rapidez horizontal del aire de 200 km/h, medida en aguas tranquilas. Si el avión en B se desplaza a lo largo de la pista a 175 km/h en la dirección mostrada, determine la velocidad de A con respecto a B.

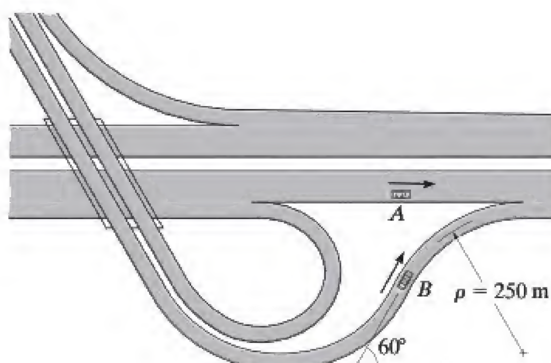


Prob. 12-226

12-227. Un automóvil viaja al norte por una carretera recta a 50 km/h. Un instrumento en el automóvil indica que el viento se dirige al este. Si la rapidez del automóvil es de 80 km/h, el instrumento indica que el viento se dirige al noreste. Determine la velocidad y dirección del viento.

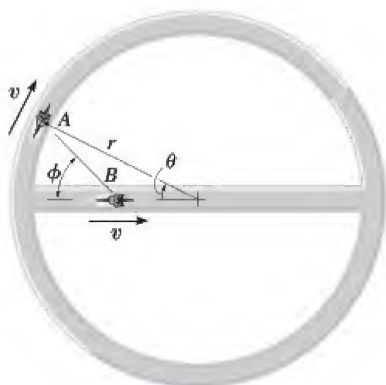
12

*12-228. En el instante mostrado el automóvil A viaja con una velocidad de 30 m/s y una aceleración de 2 m/s^2 por la carretera. En el mismo instante B circula por la curva de intercambio en forma de trompeta con una rapidez de 15 m/s, la cual se reduce a 0.8 m/s^2. Determine la velocidad y aceleración relativas de B con respecto a A en este instante.



Prob. 12-228

•12-229. Dos ciclistas A y B se desplazan a la misma rapidez constante v. Determine la velocidad de A con respecto a B si A se desplaza a lo largo de la pista circular, mientras que B lo hace a lo largo del diámetro del círculo.



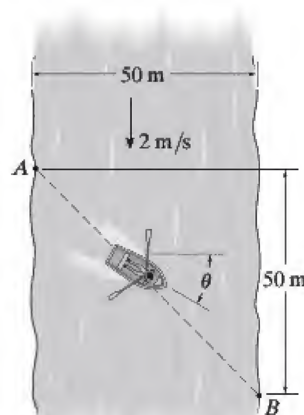
Prob. 12-229

12-230. Un hombre camina a 5 km/h en la dirección de un viento de 20 km/h. Si las gotas de lluvia caen verticalmente a 7 km/h en *aire tranquilo*, determine la dirección en la cual las gotas parecen caer con respecto al hombre. Suponga que la rapidez horizontal de las gotas de lluvia es igual a la del viento.



Prob. 12-230

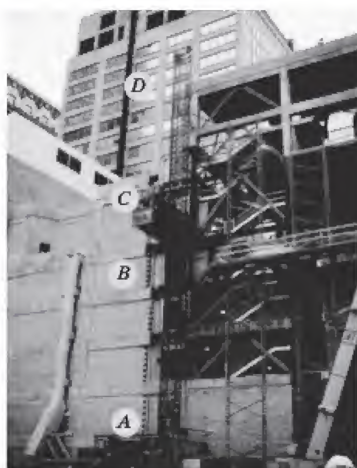
12-231. Un hombre puede remar un bote a 5 m/s en aguas tranquilas. Desea cruzar un río de 50 m de ancho hasta el punto B, situado a 50 m corriente abajo. Si el río fluye con una velocidad de 2 m/s, determine la rapidez del bote y el tiempo requerido para cruzarlo.



Prob. 12-231

PROBLEMAS CONCEPTUALES

P12-1. Si mide el tiempo que le lleva al elevador de construcción para ir de A a B, luego de B a C y luego de C a D, y también conoce la distancia entre cada uno de los puntos, ¿cómo podría determinar la velocidad y aceleración promedio del elevador al ascender de A a D? Use valores numéricos para explicar cómo se puede hacer esto.



P12-1

P12-2. Si el rociador en A está a 1 m del suelo, ponga a escala las medidas necesarias tomadas en la foto para determinar la velocidad aproximada del chorro de agua cuando sale de la boquilla del rociador.



P12-2

P12-3. Se lanzó el balón de basquetbol a un ángulo medido entre la horizontal y los brazos extendidos del hombre. Si la canasta está a 10 pies del suelo, haga las mediciones apropiadas en la foto y determine si el balón localizado como se muestra entrará a la canasta.



P12-3

P12-4. La piloto le dice la envergadura de su avión y su rapidez de aire constante. ¿Cómo podría determinar la aceleración del avión en el momento mostrado? Use valores numéricos y tome las mediciones necesarias a partir de la fotografía.

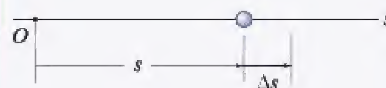


P12-4

REPASO DEL CAPÍTULO

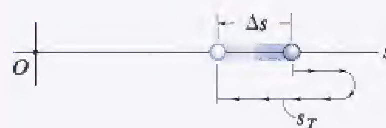
Cinemática rectilínea

La cinemática rectilínea se refiere al movimiento a lo largo de una línea recta. Una coordenada de posición *s* especifica la ubicación de la partícula en la línea y el desplazamiento Δs es el cambio de su posición.



La velocidad promedio es una cantidad vectorial, definida como el desplazamiento dividido entre el intervalo.

$$v_{\text{prom}} = \frac{-\Delta s}{\Delta t}$$



La rapidez promedio es un escalar y es la distancia total recorrida, dividida entre el tiempo del recorrido.

$$(v_{\text{rap}})_{\text{prom}} = \frac{s_T}{\Delta t}$$

El tiempo, la posición, la velocidad y la aceleración están relacionados por tres ecuaciones diferenciales.

$$a = \frac{dv}{dt}, \qquad v = \frac{ds}{dt}, \qquad a\,ds = v\,dv$$

Si se sabe que la aceleración es constante, entonces se pueden integrar las ecuaciones diferenciales que relacionan el tiempo, la posición, la velocidad y la aceleración.

$$v = v_0 + a_c t$$
$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a_c t^2$$
$$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$$

Soluciones gráficas

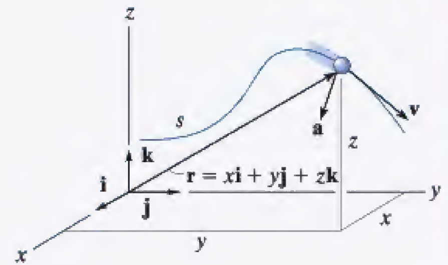
Si el movimiento es errático, entonces puede ser descrito por una gráfica. Si se presenta una de estas gráficas, en ese caso las otras pueden establecerse mediante las relaciones diferenciales entre *a*, *v*, *s* y *t*.

$$a = \frac{dv}{dt},$$
$$v = \frac{ds}{dt},$$
$$a\,ds = v\,dv$$

Movimiento curvilíneo, x, y, z

El movimiento curvilíneo a lo largo de una trayectoria puede descomponerse en movimiento rectilíneo a lo largo de los ejes x, y y z. Se utiliza la ecuación de la trayectoria para relacionar el movimiento a lo largo de cada eje.

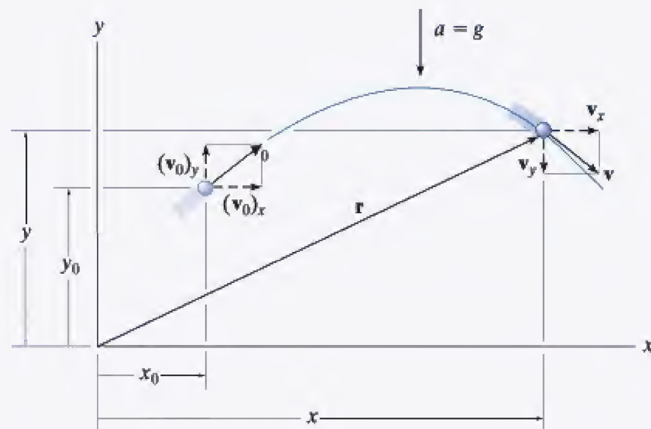
$$v_x = \dot{x} \qquad a_x = \dot{v}_x$$
$$v_y = \dot{y} \qquad a_y = \dot{v}_y$$
$$v_z = \dot{z} \qquad a_z = \dot{v}_z$$



Movimiento de un proyectil

El movimiento de vuelo libre de un proyectil sigue una trayectoria parabólica. Tiene una velocidad constante en la dirección horizontal y una aceleración hacia abajo constante de $g = 9.81\ \text{m/s}^2$ o $32.2\ \text{pies/s}^2$ en la dirección vertical. Dos de cualquiera de las tres ecuaciones de aceleración constante aplican en la dirección vertical, pero en la dirección horizontal sólo aplica una ecuación.

$$(+\uparrow) \quad v_y = (v_0)_y + a_c t$$
$$(+\uparrow) \quad y = y_0 + (v_0)_y t + \tfrac{1}{2} a_c t^2$$
$$(+\uparrow) \quad v_y^2 = (v_0)_y^2 + 2a_c(y - y_0)$$
$$(\xrightarrow{+}) \quad x = x_0 + (v_0)_x t$$



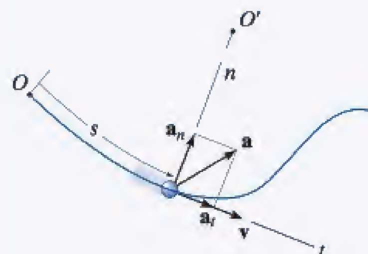
Movimiento curvilíneo *n*, *t*

Si se utilizan ejes normal y tangencial para el análisis, entonces **v** siempre está en la dirección *t* positiva.

La aceleración tiene dos componentes. El componente tangencial, $\mathbf{a}_t$, es responsable del cambio de magnitud de la velocidad; una reducción de la velocidad ocurre en la dirección *t* negativa, y un incremento de velocidad en la dirección *t* positiva. El componente normal $\mathbf{a}_n$ responde por el cambio en la dirección de la velocidad. Esta componente siempre actúa en la dirección *n* positiva.

$$a_t = \dot{v} \quad \text{o} \quad a_t ds = v\,dv$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$



Movimiento curvilíneo *r*, *θ*

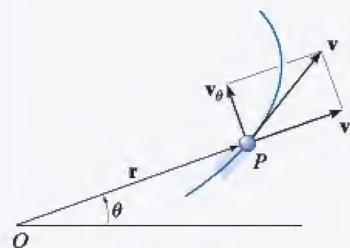
Si la trayectoria del movimiento se expresa en coordenadas polares, entonces las componentes de velocidad y aceleración pueden relacionarse con las derivadas con respecto al tiempo de *r* y θ.

Para aplicar las derivadas con respecto al tiempo, es necesario determinar $r, \dot{r}, \ddot{r}, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ en el instante considerado. Si se da la trayectoria $r = f(\theta)$, entonces se debe utilizar la regla de la cadena del cálculo para obtener las derivadas con respecto al tiempo. (Vea el apéndice C).

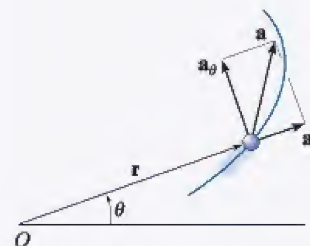
Una vez que se sustituyen los datos en las ecuaciones, el signo algebraico de los resultados indicará la dirección de los componentes de **v** o **a** a lo largo de cada eje.

$$v_r = \dot{r}$$
$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$



Velocidad



Aceleración

Movimiento dependiente absoluto de dos partículas

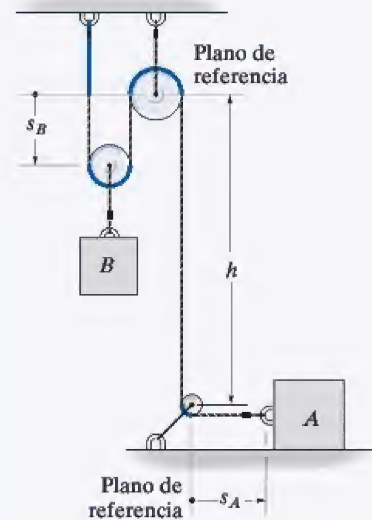
El movimiento dependiente de bloques que están suspendidos de poleas y cables puede relacionarse por la geometría del sistema. Para esto se establecen primero coordenadas de posición medidas de un origen fijo a cada bloque. La dirección de cada coordenada debe ser a lo largo de la línea del movimiento de un bloque.

Entonces, por medio de geometría y/o trigonometría, las coordenadas se relacionan con la longitud del cable para formular una ecuación de coordenadas de posición.

$$2s_B + h + s_A = l$$

La primera derivada con respecto al tiempo de esta ecuación proporciona una relación entre las velocidades de los bloques y una segunda derivada con respecto al tiempo da la relación entre sus aceleraciones.

$$2v_B = -v_A$$
$$2a_B = -a_A$$



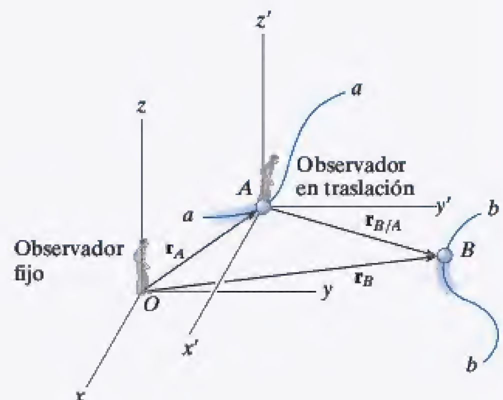
Análisis del movimiento relativo por medio de ejes trasladantes

Si dos partículas A y B experimentan movimientos independientes, entonces estos movimientos pueden relacionarse con su movimiento relativo por medio de un *sistema de ejes trasladantes* fijo a una de las partículas (A).

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

En el caso de movimiento plano, cada ecuación vectorial produce dos ecuaciones escalares, una en la dirección x y la otra en la dirección y. Para la solución, los vectores pueden expresarse en forma cartesiana, o bien, los componentes escalares x y y pueden escribirse directamente.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$





El diseño de las bandas transportadoras de una planta embotelladora requiere el conocimiento de las fuerzas que actúan en ellas y la capacidad de predecir el movimiento de las botellas que transportan.

Cinética de una partícula: fuerza y aceleración

13

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Formular la segunda ley del movimiento de Newton y definir masa y peso.
- Analizar el movimiento acelerado de una partícula por medio de la ecuación de movimiento con diferentes sistemas de coordenadas.
- Investigar el movimiento de fuerza central y aplicarlo a problemas de mecánica espacial.

13.1 Segunda ley del movimiento de Newton

La *cinética* es una rama de la dinámica que se ocupa de la relación entre el cambio de movimiento de un cuerpo y las fuerzas que lo provocan. La base de la cinética es la segunda ley de Newton, la cual establece que cuando una *fuerza desbalanceada* actúa en una partícula, ésta se *acelerará* en la dirección de la fuerza con una magnitud que es proporcional a ésta.

Esta ley puede verificarse experimentalmente al aplicar una fuerza $\mathbf{F}$ desbalanceada a una partícula y luego medir la aceleración $\mathbf{a}$. Como la fuerza y la aceleración son directamente proporcionales, la constante de proporcionalidad, m, se determina a partir de la relación $m = F/a$. Este escalar positivo m se conoce como *masa* de la partícula. Al permanecer constante durante cualquier aceleración, m mide cuantitativamente la resistencia de la partícula a cualquier cambio de su velocidad, es decir de su inercia.

Si la masa de la partícula es m, la segunda ley del movimiento de Newton se escribe en forma matemática como

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

La ecuación anterior, conocida como la *ecuación de movimiento*, es una de las fórmulas más importante en la mecánica.* Como previamente se enunció, su validez se basa sólo en *evidencia experimental.* En 1905, sin embargo, Albert Einstein desarrolló la teoría de la relatividad e impuso limitaciones en el uso de la segunda ley de Newton para describir el movimiento general de una partícula. Mediante experimentos se comprobó que el *tiempo* no es una cantidad absoluta como lo supuso Newton; y por consiguiente, la ecuación de movimiento no predice el comportamiento exacto de una partícula, sobre todo cuando su velocidad se aproxima a la velocidad de la luz (0.3 Gm/s). Los desarrollos de la teoría de la mecánica cuántica por parte de Erwin Schrödinger y otros indican además que las conclusiones derivadas del uso de esta ecuación también carecen de validez cuando las partículas son del tamaño de un átomo y se mueven muy cerca entre sí. En su mayoría, sin embargo, estos requerimientos en relación con la rapidez y el tamaño de una partícula no se presentan en problemas de ingeniería, por lo que sus efectos no se considerarán en este libro.

Ley de la atracción gravitatoria de Newton. Poco tiempo después de formular sus tres leyes del movimiento, Newton postuló una ley que rige la atracción mutua entre dos partículas. En forma matemática esta ley se expresa como

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (13\text{-}1)$$

donde

F = fuerza de atracción entre las dos partículas

G = constante de gravitación universal; de acuerdo con pruebas experimentales $G = 66.73(10^{-12})\text{m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2)$

m_1, m_2 = masa de cada una de las dos partículas

r = distancia entre los centros de las dos partículas

*Como m es constante, también podemos escribir $\mathbf{F} = d(m\mathbf{v})/dt$, donde $m\mathbf{v}$ es la cantidad de movimiento lineal de la partícula. En este caso la fuerza desbalanceada que actúa en la partícula es proporcional al cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento lineal de la partícula.

En el caso de una partícula localizada en o cerca de la superficie terrestre, la única fuerza gravitatoria de magnitud considerable es la que existe entre la Tierra y la partícula. Esta fuerza se denomina "peso" y, para nuestro propósito, será la única fuerza gravitatoria considerada.

A partir de la ecuación 13-1, podemos desarrollar una expresión general para determinar el peso W de una partícula de masa $m_1 = m$. Sea $m_2 = M_e$ la masa de la Tierra y r la distancia entre el centro de la Tierra y la partícula. Entonces, si $g = GM_e/r^2$, tenemos

13

$$W = mg$$

Por comparación con $F = ma$, denominamos g como la aceleración de la gravedad. En la mayoría de los cálculos de ingeniería g es un punto sobre la superficie terrestre al nivel del mar y a una latitud de 45°, el cual se considera como el "lugar estándar". Aquí se utilizarán los valores $g = 9.81 \text{ m/s}^2 = 32.2 \text{ pies/s}^2$ en los cálculos.

En el sistema SI la masa de un cuerpo se especifica en kilogramos y el peso se calcula con la ecuación anterior, figura 13-1*a*. Por tanto,

$$W = mg \text{ (N)} \qquad (g = 9.81 \text{ m/s}^2) \tag{13-2}$$

Por consiguiente, un cuerpo de 1 kg de masa pesa 9.81 N; un cuerpo de 2 kg pesa 19.62 N; y así sucesivamente.

En el sistema FPS (pies-libras-segundo) el peso de un cuerpo se especifica en libras. La masa se mide en slugs, un término derivado de "sluggish" (tardo, perezoso) el cual se refiere a la inercia del cuerpo. Se calcula, figura 13-1*b*, con

$$m = \frac{W}{g} \text{(slug)} \quad (g = 32.2 \text{ pies/s}^2) \tag{13-3}$$

Por consiguiente, un cuerpo que pesa 32.2 lb tiene una masa de 1 slug; un cuerpo que pesa 64.4 lb tiene una masa de 2 slugs, y así sucesivamente.

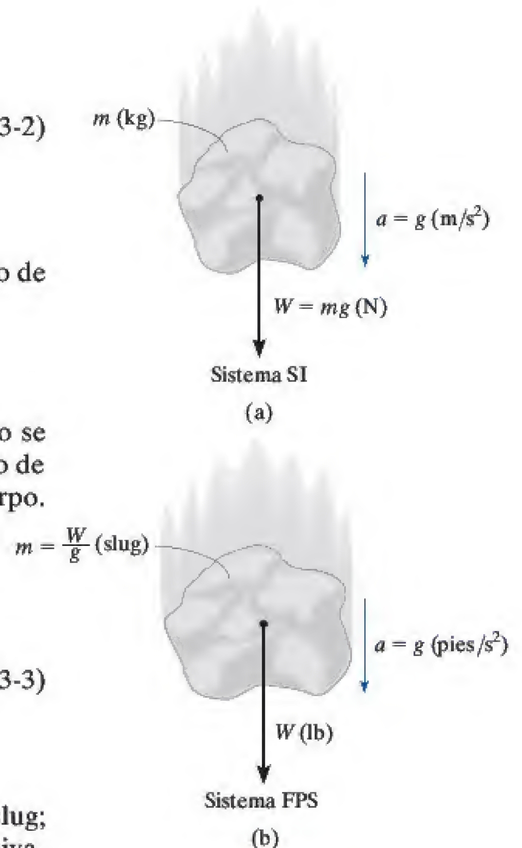
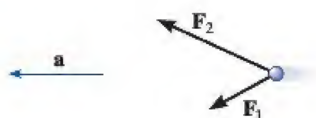


Fig. 13-1

13

13.2 Ecuación de movimiento



Cuando más de una fuerza actúan en una partícula, la fuerza resultante se determina por medio de una suma vectorial de todas las fuerzas; es decir, $\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F}$. En este caso general, la ecuación de movimiento se escribe como

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (13\text{-}4)$$

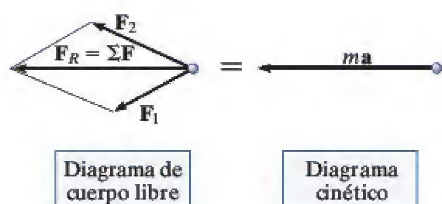


Fig. 13-2

Para ilustrar la aplicación de esta ecuación, considere la partícula mostrada en la figura 13-2*a*, con masa *m* y sometida a la acción de dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. Gráficamente podemos tener en cuenta la magnitud y dirección de cada una de las fuerzas que actúan en la partícula si trazamos el *diagrama de cuerpo libre* de la partícula, figura 13-2*b*. Como la *resultante* de estas fuerzas *produce* el vector $m\mathbf{a}$, su magnitud y dirección se representan gráficamente en el *diagrama cinético*, que se muestra en la figura 13-2*c*.* El signo igual escrito entre los diagramas simboliza la equivalencia *gráfica* entre el diagrama de cuerpo libre y el diagrama cinético, es decir, $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.† En particular, observe que si $\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces la aceleración también es cero, de modo que la partícula bien puede permanecer en *reposo* o moverse a lo largo de una trayectoria de línea recta a *velocidad constante*. Tales son las condiciones de *equilibrio estático*, la primera ley del movimiento de Newton.

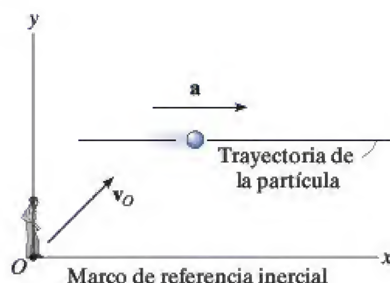


Fig. 13-3

Marco de referencia inercial. Cuando se aplica la ecuación de movimiento, es importante que la aceleración de la partícula se mida con respecto a un marco de referencia que *esté fijo o se traslade a una velocidad constante*. De este modo, el observador no experimentará aceleración y las mediciones de la aceleración de la partícula serán las *mismas* con *cualquier referencia* de este tipo. Tal marco de referencia comúnmente se conoce como *marco de referencia inercial* o *Newtoniano*, figura 13-3.

Cuando se estudian los movimientos de cohetes y satélites, se justifica considerar el marco de referencia inercial como fijo en las estrellas, mientras que los problemas de dinámica que implican movimientos en o cerca de la superficie terrestre pueden resolverse con un marco inercial que se supone fijo en la Tierra. Aun cuando la Tierra gira tanto sobre su propio eje como alrededor del Sol, las aceleraciones creadas por estas rotaciones son relativamente pequeñas y por lo tanto se pueden omitir en la mayoría de las aplicaciones.

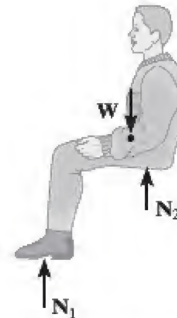
*Recuerde que el diagrama de cuerpo libre considera que la partícula libre de sus apoyos circundantes y muestra todas las fuerzas que actúan en ella. El diagrama cinético se refiere al movimiento de la partícula provocado por las fuerzas.

†La ecuación de movimiento también puede reescribirse en la forma $\Sigma\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}$. El vector $-m\mathbf{a}$ se refiere al *vector de la fuerza de inercia*. Si se le trata de la misma forma que a un "vector de fuerza", entonces el estado de "equilibrio" creado se conoce como *equilibrio dinámico*. Este método de aplicación a menudo se conoce como *principio de D'Alembert* nombrado en honor del matemático francés Jean le Rond d'Alembert.

Todos estamos familiarizados con la rara sensación cuando nos sentamos en un automóvil sometido a una aceleración hacia delante. A menudo pensamos que esto es provocado por una "fuerza" que actúa en nosotros y que tiende a empujarnos hacia atrás en el asiento; sin embargo, no es así. Esta sensación ocurre debido a nuestra inercia o a la resistencia de nuestra masa al cambio de velocidad.

Consideremos al pasajero sujeto al asiento de un trineo de cohete. Si el trineo está en reposo o en movimiento a una velocidad constante, no se ejerce ninguna fuerza sobre su espalda, como se muestra en el diagrama de cuerpo libre.

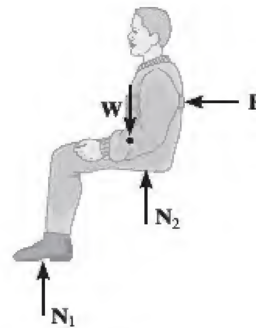




En reposo o a velocidad constante

Cuando el empuje del motor de un cohete acelera el trineo, el asiento en el cual está sentado el pasajero ejerce una fuerza **F** sobre él y lo empuja hacia delante junto con el trineo. Observe en la fotografía, que la inercia de su cabeza resiste este cambio en el movimiento (aceleración), y por tanto ésta se mueve hacia atrás contra el asiento, y su cara, la cual no es rígida, tiende a distorsionarse hacia atrás.

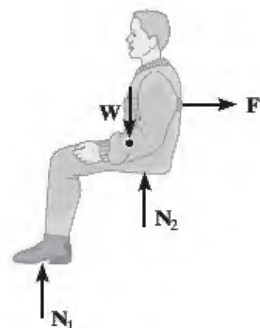




Aceleración

Al desacelerarse la fuerza del cinturón del asiento **F′** tiende a tirar de su cuerpo para detenerlo, pero su cabeza pierde el contacto con el respaldo del asiento y su cara se distorsiona hacia delante, de nuevo debido a su inercia o tendencia a continuar en movimiento hacia delante. Ninguna fuerza tira de él hacia delante, aunque ésta sea la sensación que percibe.





Desaceleración

13

13.3 Ecuación de movimiento de un sistema de partículas

La ecuación del movimiento se ampliará ahora para incluir un sistema de partículas aislado dentro de una región cerrada del espacio, como se muestra en la figura 13-4*a*. En particular, no existe ninguna restricción en cuanto a la forma en que las partículas están conectadas, por lo que el siguiente análisis se aplica igualmente bien al movimiento de un sistema líquido, sólido o gaseoso.

En el instante considerado, la partícula *i*-ésima, de masa m_i, se somete a un sistema de fuerzas internas y a una fuerza externa resultante. La *fuerza interna*, representada simbólicamente como $\mathbf{f}_i$, es la resultante de todas las fuerzas que las demás partículas ejercen en la partícula *i*-ésima. La *fuerza externa resultante* $\mathbf{F}_i$ representa, por ejemplo, el efecto de las fuerzas gravitatoria, eléctrica, magnética o de contacto entre la partícula *i*-ésima y los cuerpos o partículas adyacentes *no* incluidas dentro del sistema.

Los diagramas de cuerpo libre y cinético de la partícula *i*-ésima se muestran en la figura 13-4*b*. Al aplicar la ecuación de movimiento,

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}; \qquad \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i = m_i\mathbf{a}_i$$

Cuando se aplica la ecuación de movimiento a cada una de las demás partículas del sistema, se obtienen ecuaciones similares. Y, si todas estas ecuaciones se suman *vectorialmente*, obtenemos

$$\Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{f}_i = \Sigma m_i\mathbf{a}_i$$

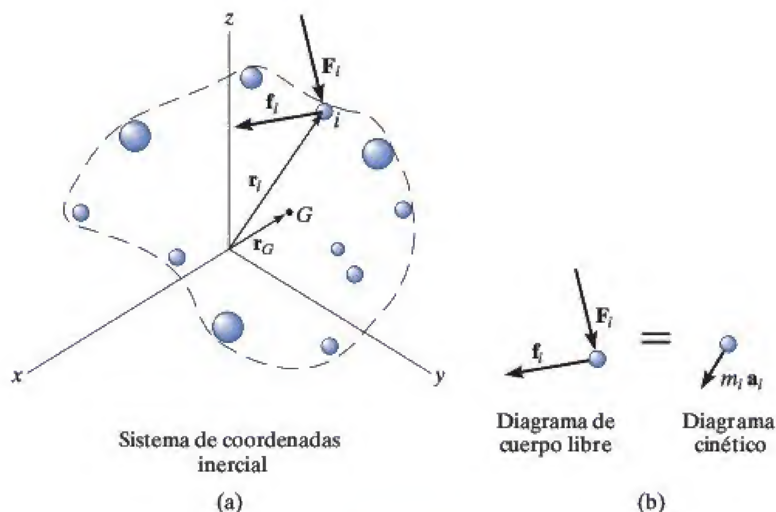


Fig. 13-4

La suma de las fuerzas internas, si se realiza, es igual a cero, ya que las fuerzas internas entre dos partículas ocurren en pares colineales iguales pero opuestos. En consecuencia, sólo prevalecerá la suma de las fuerzas externas, y por consiguiente la ecuación de movimiento escrita para el sistema de partículas es

$$\Sigma \mathbf{F}_i = \Sigma m_i \mathbf{a}_i \qquad (13\text{-}5)$$

Si $\mathbf{r}_G$ es un vector de posición que localiza el *centro de masa G* de las partículas, figura 13-4*a*, entonces por definición del centro de masa $m\mathbf{r}_G = \Sigma m_i \mathbf{r}_i$, donde $m = \Sigma m_i$ es la masa total de todas las partículas. Al diferenciar esta ecuación dos veces con respecto al tiempo y suponer que ninguna masa entra a o sale del sistema, se obtiene

$$m\mathbf{a}_G = \Sigma m_i \mathbf{a}_i$$

Si sustituimos este resultado en la ecuación 13-5, obtenemos

$$\boxed{\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G} \qquad (13\text{-}6)$$

Por tanto, la suma de las fuerzas externas que actúan en el sistema de partículas es igual a la masa total de las partículas por la aceleración de su centro de masa G. Como en realidad todas las partículas deben tener un tamaño finito para que posean masa, la ecuación 13-6 justifica la aplicación de la ecuación de movimiento a un *cuerpo* representado como una partícula única.

Puntos importantes

- La ecuación de movimiento está basada en pruebas experimentales y es válida sólo cuando se aplica dentro de un marco de referencia inercial.
- La ecuación de movimiento establece que la *fuerza desbalanceada* aplicada a una partícula la *acelera*.
- Un marco de referencia inercial no gira, sino que más bien sus ejes o se trasladan a velocidad constante o están en reposo.
- La masa es una propiedad de la materia que proporciona una medida cuantitativa de su resistencia a un cambio en la velocidad. Es una cantidad absoluta y por tanto no cambia de un lugar a otro.
- El peso es una fuerza provocada por la gravitación terrestre. No es absoluta; más bien, depende de la altitud de la masa con respecto a la superficie terrestre.

13

13

13.4 Ecuaciones de movimiento: coordenadas rectangulares

Cuando una partícula se mueve con respecto a un marco de referencia inercial x, y, z, las fuerzas que actúan en la partícula, lo mismo que su aceleración, pueden expresarse en función de sus componentes **i**, **j**, **k**, figura 13-5. Al aplicar la ecuación de movimiento, tenemos

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}; \quad \Sigma F_x\mathbf{i} + \Sigma F_y\mathbf{j} + \Sigma F_z\mathbf{k} = m(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})$$

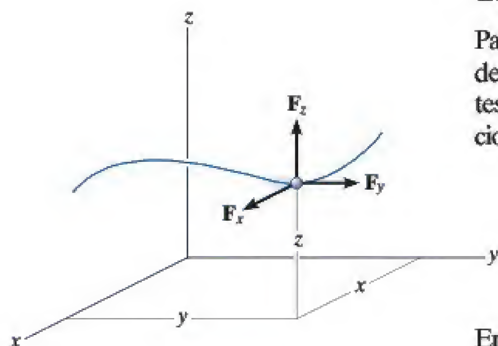


Fig. 13-5

Para que esta ecuación se satisfaga, los componentes **i**, **j**, **k** respectivos del lado izquierdo deben ser iguales a los componentes correspondientes del lado derecho. Por consiguiente, podemos escribir las tres ecuaciones escalares siguientes:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= ma_x \\ \Sigma F_y &= ma_y \\ \Sigma F_z &= ma_z \end{aligned} \qquad (13\text{-}7)$$

En particular, si la partícula está limitada a moverse sólo en el plano x-y, entonces se utilizan las primeras dos de estas ecuaciones para especificar el movimiento.

Procedimiento para el análisis

Las ecuaciones de movimiento se utilizan para resolver problemas que requieren una relación entre las fuerzas que actúan en una partícula y el movimiento acelerado que ocasionan.

Diagrama de cuerpo libre.

- Seleccione el sistema de coordenadas inercial. Por lo general se eligen coordenadas x, y, z para analizar problemas en los cuales la partícula tiene *movimiento rectilíneo*.
- Una vez que se establecen las coordenadas, trace el diagrama de cuerpo libre de la partícula. Trazar este diagrama es *muy importante* puesto que proporciona una representación gráfica que incluye *todas las fuerzas* ($\Sigma\mathbf{F}$) que actúan en la partícula y por lo tanto es posible descomponer estas fuerzas en sus componentes x, y, z.
- La dirección y sentido de la aceleración **a** de la partícula también debe establecerse. Si se desconoce el sentido, por conveniencia matemática suponga que el sentido de cada componente de aceleración actúa en la *misma dirección* que su eje de coordenadas inercial *positivo*.
- La aceleración puede representarse como el vector $m\mathbf{a}$ en el diagrama cinético.*
- Identifique las incógnitas en el problema.

*Es una convención en este texto utilizar siempre el diagrama cinético como auxiliar gráfico, cuando se desarrollan las comprobaciones y teoría. La aceleración de la partícula o sus componentes se mostrarán como vectores de color azul cerca del diagrama de cuerpo libre en los ejemplos.

Ecuaciones de movimiento.

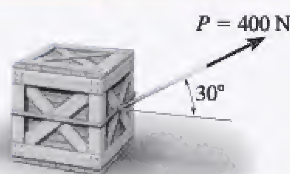
- Si las fuerzas pueden descomponerse directamente con el diagrama de cuerpo libre, aplique las ecuaciones de movimiento en su forma de componentes escalares.
- Si la geometría del problema parece complicada, lo que a menudo ocurre en tres dimensiones, puede utilizarse el análisis vectorial cartesiano para la solución.
- *Fricción.* Si una partícula en movimiento se pone en contacto con una superficie áspera, puede ser necesario utilizar la *ecuación friccional,* la cual relaciona las fuerzas de fricción y normales $\mathbf{F}_f$ y $\mathbf{N}$ que actúan en la superficie de contacto mediante el coeficiente de fricción cinética, es decir, $F_f = \mu_k N$. Recuerde que $\mathbf{F}_f$ siempre actúa en el diagrama de cuerpo libre opuesta al movimiento de la partícula con respecto a la superficie con la que está en contacto. Si la partícula se encuentra *al borde* del movimiento relativo, entonces se utilizará el coeficiente de fricción estática.
- *Resorte.* Si la partícula está conectada a un *resorte elástico* de masa insignificante, la fuerza F_s del resorte puede relacionarse con su deformación por medio de la ecuación $F_s = ks$. Aquí k es la rigidez del resorte medida como una fuerza por unidad de longitud, y s es el alargamiento o compresión definida como la diferencia entre la longitud deformada l y la longitud no deformada l_0, es decir, $s = l - l_0$.

Cinemática.

- Si se tiene que determinar la velocidad o posición de la partícula, se deben aplicar las ecuaciones cinemáticas necesarias una vez que se determina la aceleración de la partícula con $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$.
- Si la *aceleración* es una función del tiempo, use $a = dv/dt$ y $v = ds/dt$ las cuales, cuando se integran, resultan la velocidad y posición de la partícula, respectivamente.
- Si la *aceleración* es una función del desplazamiento, integre $a\,ds = v\,dv$ para obtener la velocidad en función de la posición.
- Si la *aceleración es constante*, use $v = v_0 + a_c t$, $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_c t^2$, $v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$ para determinar la velocidad o posición de la partícula.
- Si el problema implica el movimiento dependiente de varias partículas, use el método descrito en la sección 12.9 para relacionar sus aceleraciones. En todos los casos, asegúrese de que las direcciones de las coordenadas inerciales positivas sean las mismas que las que se utilizaron para escribir las ecuaciones de movimiento; de lo contrario, la solución simultánea de las ecuaciones conducirá a errores.
- Si la solución para un componente vectorial desconocido da un escalar negativo, ello indica que el componente actúa en la dirección opuesta a la supuesta.

13

EJEMPLO 13.1



(a)

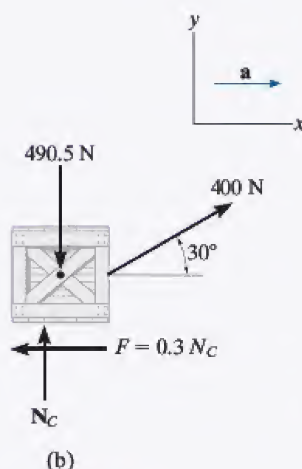
El embalaje de 50 kg mostrado en la figura 13-6*a* descansa sobre una superficie horizontal cuyo coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.3$. Si el embalaje se somete a una fuerza de tracción de 400 N como se muestra, determine su velocidad en 3 s a partir del punto de reposo.

SOLUCIÓN

Si utilizamos las ecuaciones de movimiento, podemos relacionar la aceleración del embalaje con la fuerza que ocasiona el movimiento. La velocidad del embalaje se determina entonces por medio de cinemática.

Diagrama de cuerpo libre. El peso del embalaje es $W = mg = 50 \text{ kg } (9.81 \text{ m/s}^2) = 490.5 \text{ N}$. Como se muestra en la figura 13-6*b*, la magnitud de la fuerza de fricción es $F = \mu_k N_C$ y actúa hacia la izquierda, puesto que se opone al movimiento del embalaje. Se supone que la aceleración **a** actúa horizontalmente, en la dirección *x* positiva. Existen dos incógnitas, o sea, N_C y a.

Ecuaciones de movimiento. Con los datos mostrados en el diagrama de cuerpo libre, tenemos



(b)

Fig. 13-6

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad 400 \cos 30° - 0.3N_C = 50a \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad N_C - 490.5 + 400 \text{ sen } 30° = 0 \qquad (2)$$

Al resolver la ecuación 2 para N_C y sustituir el resultado en la ecuación 1, y al resolver para a se obtiene

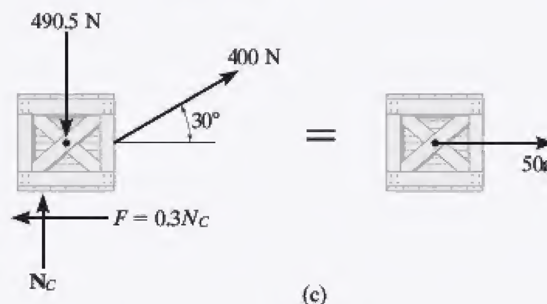
$$N_C = 290.5 \text{ N}$$

$$a = 5.185 \text{ m/s}^2$$

Cinemática. Observe que la aceleración es *constante*, ya que la fuerza aplicada **P** también lo es. Como la velocidad inicial es cero, la velocidad del embalaje en 3 s es

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad v = v_0 + a_c t = 0 + 5.185(3)$$

$$= 15.6 \text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$



(c)

NOTA: también podemos utilizar el procedimiento alternativo de trazar el diagrama de cuerpo libre y el diagrama cinético del embalaje, figura 13-6*c*, antes de aplicar las ecuaciones de movimiento.

EJEMPLO 13.2

Se dispara verticalmente un proyectil de 10 kg desde el suelo, con una velocidad inicial de 50 m/s, figura 13-7*a*. Determine la altura máxima a la que llegará si (*a*) se ignora la resistencia atmosférica y (*b*) la resistencia atmosférica se mide como $F_D = (0.01v^2)$ N, donde v es la rapidez del proyectil en cualquier instante, medida en m/s.

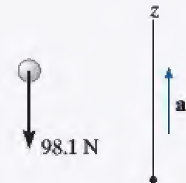


(a)

SOLUCIÓN

En ambos casos la fuerza conocida que actúa en el proyectil puede relacionarse con su aceleración por medio de la ecuación de movimiento. Puede utilizarse entonces la cinemática para relacionar la aceleración del proyectil con su posición.

Parte (a) Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 13-7*b*, el peso del proyectil es $W = mg = 10(9.81) = 98.1$ N. Supondremos que la aceleración **a** desconocida actúa hacia arriba en la dirección *z positiva*.



(b)

Ecuación de movimiento.

$$+\uparrow \Sigma F_z = ma_z; \qquad -98.1 = 10a, \qquad a = -9.81 \text{ m/s}^2$$

El resultado indica que el proyectil, como todo objeto que tiene movimiento de vuelo libre cerca de la superficie terrestre, se ve sometido a una aceleración *constante* dirigida hacia abajo de 9.81 m/s².

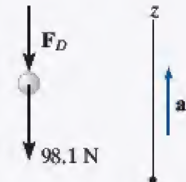
Cinemática. Inicialmente $z_0 = 0$ y $v_0 = 50$ m/s y a la altura máxima $z = h$, $v = 0$. Como la aceleración es *constante*, entonces

$$(+\uparrow) \qquad v^2 = v_0^2 + 2a_c(z - z_0)$$

$$0 = (50)^2 + 2(-9.81)(h - 0)$$

$$h = 127 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

Parte (b) Diagrama de cuerpo libre. Como la fuerza $F_D = (0.01v^2)$ N tiende a retardar el movimiento hacia arriba del proyectil, actúa hacia abajo como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, figura 13-7*c*.



(c)

Fig. 13-7

Ecuación de movimiento.

$$+\uparrow \Sigma F_z = ma_z; \quad -0.01v^2 - 98.1 = 10a, \quad a = -(0.001v^2 + 9.81)$$

Cinemática. Aquí la aceleración *no* es *constante* puesto que F_D depende de la velocidad. Como $a = f(v)$, podemos relacionar a con la posición mediante

$$(+\uparrow)\ a\,dz = v\,dv; \qquad -(0.001v^2 + 9.81)\,dz = v\,dv$$

Al separar las variables e integrarlas, y como inicialmente $z_0 = 0$, $v_0 = 50$ m/s (positiva hacia arriba), y en $z = h$, $v = 0$, tenemos

$$\int_0^h dz = -\int_{50}^{0} \frac{v\,dv}{0.001v^2 + 9.81} = -500 \ln(v^2 + 9810)\Big|_{50 \text{ m/s}}^{0}$$

$$h = 114 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

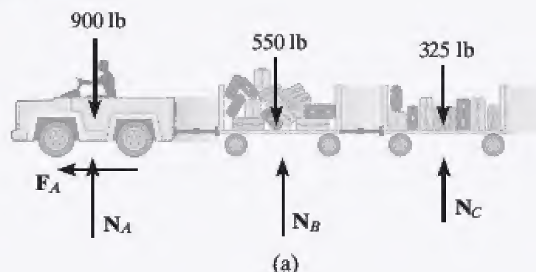
NOTA: la respuesta indica una altura más baja que la obtenida en la parte (*a*) debido la resistencia atmosférica o resistencia al avance.

13

EJEMPLO 13.3



El furgón de equipajes A que se muestra en la foto pesa 900 lb y remolca un carro B de 550 lb y un carro C de 325 lb. Durante un corto tiempo la fuerza de fricción desarrollada en las ruedas del furgón es $F_A = (40t)$ lb, donde t está en segundos. Si el furgón arranca del punto de reposo, determine su rapidez en 2 segundos. También, ¿cuál es la fuerza horizontal que actúa en el acoplamiento entre el furgón y el carro B en este instante? Ignore el tamaño del furgón y de los carros.



(a)

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 13-8*a*, es la fuerza de fricción la que acelera tanto al furgón como a los carros. En este caso consideramos los tres vehículos como un solo sistema.

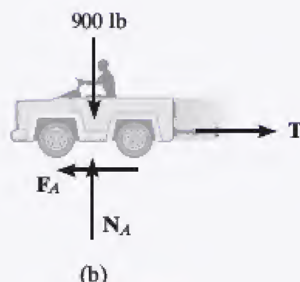
Ecuación de movimiento. Se tiene que considerar sólo el movimiento en la dirección horizontal.

$$\stackrel{+}{\leftarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad 40t = \left(\frac{900 + 550 + 325}{32.2}\right)a$$

$$a = 0.7256t$$

Cinemática. Como la aceleración es una función del tiempo, la velocidad del furgón se obtiene con $a = dv/dt$ con la condición inicial de que $v_0 = 0$ en $t = 0$. Tenemos

$$\int_0^v dv = \int_0^{2\text{ s}} 0.7256t\, dt; \quad v = 0.3628t^2\Big|_0^{2\text{ s}} = 1.45 \text{ pies/s} \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

Fig. 13-8

Diagrama de cuerpo libre. Para determinar la fuerza entre el furgón y el carro B consideraremos un diagrama de cuerpo libre del furgón para que podamos "exponer" la fuerza de acoplamiento **T** como externa al diagrama de cuerpo libre, figura 13-8*b*.

Ecuación de movimiento. Cuando $t = 2$ s, entonces

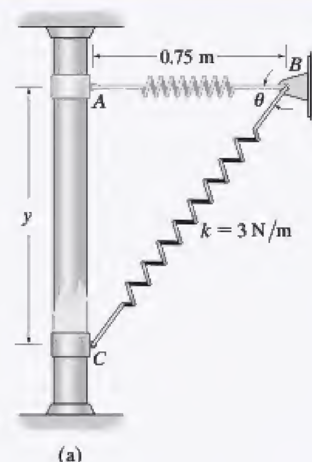
$$\stackrel{+}{\leftarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad 40(2) - T = \left(\frac{900}{32.2}\right)[0.7256(2)]$$

$$T = 39.4 \text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

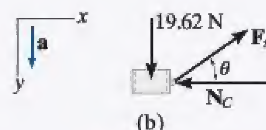
NOTA: pruebe y obtenga este mismo resultado al considerar un diagrama de cuerpo libre de los carros B y C como un solo sistema.

EJEMPLO 13.4

Un collar liso de 2 kg C, como se muestra en la figura 13-9a, está conectado a un resorte que tiene una rigidez de $k = 3$ N/m y una longitud sin alargar de 0.75 m. Si el collar se suelta del reposo en A, determine su aceleración y la fuerza normal de la barra en él en el instante $y = 1$ m.



(a)



(b)

Fig. 13-9

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre del collar cuando está en la posición arbitraria y se muestra en la figura 13-9b. Además, se *supone* que el collar se acelera de modo que "**a**" actúa hacia abajo en la dirección y *positiva*. Existen cuatro incógnitas, a saber, N_C, F_s, a y θ.

Ecuaciones de movimiento.

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = ma_x; \qquad -N_C + F_s \cos\theta = 0 \qquad (1)$$

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad 19.62 - F_s \operatorname{sen}\theta = 2a \qquad (2)$$

A partir de la ecuación 2 se ve que la aceleración depende de la magnitud y la dirección de la fuerza del resorte. La solución para N_C y a es posible una vez que se conocen F_s y θ.

La magnitud de la fuerza del resorte es una función del alargamiento s del resorte; es decir, $F_s = ks$. En este caso la longitud no alargada es $AB = 0.75$ m, figura 13-9a, por consiguiente, $s = CB - AB = \sqrt{y^2 + (0.75)^2} - 0.75$. Como $k = 3$ N/m, entonces

$$F_s = ks = 3\left(\sqrt{y^2 + (0.75)^2} - 0.75\right) \qquad (3)$$

Por la figura 13-9a, el ángulo θ está relacionado con y por trigonometría.

$$\tan\theta = \frac{y}{0.75} \qquad (4)$$

Al sustituir $y = 1$ m en las ecuaciones 3 y 4 se obtiene $F_s = 1.50$ N y $\theta = 53.1°$. Al sustituir estos resultados en las ecuaciones 1 y 2, obtenemos

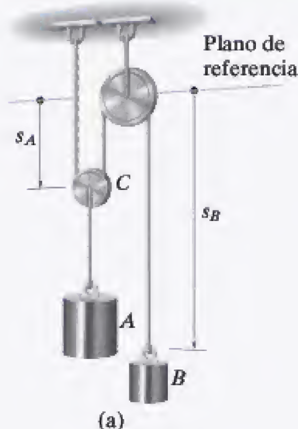
$$N_C = 0.900 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

$$a = 9.21 \text{ m/s}^2 \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: éste no es un caso de aceleración constante, puesto que la fuerza del resorte cambia tanto de magnitud como de dirección a medida que el collar se mueve hacia abajo.

13

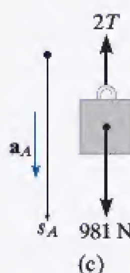
EJEMPLO 13.5



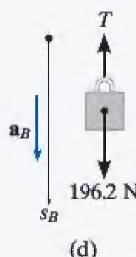
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 13-10

El bloque A de 100 kg en la figura 13-10a se suelta del punto de reposo. Si no se toman en cuenta las masas de las poleas y la cuerda, determine la rapidez del bloque B de 20 kg en 2 s.

SOLUCIÓN

Diagramas de cuerpo libre. Como la masa de las poleas se *ignora*, entonces para la polea C, $ma = 0$ y podemos aplicar $\Sigma F_y = 0$ como se muestra en la figura 13-10b. En la figura 13-10c y d se muestran los diagramas de cuerpo libre de los bloques A y B, respectivamente. Observe que para que A permanezca estacionario $T = 490.5$ N, mientras que para que B permanezca estático $T = 196.2$ N. De ahí que A se moverá hacia abajo mientras que B se mueve hacia arriba. Aunque éste es el caso, supondremos que ambos bloques se aceleran hacia abajo, en la dirección de $+s_A$ y $+s_B$. Las tres incógnitas son T, a_A y a_B.

Ecuaciones de movimiento. Bloque A,

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad 981 - 2T = 100a_A \qquad (1)$$

Bloque B,

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad 196.2 - T = 20a_B \qquad (2)$$

Cinemática. La tercera ecuación necesaria se obtiene al relacionar a_A con a_B por medio de un análisis de movimiento dependiente, analizado en la sección 12.9. Las coordenadas s_A y s_B en la figura 13-10a miden las posiciones de A y B con respecto al plano de referencia fijo. Se ve que

$$2s_A + s_B = l$$

donde l es constante y representa la longitud vertical total de la cuerda. Al diferenciar esta expresión dos veces con respecto al tiempo se obtiene

$$2a_A = -a_B \qquad (3)$$

Observe que cuando se escribieron las ecuaciones 1 a 3, la *dirección positiva siempre se supuso hacia abajo*. Es muy importante ser *consistentes* en esta suposición, puesto que buscamos una solución simultánea de las ecuaciones. Los resultados son

$$T = 327.0 \text{ N}$$
$$a_A = 3.27 \text{ m/s}^2$$
$$a_B = -6.54 \text{ m/s}^2$$

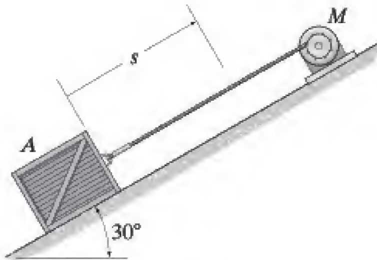
De ahí que cuando el bloque A se acelera *hacia abajo*, el bloque B se acelera *hacia arriba* como se esperaba. Como a_B es constante, la velocidad del bloque B en 2 s es, por tanto,

$$(+\downarrow) \qquad v = v_0 + a_B t$$
$$= 0 + (-6.54)(2)$$
$$= -13.1 \text{ m/s} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

El signo negativo indica que el bloque B se mueve hacia arriba.

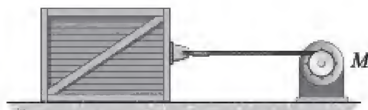
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F13-1. El malacate enrolla el cable con una aceleración constante de modo que el embalaje de 20 kg se mueve una distancia $s = 6$ m en 3 s, a partir del punto de reposo. Determine la tensión desarrollada en el cable. El coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y el plano es $\mu_k = 0.3$.



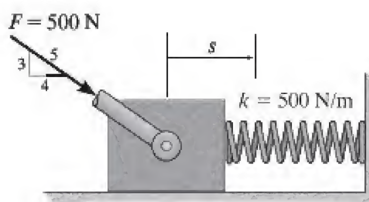
F13-1

F13-2. Si el motor M ejerce una fuerza $F = (10t^2 + 100)$ N en el cable, donde t está en segundos, determine la velocidad del embalaje de 25 kg cuando $t = 4$ s. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el embalaje y el plano son $\mu_s = 0.3$ y $\mu_k = 0.25$, respectivamente. En un inicio el embalaje está en reposo.



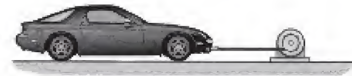
F13-2

F13-3. Un resorte de rigidez $k = 500$ N/m está montado contra el bloque de 10 kg. Si éste se somete a la fuerza de $F = 500$ N, determine su velocidad en $s = 0.5$ m. Cuando $s = 0$, el bloque está en reposo y el resorte no está comprimido. La superficie de contacto es lisa.



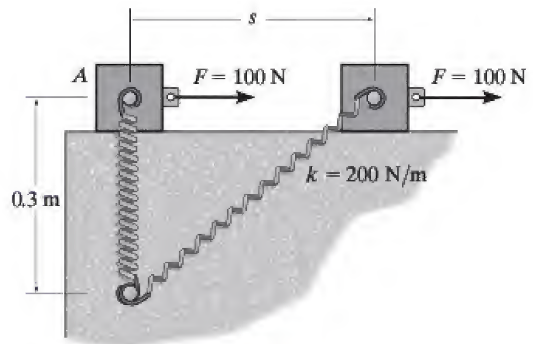
F13-3

F13-4. Al automóvil de 2 Mg lo remolca un malacate. Si éste ejerce una fuerza de $T = (100s)$ N en el cable, donde s es el desplazamiento del automóvil en metros, determine la rapidez del automóvil cuando $s = 10$ m, a partir del punto de reposo. Ignore la resistencia al rodamiento del automóvil.



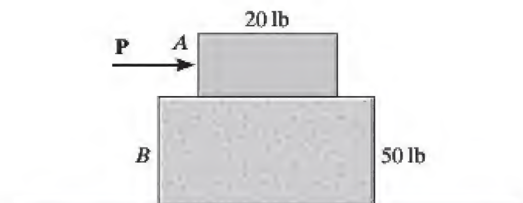
F13-4

F13-5. La rigidez del resorte es $k = 200$ N/m y no está estirado cuando el bloque de 25 kg está en A. Determine la aceleración del bloque cuando $s = 0.4$ m. La superficie de contacto entre el bloque y el plano es lisa.



F13-5

F13-6. El bloque B descansa sobre una superficie lisa. Si los coeficientes de fricción cinética y estática entre A y B son $\mu_s = 0.4$ y $\mu_k = 0.3$, respectivamente, determine la aceleración de cada bloque si $P = 6$ lb.

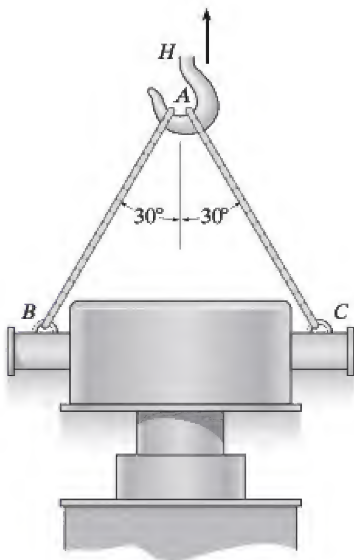


F13-6

13

PROBLEMAS

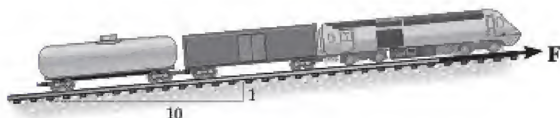
•**13-1.** La pieza fundida tiene una masa de 3 Mg. Suspendida en una posición vertical e inicialmente en reposo, se le imprime una rapidez de levantamiento de 200 mm/s en 0.3 s por medio del gancho de una grúa H. Determine la tensión en los cables AC y AB durante este intervalo si la aceleración es constante.



Prob. 13-1

13-2. El tren de 160 Mg viaja con una rapidez de 80 km/h cuando comienza a subir la pendiente. Si la máquina ejerce una fuerza de tracción **F** de 1/20 del peso del tren y la resistencia al rodamiento $\mathbf{F}_D$ es igual a 1/500 del peso del tren, determine su desaceleración.

13-3. El tren de 160 Mg parte del punto de reposo y comienza a subir la pendiente como se muestra. Si la máquina ejerce una fuerza de tracción **F** de 1/8 del peso del tren, determine su rapidez cuando haya recorrido 1 km pendiente arriba. Ignore la resistencia al rodamiento.



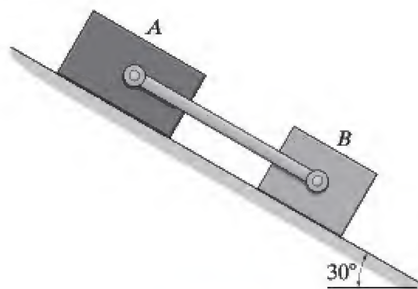
Probs. 13-2/3

*__13-4.__ El camión de 2 Mg viaja a 15 km/s cuando se aplican los frenos en todas las ruedas, lo que hace que patine una distancia de 10 m antes de detenerse. Determine la fuerza horizontal constante desarrollada en el acoplamiento C y la fuerza de fricción desarrollada entre las llantas del camión y la carretera durante este tiempo. La masa total del bote y el remolque es de 1 Mg.



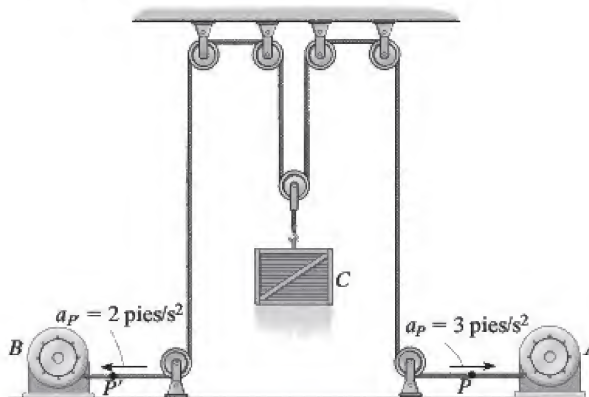
Prob. 13-4

•**13-5.** Si los bloques A y B de 10 kg y 6 kg de masa, respectivamente, se colocan sobre el plano inclinado y se sueltan, determine la fuerza desarrollada en el eslabón. Los coeficientes de fricción cinética entre los bloques y el plano inclinado son $\mu_A = 0.1$ y $\mu_B = 0.3$. Ignore la masa del eslabón.



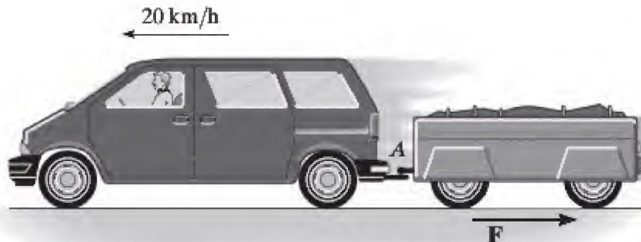
Prob. 13-5

13-6. Los motores A y B tiran del cable con las aceleraciones mostradas. Determine la aceleración del embalaje C de 300 lb y la tensión desarrollada en el cable. Ignore la masa de las poleas.



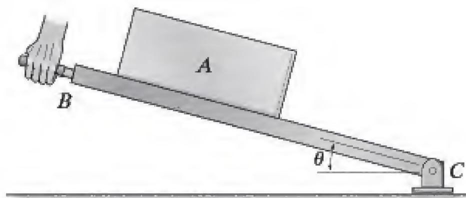
Prob. 13-6

13-7. La vagoneta viaja a 20 km/h cuando el acoplamiento del remolque en A falla. Si la masa del remolque es de 250 kg y recorre 45 m antes de detenerse, determine la fuerza horizontal constante F creada por la fricción de rodamiento que hace que el remolque se detenga.



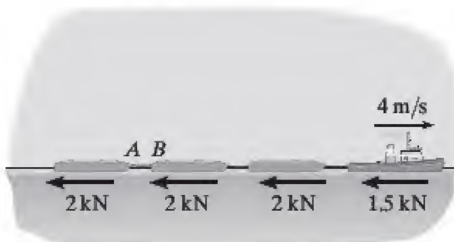
Prob. 13-7

***13-8.** Si el bloque A de 10 lb se desliza hacia abajo del plano a una velocidad constante cuando $\theta = 30°$, determine su aceleración cuando $\theta = 45°$.



Prob. 13-8

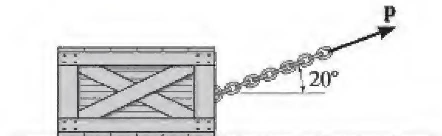
•**13-9.** La masa de cada una de las tres barcazas es de 30 Mg, mientras que la del remolcador es de 12 Mg. Al remolcar las barcazas a 4 m/s con velocidad constante, el remolcador debe vencer la resistencia de rozamiento del agua, la cual es de 2 kN para cada una de las barcazas, y de 1.5 kN para el remolcador. Si el cable entre A y B se rompe, determine la aceleración del remolcador.



Prob. 13-9

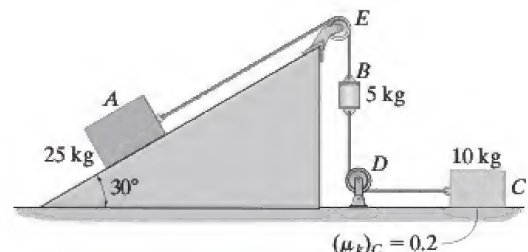
13-10. El embalaje tiene una masa de 80 kg y lo remolca una cadena dirigida siempre a 20° desde la horizontal, como se muestra. Si la magnitud de **P** se incrementa hasta que la grúa comienza a deslizarse, determine la aceleración inicial del embalaje si el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.5$ y el de fricción cinética es $\mu_k = 0.3$.

13-11. El embalaje tiene una masa de 80 kg y lo remolca una cadena dirigida siempre a 20° desde la horizontal, como se muestra. Determine la aceleración del embalaje en $t = 2$ s si el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.4$ y el de fricción cinética es $\mu_k = 0.3$, y la fuerza de remolque es $P = (90t^2)$ N, donde t está en segundos.



Probs. 13-10/11

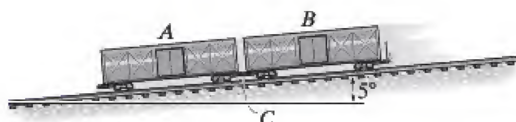
***13-12.** Determine la aceleración del sistema y la tensión en cada cable. El plano inclinado es liso y el coeficiente de fricción cinética entre la superficie horizontal y el bloque C es $(\mu_k)_C = 0.2$.



Prob. 13-12

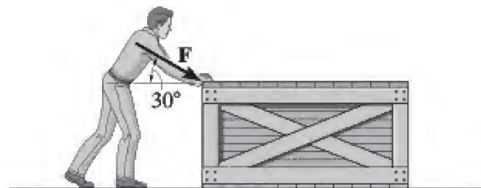
13

•**13-13.** Los dos vagones *A* y *B* pesan 20 000 lb y 30 000 lb, respectivamente. Si ruedan libremente pendiente abajo cuando se aplican los frenos a todas las ruedas del vagón *A* lo que lo hace patinar, determine la fuerza en el enganche *C* entre los dos carros. El coeficiente de fricción cinética entre las ruedas de *A* y los rieles es $\mu_k = 0.5$. Las ruedas del carro *B* giran libremente. Ignore su masa en el cálculo. *Sugerencia:* resuelva el problema por representación de las fuerzas normales resultantes únicas que actúan en *A* y *B*, respectivamente.



Prob. 13-13

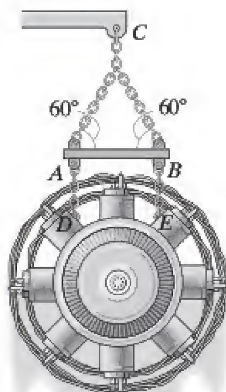
***13-16.** El hombre empuja el embalaje de 60 lb con una fuerza **F**. La dirección de la fuerza siempre es hacia abajo a 30° de la horizontal como se muestra, y su magnitud se incrementa hasta que el embalaje comienza a deslizarse. Determine su aceleración inicial si el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.6$ y el de fricción cinética s $\mu_k = 0.3$.



Prob. 13-16

13-14. El motor de 3.5 Mg está suspendido de una viga *AB* cuya masa no se toma en cuenta y es izado por una grúa que le imprime una aceleración de 4 m/s^2 cuando su velocidad es de 2 m/s. Determine la fuerza en las cadenas *CA* y *CB* durante el izamiento.

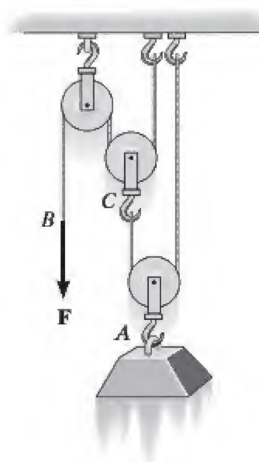
13-15. El motor de 3.5 Mg está suspendido de una viga *AB* cuya masa no se toma en cuenta y es izado por una grúa, la cual ejerce una fuerza de 40 kN sobre el cable de izamiento. Determine la distancia que el motor es izado en 4 s a partir del punto de reposo.



Probs. 13-14/15

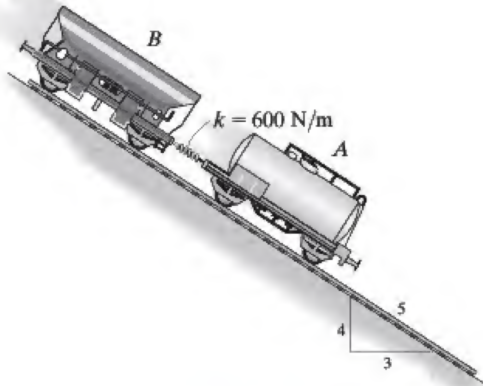
•**13-17.** Se aplica una fuerza $F = 15$ lb a la cuerda. Determine qué tan alto se eleva el bloque *A* de 30 lb en 2 s a partir del punto de reposo. Ignore el peso de las poleas y la cuerda.

13-18. Determine la fuerza constante **F** que debe aplicarse a la cuerda para que el bloque *A* de 30 lb tenga una rapidez de 12 pies/s cuando se ha desplazado 3 pies hacia arriba a partir del punto de reposo. Ignore el peso de las poleas y la cuerda.



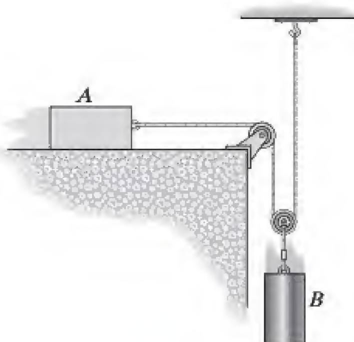
Probs. 13-17/18

13-19. El carro B de 800 kg está enganchado al carro A de 350 kg mediante un acoplamiento de resorte. Determine el alargamiento en el resorte si (a) las ruedas de ambos ruedan libremente y (b) se aplican los frenos a las cuatro ruedas del carro B, lo que hace que patinen. Considere $(\mu_k)_B = 0.4$. Ignore la masa de las ruedas.



Prob. 13-19

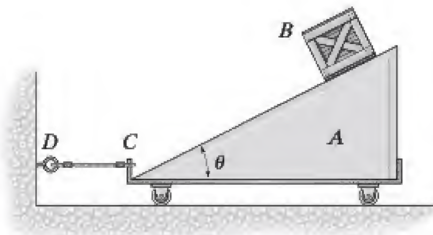
***13-20.** El bloque A de 10 lb se desplaza hacia la derecha a $v_A = 2$ pies/s en el instante mostrado. Si el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.2$ entre la superficie y A, determine la velocidad de A cuando se ha desplazado 4 pies. El bloque B pesa 20 lb.



Prob. 13-20

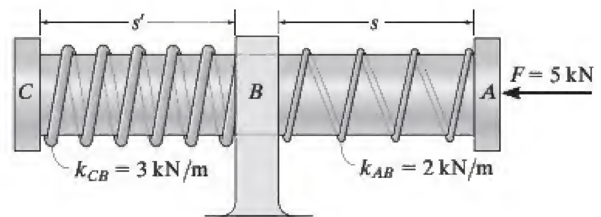
•**13-21.** El bloque B tiene una masa m y se le suelta desde el punto de reposo cuando está en la parte superior de la carretilla A, la cual tiene una masa de $3m$. Determine la tensión en la cuerda CD necesaria para evitar que la carretilla B se mueva mientras se desliza hacia abajo de A. Ignore la fricción.

13-22. El bloque B tiene una masa m y se le suelta desde el punto de reposo cuando está en la parte superior de la carretilla A, la cual tiene una masa de $3m$. Determine la tensión en la cuerda CD necesaria para evitar que la carretilla B se mueva mientras se desliza hacia abajo de A. El coeficiente de fricción cinética entre A y B es μ_k.



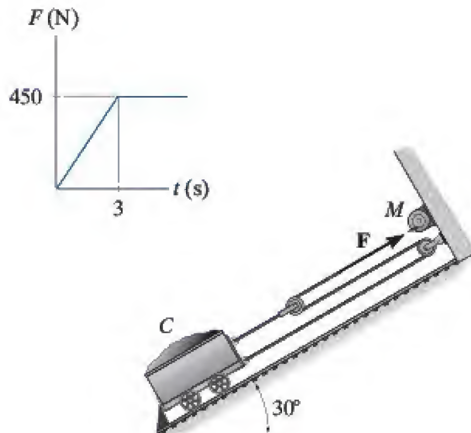
Probs. 13-21/22

13-23. La flecha CA de 2 kg pasa a través de una chumacera lisa en B. Inicialmente, los resortes, que están enrollados libremente alrededor de la flecha, no lo están cuando no se aplica fuerza alguna a la flecha. En esta posición $s = s' = 250$ mm y la flecha está en reposo. Si se aplica una fuerza horizontal $F = 5$ kN, determine la rapidez de la flecha en el instante $s = 50$ mm, $s' = 450$ mm. Los extremos de los resortes están sujetos a la chumacera en B y las tapas en C y A.



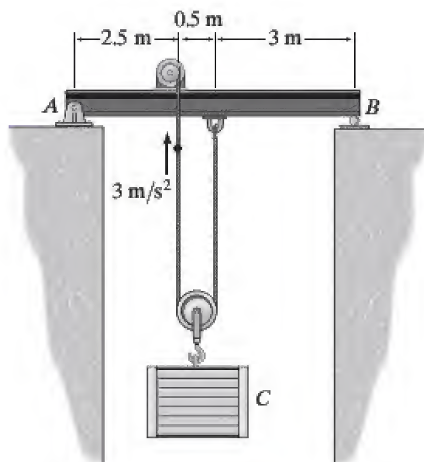
Prob. 13-23

***13-24.** Si la fuerza del motor M en el cable se muestra en la gráfica, determine la velocidad del carro cuando $t = 3$ s. La carga y el carro tienen una masa de 200 kg y el carro comienza a moverse desde el punto de reposo.



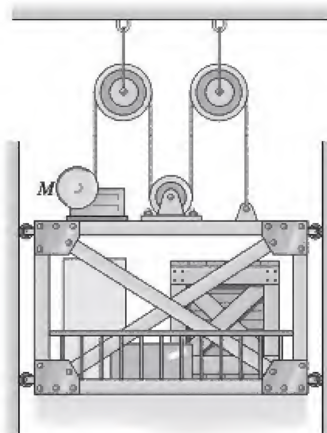
Prob. 13-24

•13-25. Si el motor enrolla el cable con una aceleración de 3 m/s^2, determine las reacciones en los soportes A y B. La viga tiene una masa uniforme de 30 kg/m y el embalaje una de 200 kg. Ignore la masa del motor y las poleas.



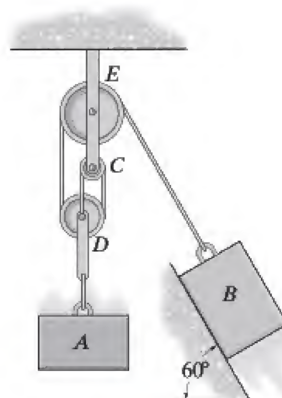
Prob. 13-25

13-26. Un elevador de carga, incluida su carga, tiene una masa de 500 kg. El riel y las ruedas montadas en sus costados evitan que gire. Cuando $t = 2$ s, el motor M enrolla el cable con una rapidez de 6 m/s, *medida con respecto al elevador*. Si comienza a moverse desde el punto de reposo, determine la constante de aceleración del elevador y la tensión en el cable. Ignore la masa de las poleas, el motor y los cables.



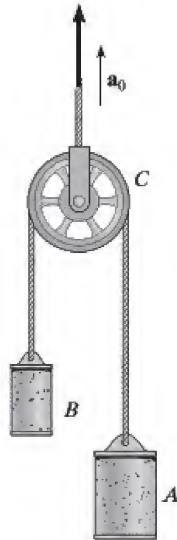
Prob. 13-26

13-27. Determine la masa requerida del bloque A de modo que cuando se le suelte desde el reposo mueva el bloque B de 5 kg una distancia de 0.75 m hacia arriba del plano inclinado en $t = 2$ s. Ignore la masa de las poleas y las cuerdas.



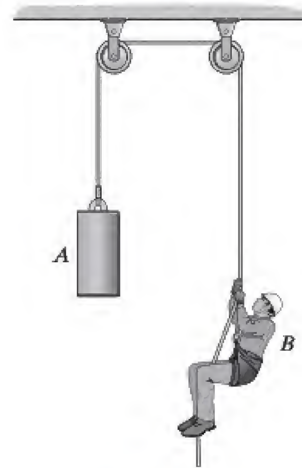
Prob. 13-27

***13-28.** Los bloques A y B tienen una masa de m_A y m_B, donde $m_A > m_B$. Si la polea C les imprime una aceleración de $\mathbf{a}_0$, determine la aceleración de los bloques. Ignore la masa de la polea.



Prob. 13-28

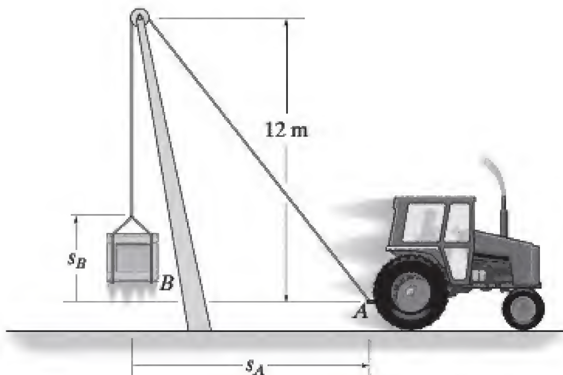
13-31. El hombre de 75 kg sube por la cuerda con una aceleración de 0.25 m/s^2, medida con respecto a la cuerda. Determine la tensión en la cuerda y la aceleración del bloque de 80 kg.



Prob. 13-31

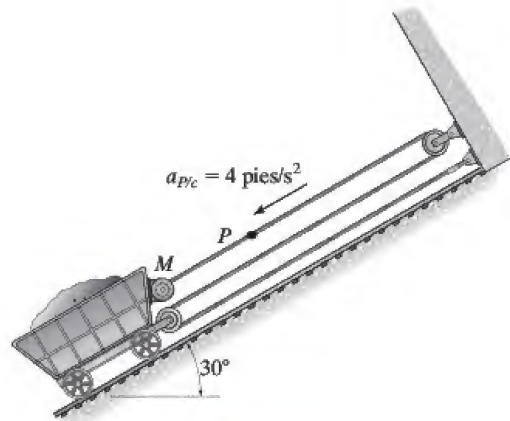
•13-29. Se utiliza el tractor para levantar la carga B de 150 kg con el sistema de una cuerda de 24 m de largo, pluma y polea. Si el tractor se desplaza hacia la derecha a una rapidez constante de 4 m/s, determine la tensión en la cuerda cuando $s_A = 5$ m. Cuando $s_A = 0$, $s_B = 0$.

13-30. Se utiliza el tractor para levantar la carga B de 150 kg con el sistema de una cuerda de 24 m de largo, pluma y polea. Si el tractor se desplaza hacia la derecha con una aceleración de 3 m/s^2 y tiene una velocidad de 4 m/s en el instante cuando $s_A = 5$ m, determine la tensión en la cuerda en este instante. Cuando $s_A = 0$, $s_B = 0$.



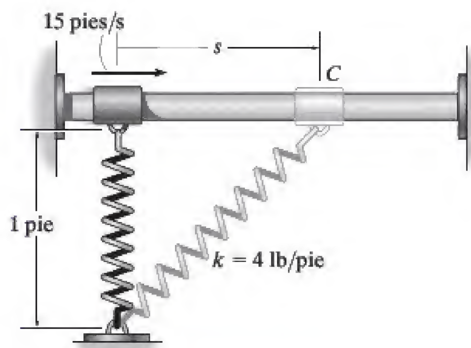
Probs. 13-29/30

***13-32.** El motor M enrolla el cable con una aceleración de 4 pies/s^2, medida con respecto a la vagoneta de mina de 200 lb. Determine la aceleración de la vagoneta y la tensión en el cable. Ignore la masa de las poleas.



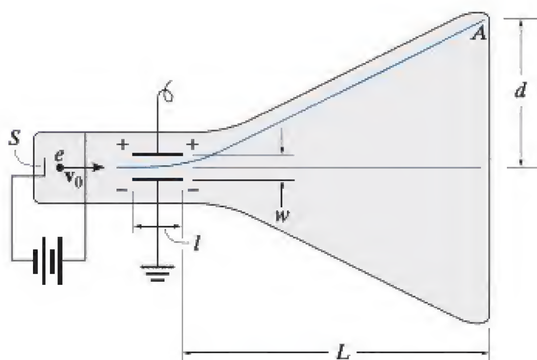
Prob. 13-32

•13-33. El anillo de 2 lb C ajusta flojo en la flecha lisa. Si el resorte no está alargado cuando $s = 0$ y al anillo se le imprime una velocidad de 15 pies/s, determine la velocidad del anillo cuando $s = 1$ pie.



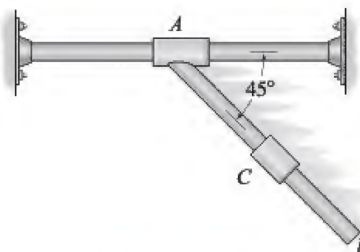
Prob. 13-33

13-34. En el tubo de rayos catódicos, una fuente S emite electrones de masa m y comienzan a desplazarse horizontalmente a una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$. Mientras pasan entre las placas de la rejilla a una distancia l, se someten a una fuerza vertical de magnitud eV/w, donde e es la carga de un electrón, V el voltaje aplicado que actúa a través de las placas y w la distancia entre las placas. Después de las placas, los electrones viajan en líneas rectas y chocan con la pantalla en A. Determine la deflexión d de los electrones en función de las dimensiones del voltaje de placa y tubo. Ignore la gravedad, la cual provoca una leve deflexión vertical cuando el electrón viaja desde S hasta la pantalla y la leve deflexión entre las placas.



Prob. 13-34

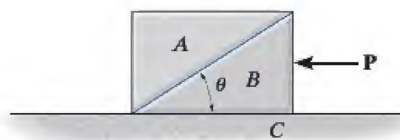
13-35. El anillo C de 2 kg se desliza libremente a lo largo de la flecha lisa AB. Determine la aceleración del anillo C si (a) la flecha no se mueve, (b) el anillo A, el cual está fijo en la flecha AB, se mueve hacia la izquierda a una velocidad constante a lo largo de la guía horizontal y (c) el anillo A se somete a una aceleración de 2 m/s^2 hacia la izquierda. En todos los casos, el movimiento ocurre en el plano vertical.



Prob. 13-35

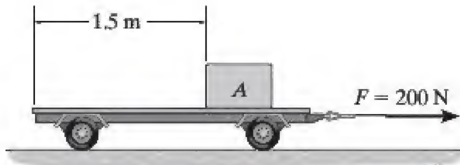
***13-36.** La masa de los bloques A y B es m. Determine la fuerza horizontal $\mathbf{P}$ máxima que puede aplicarse a B de modo que A no se mueva con respecto a B. Todas las superficies son lisas.

•13-37. La masa de los bloques A y B es m. Determine la fuerza horizontal $\mathbf{P}$ máxima que puede aplicarse a B de modo que A no se deslice con respecto a B. El coeficiente de fricción estática entre A y B es μ_s. Ignore cualquier fricción entre B y C.



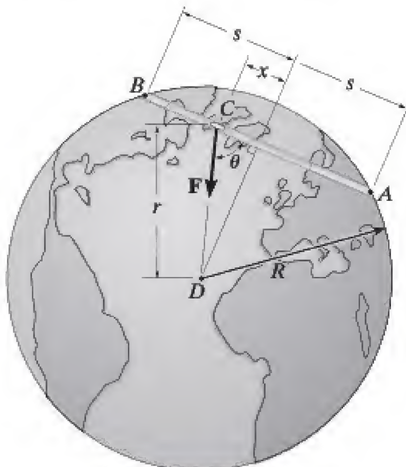
Probs. 13-36/37

13-38. Si se aplica una fuerza $F = 200$ N a la carretilla de 30 kg, demuestre que el bloque A de 20 kg se deslizará sobre ella. También determine el tiempo para que el bloque A se mueva sobre la carretilla 1.5 m. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el bloque y la carretilla son $\mu_s = 0.3$ y $\mu_k = 0.25$. Tanto la carretilla como el bloque parten del punto de reposo.



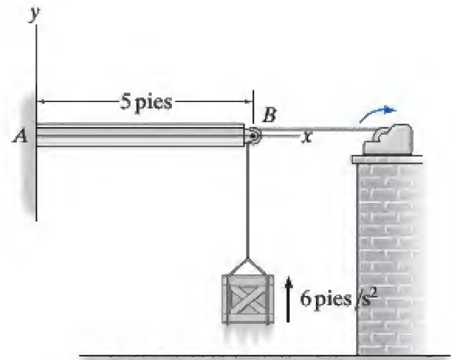
Prob. 13-38

13-39. Suponga que es posible perforar un túnel a través de la Tierra desde la ciudad A hasta una ciudad B como se muestra. Por la teoría de la gravitación, cualquier vehículo C de masa m dentro del túnel se vería sometido a una fuerza gravitatoria dirigida siempre hacia el centro D de la Tierra. La magnitud de esta fuerza **F** es directamente proporcional a su distancia r al centro de la Tierra. De ahí que, si el vehículo pesa $W = mg$ cuando se encuentra sobre la superficie terrestre, entonces en una posición arbitraria r la magnitud de la fuerza **F** es $F = (mg/R)r$, donde $R = 6328$ km, el radio de la Tierra. Si el vehículo se suelta desde el punto de reposo cuando está en B, $x = s = 2$ Mm, determine el tiempo requerido para que llegue a A y la velocidad máxima que alcanza. Ignore el efecto de la rotación de la Tierra en el cálculo y suponga que la densidad de ésta es constante. *Sugerencia:* escriba la ecuación de movimiento en la dirección x, teniendo en cuenta que $r\cos\theta = x$. Integre, mediante la relación cinemática $v\,dv = a\,dx$, luego integre el resultado por medio de $v = dx/dt$.



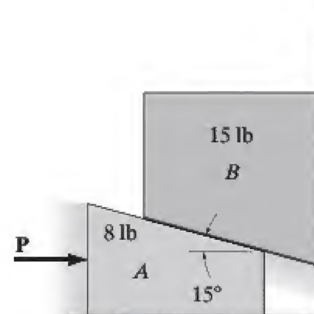
Prob. 13-39

***13-40.** El embalaje de 30 lb se iza con una aceleración constante de 6 pies/s^2. Si el peso de la viga uniforme es de 200 lb, determine los componentes de reacción en el apoyo empotrado A. Ignore el tamaño y masa de la polea B. *Sugerencia:* primero determine la tensión en el cable y luego analice las fuerzas en la viga mediante estática.



Prob. 13-40

•13-41. Si se aplica una fuerza horizontal $P = 10$ lb al bloque A, determine la aceleración del bloque B. Ignore la fricción. *Sugerencia:* demuestre que $a_B = a_A \tan 15°$.



Prob. 13-41

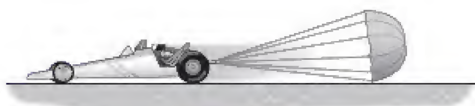
13-42. La masa del bloque A es m_A y está unida a un resorte de rigidez k y longitud no alargada l_0. Si otro bloque B de masa m_B se presiona contra A de modo que el resorte se deforme una distancia d, determine la distancia de deslizamiento de ambos bloques sobre la superficie lisa antes de que comiencen a separarse. ¿Cuál es su velocidad en este instante?

13-43. La masa del bloque A es m_A y está unida a un resorte de rigidez k y longitud no alargada l_0. Si otro bloque B de masa m_B se presiona contra A de modo que el resorte se deforme una distancia d, demuestre que para que se separen es necesario que $d > 2\mu_k g(m_A + m_B)/k$, donde μ_k es el coeficiente de fricción cinética entre los bloques y el suelo. Además, ¿cuál es la distancia de deslizamiento de los bloques sobre la superficie antes de separarse?



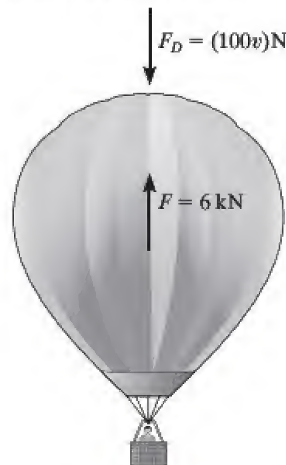
Probs. 13-42/43

***13-44.** El "dragster" de 600 kg se desplaza a una velocidad de 125 m/s cuando el motor se apaga y el paracaídas de frenado se despliega. Si la resistencia del aire impuesta en el "dragster" por el paracaídas es $F_D = (6000 + 0.9v^2)$ N, donde v está en m/s, determine el tiempo requerido para que el "dragster" se detenga.



Prob. 13-44

•13-45. La fuerza de flotación sobre el globo de 500 kg es $F = 6$ kN y la resistencia del aire es $F_D = (100v)$ N, donde v está en m/s. Determine la velocidad terminal o máxima del globo si parte del punto de reposo.



Prob. 13-45

13-46. El paracaidista de masa m cae a una velocidad de v_0 en el instante en que abre el paracaídas. Si la resistencia del aire es $F_D = Cv^2$, determine la velocidad máxima (velocidad terminal) durante el descenso.



Prob. 13-46

13-47. El peso de una partícula varía con la altitud de modo que $W = m(gr_0^2)/r^2$, donde r_0 es el radio de la Tierra y r es la distancia de la partícula al centro de la Tierra. Si la partícula se lanza verticalmente desde la superficie terrestre con una velocidad v_0, determine su velocidad en función de la posición r. ¿Cuál es la velocidad mínima v_0 requerida para escapar del campo gravitatorio terrestre, cuál es $r_{máx}$ y cuál es el tiempo requerido para alcanzar esta altitud?

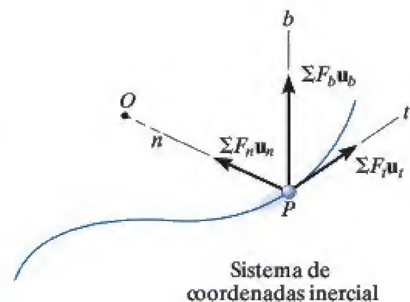
13.5 Ecuaciones de movimiento: coordenadas normales y tangenciales

Cuando una partícula se desplaza a lo largo de una trayectoria curva conocida, su ecuación de movimiento puede escribirse en las direcciones tangencial, normal y binormal, figura 13-11. Observe que la partícula no se mueve en la dirección binormal, puesto que está limitada a moverse a lo largo de la trayectoria. Tenemos

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$
$$\Sigma F_t \mathbf{u}_t + \Sigma F_n \mathbf{u}_n + \Sigma F_b \mathbf{u}_b = m\mathbf{a}_t + m\mathbf{a}_n$$

Esta ecuación se satisface siempre que

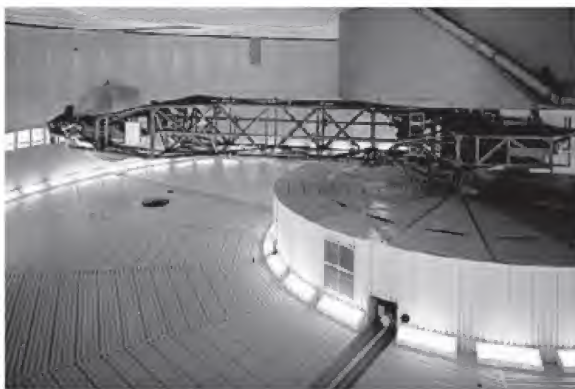
$$\begin{aligned} \Sigma F_t &= ma_t \\ \Sigma F_n &= ma_n \\ \Sigma F_b &= 0 \end{aligned} \qquad (13\text{-}8)$$



Sistema de coordenadas inercial

Fig. 13-11

Recuerde que a_t $(= dv/dt)$ representa el cambio con respecto al tiempo en la magnitud de la velocidad. Por tanto si $\Sigma \mathbf{F}_t$ actúa en la dirección del movimiento, la rapidez de la partícula se incrementará, mientras que si actúa en la dirección opuesta, la partícula se desacelerará. Asimismo, a_n $(= v^2/\rho)$ representa el cambio con respecto al tiempo de la dirección de la velocidad. Es provocada por $\Sigma \mathbf{F}_n$, la que *siempre* actúa en la dirección n positiva, es decir, hacia el centro de curvatura de la trayectoria. Por eso a menudo se conoce como *fuerza centrípeta*.



La centrífuga se utiliza para someter a un pasajero a una aceleración normal muy grande, provocada por la rotación rápida. Tenga en cuenta que esta aceleración es *provocada por* la fuerza normal desbalanceada que el asiento de la centrífuga ejerce sobre el pasajero.

13

Procedimiento para el análisis

Cuando un problema implica el movimiento de una partícula a lo largo de una *trayectoria curva conocida*, en el análisis se utilizarán coordenadas normales y tangenciales puesto que los componentes de aceleración son fáciles de formular. El método para aplicar la ecuación de movimiento, la cual relaciona las fuerzas con las aceleraciones, se describió en el procedimiento explicado en la sección 13.4. Específicamente, para las coordenadas t, n, b se puede formular como sigue:

Diagrama de cuerpo libre.

- Establezca el sistema de coordenadas t, n, b inercial en la partícula y trace el diagrama de cuerpo libre de ésta.
- La aceleración normal de la partícula $\mathbf{a}_n$ *siempre* actúa en la dirección n positiva.
- Si la aceleración tangencial $\mathbf{a}_t$ es desconocida, suponga que actúa en la dirección t positiva.
- No hay aceleración en la dirección b.
- Identifique las incógnitas en el problema.

Ecuaciones de movimiento.

- Aplique las ecuaciones de movimiento, ecuaciones 13-8.

Cinemática.

- Formule los componentes normales y tangenciales de la aceleración; es decir, $a_t = dv/dt$ o $a_t = v\,dv/ds$ y $a_n = v^2/\rho$.
- Si la trayectoria se define como $y = f(x)$, el radio de curvatura en el punto donde la partícula está localizada se obtiene con $\rho = [1 + (dy/dx)^2]^{3/2}/|d^2y/dx^2|$.

EJEMPLO 13.6

Determine el ángulo de inclinación θ de la pista para que las llantas de los autos de carreras mostrados en la figura 13-12*a* no dependan de la fricción para que no se deslicen hacia arriba o hacia abajo de la pista. Suponga que el tamaño de los automóviles es insignificante, que su masa es m y que se desplazan alrededor de la curva de radio ρ a una rapidez constante v.

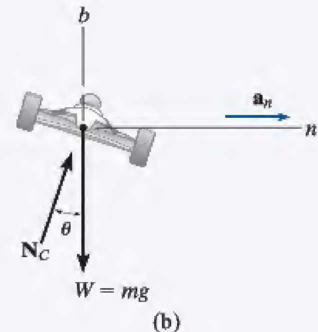


(a)

SOLUCIÓN

Antes de analizar la siguiente solución, pensemos en por qué deberá resolverse por medio de las coordenadas t, n, b.

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 13-12*b* y como se enunció en el problema, en el automóvil no actúa ninguna fuerza de fricción. En este caso $\mathbf{N}_C$ representa la *resultante* del suelo en las cuatro ruedas. Como a_n puede calcularse, las incógnitas son N_C y θ.



(b)

Fig. 13-12

Ecuaciones de movimiento. Con los ejes n, b mostrados,

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_n = ma_n; \qquad N_C \operatorname{sen} \theta = m\frac{v^2}{\rho} \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_b = 0; \qquad N_C \cos \theta - mg = 0 \qquad (2)$$

Al eliminar N_C y m de estas ecuaciones mediante la división de la ecuación 1 entre la ecuación 2, obtenemos

$$\tan \theta = \frac{v^2}{g\rho}$$

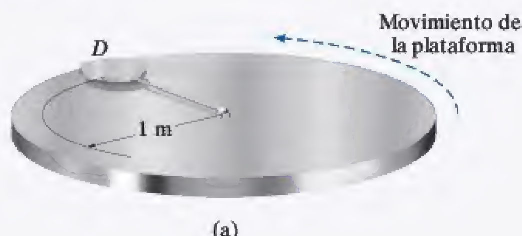
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{g\rho}\right) \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: el resultado es independiente de la masa del automóvil. Además, una suma de fuerzas en la dirección tangencial no afecta la solución. Si se hubiera considerado, entonces $a_t = dv/dt = 0$, puesto que el automóvil se desplaza a *rapidez constante*. Un análisis adicional de este problema se aborda en el problema 21-47.

13

EJEMPLO 13.7

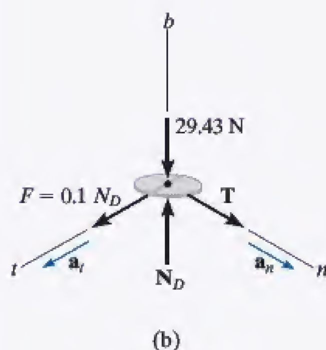
El disco D de 3 kg está sujeto al extremo de una cuerda como se muestra en la figura 13-13a. El otro extremo de la cuerda está sujeto a una articulación de rótula localizada en el centro de una plataforma. Si ésta gira con rapidez y el disco se coloca sobre ella y se le suelta desde el punto de reposo como se muestra, determine el tiempo que le lleva alcanzar una rapidez lo bastante grande para romper la cuerda. La tensión máxima que la cuerda puede soportar es 100 N y el coeficiente de fricción cinética entre el disco y la plataforma es $\mu_k = 0.1$.



(a)

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. La magnitud de la fuerza de fricción es $F = \mu_k N_D = 0.1N_D$ y su sentido de dirección se opone al *movimiento relativo* del disco respecto de la plataforma. Esta fuerza es la que le imprime al disco un componente tangencial de aceleración que hace que v se incremente, por lo que T se incrementa hasta que alcanza 100 N. El peso del disco es $W = 3(9.81) = 29.43$ N. Como a_n puede relacionarse con v, las incógnitas son N_D, a_t y v.



(b)

Fig. 13-13

Ecuaciones de movimiento.

$$\Sigma F_n = ma_n; \qquad T = 3\left(\frac{v^2}{1}\right) \qquad (1)$$

$$\Sigma F_t = ma_t; \qquad 0.1N_D = 3a_t \qquad (2)$$

$$\Sigma F_b = 0; \qquad N_D - 29.43 = 0 \qquad (3)$$

Con $T = 100$ N, la ecuación 1 puede resolverse para la velocidad crítica v_{cr} del disco necesaria para romper la cuerda. Al resolver todas las ecuaciones, obtenemos

$$N_D = 29.43 \text{ N}$$
$$a_t = 0.981 \text{ m/s}^2$$
$$v_{cr} = 5.77 \text{ m/s}$$

Cinemática. Como a_t es *constante*, el tiempo requerido para romper la cuerda es

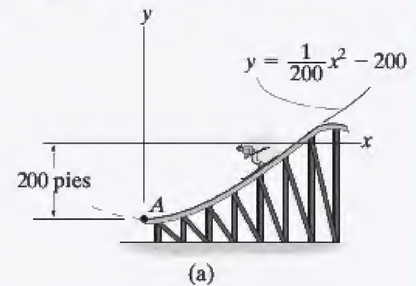
$$v_{cr} = v_0 + a_t t$$
$$5.77 = 0 + (0.981)t$$
$$t = 5.89 \text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

13

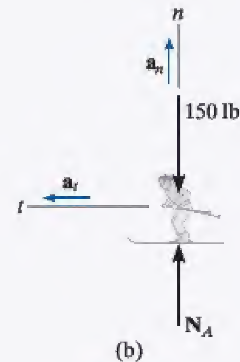
EJEMPLO 13.8

El diseño de la rampa de salto de esquís que se muestra en la foto requiere conocer el tipo de fuerzas que se ejercerán en la esquiadora y su trayectoria aproximada. Si en este caso el salto se puede representar de forma aproximada por la parábola de la figura 13-14*a*, determine la fuerza normal en la esquiadora de 150 lb en el momento en que llega al extremo de la rampa, punto *A*, donde su velocidad es de 65 pies/s. Además, ¿cuál es su aceleración en este punto?





(a)



(b)

Fig. 13-14

SOLUCIÓN

¿Por qué consideramos utilizar coordenadas *n*, *t* para resolver este problema?

Diagrama de cuerpo libre. Dado que $dy/dx = x/100\,|_{x=0} = 0$, la pendiente en *A* es horizontal. El diagrama de cuerpo libre de la esquiadora cuando está en *A* se muestra en la figura 13-14*b*. Como la trayectoria es *curva*, existen dos componentes de aceleración, $\mathbf{a}_n$ y $\mathbf{a}_t$. Puesto que a_n puede calcularse, las incógnitas son a_t y N_A.

Ecuaciones de movimiento.

$$+\uparrow \Sigma F_n = ma_n; \qquad N_A - 150 = \frac{150}{32.2}\left(\frac{(65)^2}{\rho}\right) \qquad (1)$$

$$\stackrel{+}{\leftarrow} \Sigma F_t = ma_t; \qquad 0 = \frac{150}{32.2}a_t \qquad (2)$$

El radio de curvatura ρ de la trayectoria debe determinarse en el punto *A* (0, −200 pies). Aquí $y = \frac{1}{200}x^2 - 200$, $dy/dx = \frac{1}{100}x$, $d^2y/dx^2 = \frac{1}{100}$, de modo que en $x = 0$,

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}\bigg|_{x=0} = \frac{[1 + (0)^2]^{3/2}}{|\frac{1}{100}|} = 100 \text{ pies}$$

Si sustituimos este valor en la ecuación 1 y resolvemos N_A, obtenemos

$$N_A = 347 \text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

Cinemática. A partir de la ecuación 2,

$$a_t = 0$$

Por tanto,

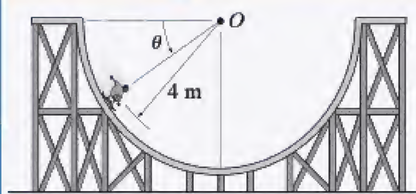
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(65)^2}{100} = 42.2 \text{ pies/s}^2$$

$$a_A = a_n = 42.2 \text{ pies/s}^2 \uparrow \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: aplique la ecuación de movimiento en la dirección *y* y demuestre que cuando la esquiadora está en el aire su aceleración es de 32.2 pies/s^2.

13

EJEMPLO 13.9

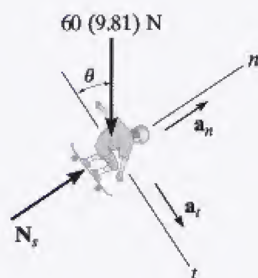


(a)

El patinador de 60 kg que aparece en la figura 13-15*a* se desliza cuesta abajo de la pista circular movido sólo por la fuerza de la gravedad. Si parte del punto de reposo cuando $\theta = 0°$, determine la magnitud de la reacción normal que la pista ejerce en él cuando $\theta = 60°$. Ignore su estatura en el cálculo.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre del patinador cuando está en una *posición arbitraria* θ se muestra en la figura 13-15*b*. En $\theta = 60°$ hay tres incógnitas, N_s, a_t y a_n (o v).



(b)

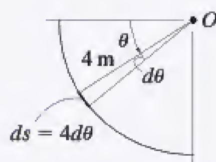
Ecuaciones de movimiento.

$$\downarrow \Sigma F_n = ma_n; \quad N_S - [60(9.81)\text{N}] \operatorname{sen} \theta = (60 \text{ kg})\left(\frac{v^2}{4\text{m}}\right) \qquad (1)$$

$$\downarrow \Sigma F_t = ma_t; \quad [60(9.81)\text{N}] \cos \theta = (60 \text{ kg})\, a_t$$

$$a_t = 9.81 \cos \theta$$

Cinemática. Como a_t está expresada en función de θ, para determinar la rapidez del patinador cuando $\theta = 60°$ se utiliza la ecuación $v\,dv = a_t\,ds$. Con la relación geométrica $s = \theta r$, donde $ds = r\,d\theta = (4\text{ m})d\theta$, figura 13-15*c* y la condición inicial $v = 0$ en $\theta = 0°$, tenemos,



(c)

Fig. 13-15

$$v\,dv = a_t\,ds$$

$$\int_0^v v\,dv = \int_0^{60°} 9.81 \cos \theta (4\,d\theta)$$

$$\left.\frac{v^2}{2}\right|_0^v = 39.24 \operatorname{sen} \theta \Big|_0^{60°}$$

$$\frac{v^2}{2} - 0 = 39.24(\operatorname{sen} 60° - 0)$$

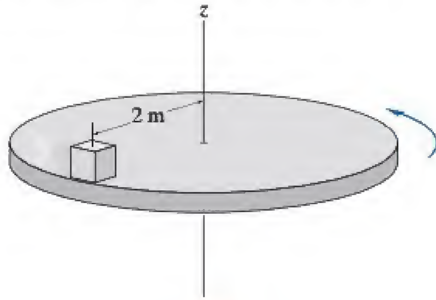
$$v^2 = 67.97 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Si sustituimos este resultado y $\theta = 60°$ en la ecuación (1), tenemos

$$N_s = 1529.23 \text{ N} = 1.53 \text{ kN} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

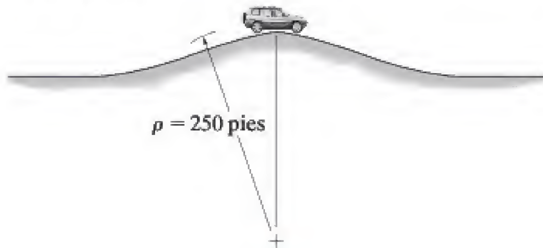
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F13-7. El bloque descansa a una distancia de 2 m del centro de la plataforma. Si el coeficiente de fricción estática entre el bloque y la plataforma es $\mu_s = 0.3$, determine la velocidad máxima que el bloque puede alcanzar antes de que comience a deslizarse. Suponga que el movimiento angular del disco se incrementa lentamente.



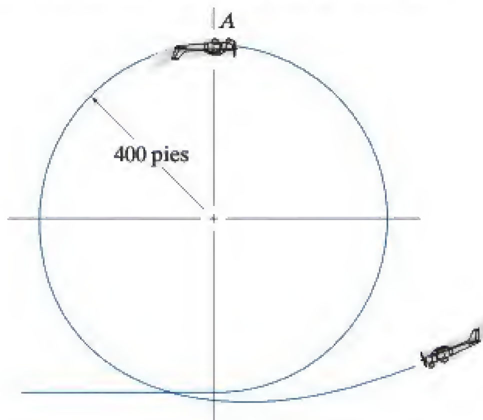
F13-7

F13-8. Determine la rapidez máxima a que el jeep puede viajar sobre la cresta de la colina sin que pierda contacto con la carretera.



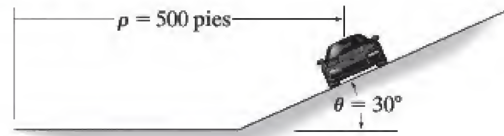
F13-8

F13-9. Un piloto pesa 150 lb y vuela a una rapidez constante de 120 pies/s. Determine la fuerza normal que ejerce en el asiento del avión cuando está en rizo invertido en A. El rizo tiene un radio de curvatura de 400 pies.



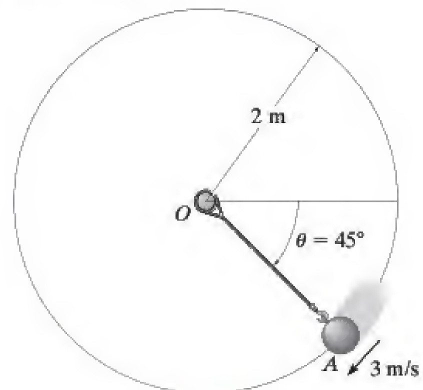
F13-9

F13-10. El auto deportivo se desplaza a lo largo de una carretera con una inclinación de 30° y cuyo radio de curvatura es de $\rho = 500$ pies. Si el coeficiente de fricción estática entre las llantas y la carretera es $\mu_s = 0.2$, determine la velocidad segura máxima sin que se deslice. Ignore el tamaño del automóvil.



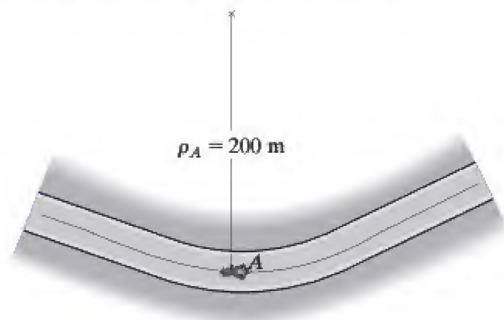
F13-10

F13-11. Si la velocidad de la bola de 10 kg es de 3 m/s cuando está en la posición A, a lo largo de la trayectoria vertical, determine la tensión en la cuerda y el incremento en su rapidez en esta posición.



F13-11

F13-12. La masa del motociclista es de 0.5 Mg y su estatura no se toma en cuenta. Pasa por el punto A a una rapidez de 15 m/s, la cual se incrementa a un ritmo constante de 1.5 m/s^2. Determine la fuerza de fricción resultante ejercida por la carretera en las llantas en este instante.



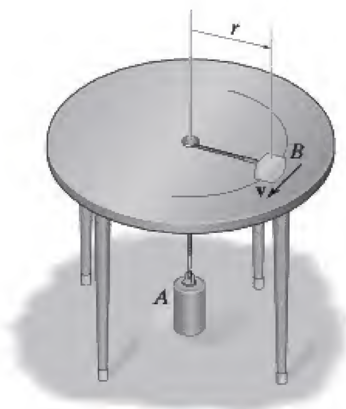
F13-12

PROBLEMAS

13

*13-48. El bloque B de 2 kg y el cilindro A de 15 kg están conectados a una cuerda que pasa por un agujero en el centro de una mesa lisa. Si al bloque se le imprime una rapidez de $v = 10$ m/s, determine el radio r de la trayectoria circular a lo largo de la cual se desplaza.

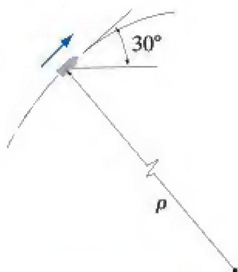
•13-49. El bloque B de 2 kg y el cilindro A de 15 kg están conectados a una cuerda que pasa por un agujero en el centro de una mesa lisa. Si el bloque se desplaza a lo largo de una trayectoria circular de radio $r = 1.5$ m, determine la rapidez del bloque.



Probs. 13-48/49

13-50. En el instante mostrado, el proyectil de 50 kg viaja en el plano vertical a una rapidez de $v = 40$ m/s. Determine el componente tangencial de su aceleración y el radio de curvatura ρ de su trayectoria en este instante.

13-51. En el instante mostrado, el radio de curvatura de la trayectoria vertical del proyectil de 50 kg es $\rho = 200$ m. Determine la rapidez del proyectil en este instante.



Probs. 13-50/51

*13-52. Determine la masa del Sol, si sabe que su distancia a la Tierra es de 149.6 (10^6) km. *Sugerencia:* use la ecuación 13-1 para representar la fuerza de gravedad que actúa en la Tierra.

•13-53. La masa del auto deportivo es de 1700 kg y viaja horizontalmente a lo largo de una pista inclinada 20° la cual es circular y tiene un radio de curvatura $\rho = 100$ m. Si el coeficiente de fricción estática entre las llantas y la pista es $\mu_s = 0.2$, determine la *rapidez máxima constante* a la cual puede viajar el automóvil sin que se deslice cuesta arriba. Ignore el tamaño del auto.

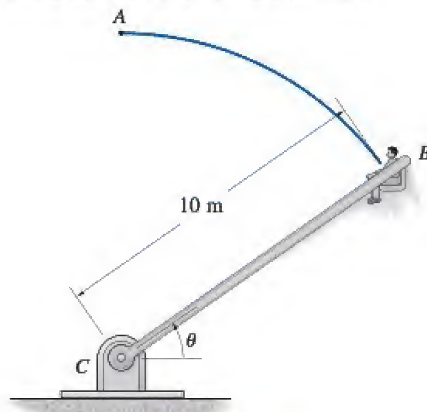
13-54. Con los datos del problema 13-53, determine la *rapidez mínima* a que el automóvil puede circular alrededor de la pista sin que se deslice cuesta abajo.



Probs. 13-53/54

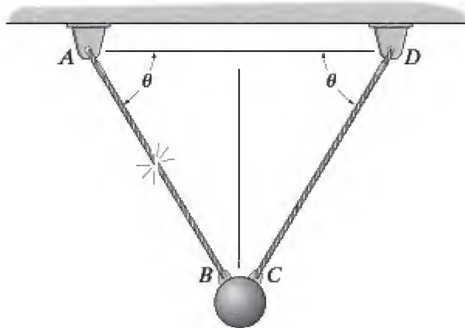
13-55. El dispositivo mostrado se utiliza para recrear la experiencia de ingravidez en un pasajero cuando llega al punto A, $\theta = 90°$, a lo largo de la trayectoria. Si la masa del pasajero es de 75 kg, determine la rapidez mínima que deberá alcanzar cuando llegue a A de modo que no ejerza una reacción normal en el asiento. La silla está conectada con un pasador al brazo BC de modo que siempre esté sentado en posición recta. Durante el movimiento su rapidez se mantiene constante.

*13-56. Un hombre de 75 kg de masa se sienta en la silla conectada por medio de un pasador al brazo BC. Si el hombre siempre está sentado en posición recta, determine las reacciones horizontal y vertical de la silla en el hombre en el instante $\theta = 45°$. En este instante su rapidez es de 6 m/s, la cual se incrementa a 0.5 m/s^2.



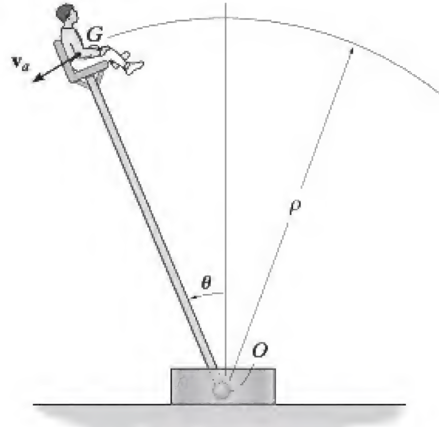
Probs. 13-55/56

•**13-57.** Determine la tensión en el cable CD exactamente después de que AB se corta. La masa de la plomada es m.



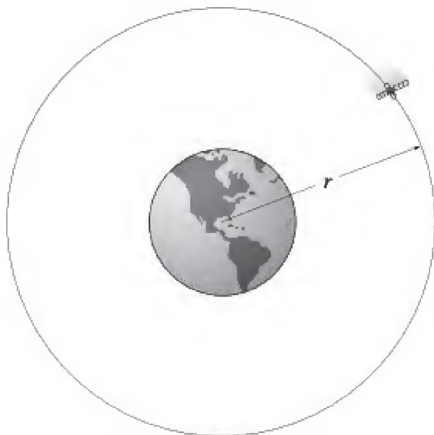
Prob. 13-57

13-59. Un acróbata pesa 150 lb y está sentado en una silla encaramada en el extremo superior de un poste, como se muestra. Si mediante una transmisión mecánica el poste gira hacia abajo a una razón constante desde $\theta = 0°$, de modo que el centro de masa G del acróbata mantiene una *rapidez constante* de $v_a = 10$ pies/s, determine el ángulo θ al cual comienza a "volar" fuera de la silla. Ignore la fricción y suponga que la distancia del pivote O a G es $\rho = 15$ pies.



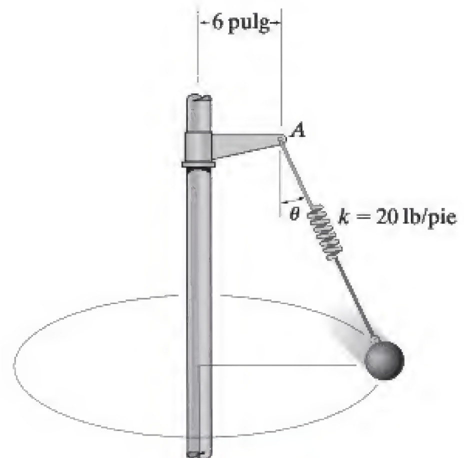
Prob. 13-59

13-58. Determine el tiempo para que el satélite complete su órbita alrededor de la Tierra. El radio r de la órbita es la distancia del satélite al centro de la Tierra. Las masas del satélite y la Tierra son m_s y M_e, respectivamente.



Prob. 13-58

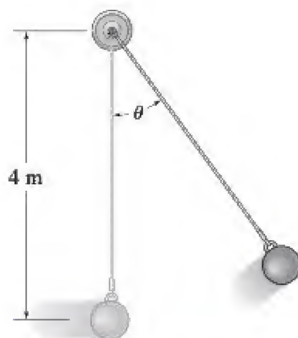
***13-60.** Un resorte, con longitud no alargada de 2 pies, tiene un extremo unido a la bola de 10 lb. Determine el ángulo θ del resorte si la bola tiene una rapidez de 6 pies/s tangente a la trayectoria circular horizontal.



Prob. 13-60

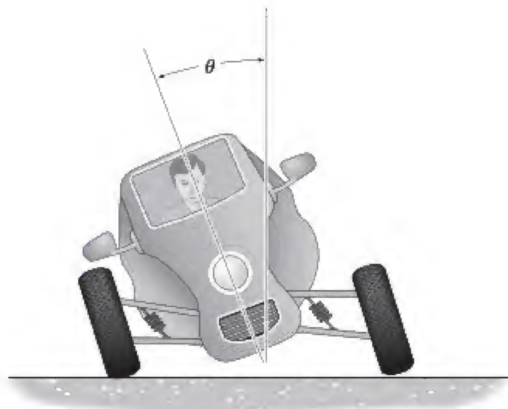
•**13-61.** Si la bola tiene una masa de 30 kg y una rapidez $v = 4$ m/s en el instante en que está en su punto más bajo, $\theta = 0°$, determine la tensión en la cuerda en este instante. Además, determine el ángulo θ al cual la bola oscila y momentáneamente se detiene. Ignore el tamaño de la bola.

13-62. La bola tiene una masa de 30 kg y una rapidez $v = 4$ m/s en el instante en que está en su punto más bajo, $\theta = 0°$. Determine la tensión en la cuerda y el ritmo al cual se reduce la rapidez de la bola en el instante $\theta = 20°$. Ignore el tamaño de la bola.



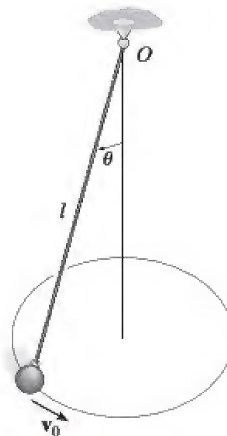
Probs. 13-61/62

13-63. El vehículo está diseñado para combinar la sensación de una motocicleta con la comodidad y seguridad de un automóvil. Si el vehículo viaja a una rapidez constante de 80 km/h por una carretera curva circular de 100 m de radio, determine el ángulo de inclinación θ del vehículo, de modo que sólo una fuerza normal producida por el asiento actúe en el conductor. Ignore la estatura de éste.



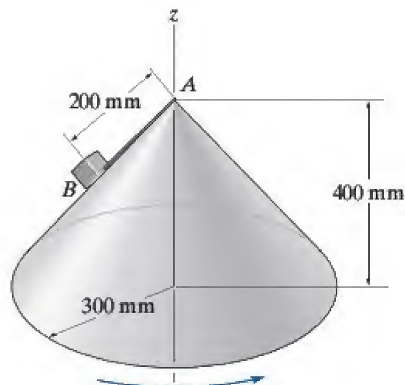
Prob. 13-63

***13-64.** La masa de la bola es m y está unida a la cuerda de longitud l. El extremo superior de la cuerda está atado a un eslabón giratorio y a la bola se le imprime una velocidad $\mathbf{v}_0$. Demuestre que el ángulo θ el cual forma la cuerda con la vertical cuando la bola viaja alrededor de la trayectoria circular debe satisfacer la ecuación $\tan\theta \operatorname{sen}\theta = v_0^2/gl$. Ignore la resistencia del aire y el tamaño de la bola.



Prob. 13-64

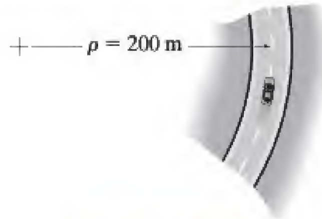
•**13-65.** El bloque liso B de 0.2 kg de masa, está unido al vértice A del cono circular recto por medio de una cuerda. Si la rapidez del bloque es de 0.5 m/s alrededor del cono, determine la tensión en la cuerda y la reacción que el cono ejerce en el bloque. Ignore el tamaño del bloque.



Prob. 13-65

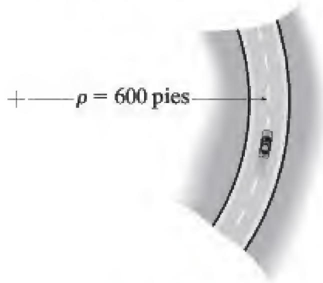
13-66. Determine el coeficiente de fricción estática mínimo entre las llantas y la superficie de la carretera, de modo que el automóvil de 1.5 Mg no se deslice cuando tome la curva a 80 km/h. Ignore el tamaño del carro.

13-67. Si el coeficiente de fricción estática entre las llantas y la superficie de la carretera es $\mu_s = 0.25$, determine la rapidez máxima del automóvil de 1.5 Mg sin que se deslice cuando tome la curva. Ignore el tamaño del automóvil.



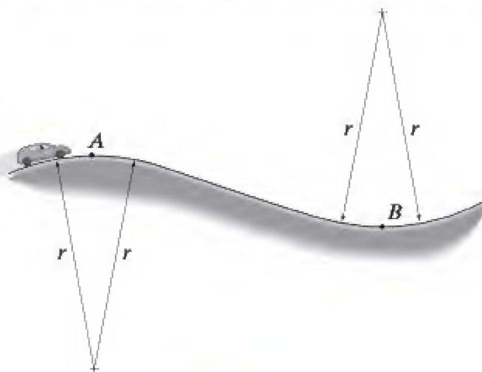
Probs. 13-66/67

***13-68.** En el instante mostrado, el automóvil de 3000 lb viaja a una rapidez de 75 pies/s, la cual se incrementa a razón de 6 pies/s^2. Determine la magnitud de la fuerza de fricción resultante que la carretera ejerce en las llantas del automóvil. Ignore el tamaño del automóvil.



Prob. 13-68

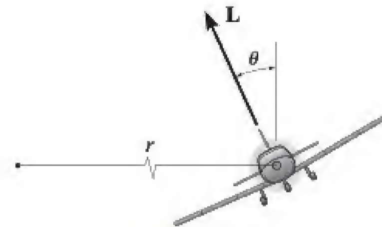
•13-69. Determine la rapidez máxima a que el automóvil con masa m puede pasar por el punto superior A de la carretera curva vertical y seguir en contacto con la carretera. Si el automóvil mantiene esta rapidez, ¿cuál es la reacción normal que la carretera ejerce en el automóvil cuando pasa por el punto inferior B de la carretera?



Prob. 13-69

13-70. Un avión de 5 Mg vuela a una rapidez constante de 350 km/h a lo largo de una trayectoria circular horizontal de radio $r = 3000$ m. Determine la fuerza de elevación **L** que actúa en el avión y el ángulo de alabeo θ. Ignore el tamaño del avión.

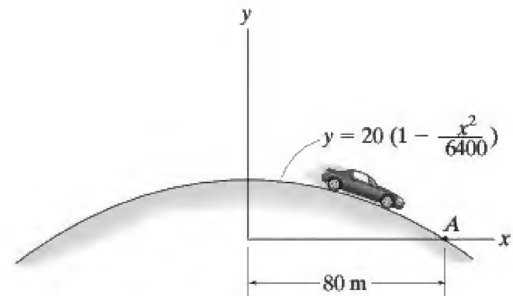
13-71. Un avión de 5 Mg vuela a una rapidez constante de 350 km/h a lo largo de una trayectoria circular horizontal. Si el ángulo de alabeo $\theta = 15°$, determine la fuerza de elevación **L** que actúa en el avión y el radio r de la trayectoria circular. Ignore el tamaño del avión.



Probs. 13-70/71

***13-72.** Un automóvil de 0.8 Mg viaja sobre la colina que tiene la forma de una parábola. Si el conductor mantiene una rapidez constante de 9 m/s, determine tanto la fuerza normal resultante como la fuerza de fricción resultante que todas las ruedas del carro ejercen en la carretera en el instante en que llega al punto A. Ignore el tamaño del automóvil.

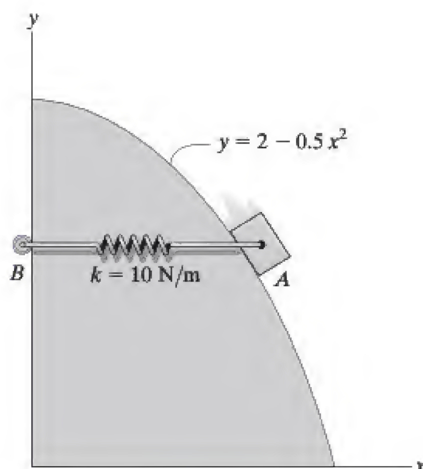
•13-73. Un automóvil de 0.8 Mg viaja sobre la colina que tiene la forma de una parábola. Cuando el automóvil está en el punto A, viaja a una rapidez de 9 m/s y la incrementa a 3 m/s^2. Determine tanto la fuerza normal resultante como la fuerza de fricción resultante que todas las ruedas del automóvil ejercen en la carretera en este instante. Ignore el tamaño del automóvil.



Probs. 13-72/73

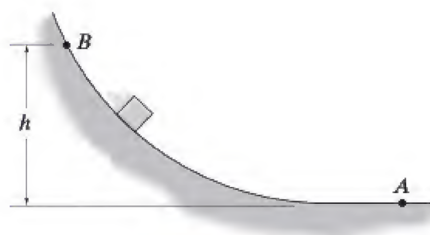
13

13-74. El bloque de 6 kg sólo puede moverse a lo largo de la trayectoria parabólica lisa. El resorte conectado limita el movimiento y, debido a la guía de rodillo, siempre permanece horizontal cuando el bloque desciende. Si la rigidez del resorte es $k = 10$ N/m y su longitud no alargada es de 0.5 m, determine la fuerza normal de la trayectoria sobre el bloque en el instante $x = 1$, cuando la rapidez del bloque es de 4 m/s. Además, ¿cuál es la tasa de incremento de la rapidez del bloque en este punto? Ignore la masa del rodillo y el resorte.



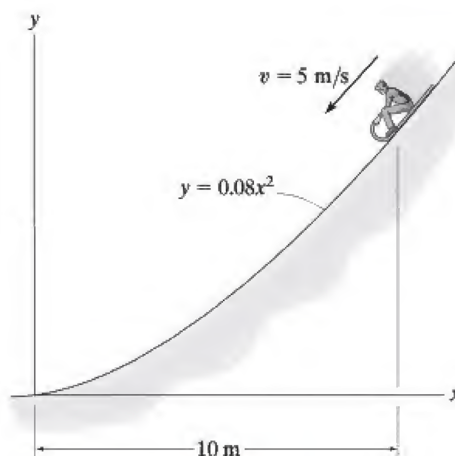
Prob. 13-74

13-75. Demuestre que si se suelta el bloque del punto de reposo en el punto B de una trayectoria lisa de *forma arbitraria*, la rapidez que alcanza cuando llega al punto A es igual a la rapidez que alcanza cuando cae libremente una distancia h; es decir, $v = \sqrt{2gh}$.



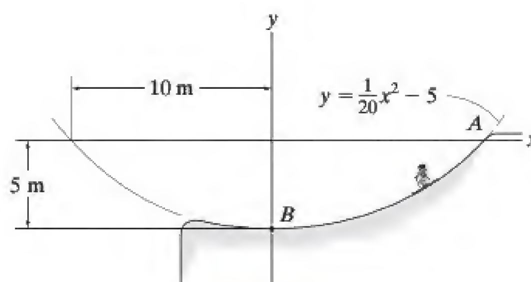
Prob. 13-75

***13-76.** Un tobogán y su conductor de 90 kg de masa total se deslizan cuesta abajo a lo largo de una pendiente (lisa) definida por la ecuación $y = 0.08x^2$. En el instante $x = 10$ m, la rapidez del tobogán es de 5 m/s. En este punto, determine la tasa de incremento de la rapidez que la pendiente ejerce en el tobogán. Ignore el tamaño del tobogán y la estatura del conductor en el cálculo.



Prob. 13-76

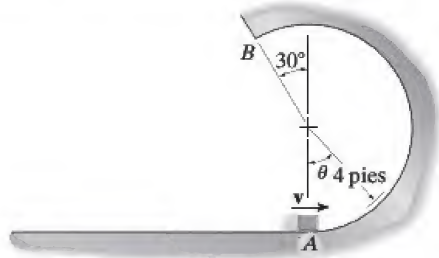
•**13-77.** La esquiadora parte del punto de reposo en A(10 m, 0) desciende la pendiente lisa, la cual puede ser representada de forma aproximada por una parábola. Si su masa es de 52 kg, determine la fuerza normal que el suelo ejerce sobre la esquiadora en el instante en que llega al punto B. Ignore la estatura de la esquiadora. *Sugerencia:* use el resultado del problema 13-75.



Prob. 13-77

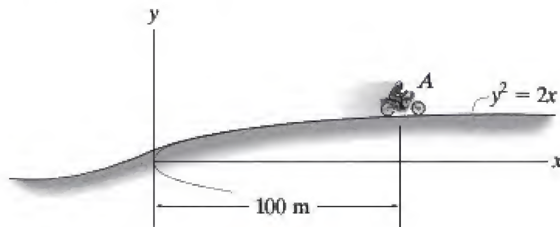
13-78. Se lanza la caja de 5 lb con una rapidez de 20 pies/s desde A hacia arriba de la pista circular vertical lisa. Determine el ángulo θ cuando la caja deja la pista.

13-79. Determine la rapidez mínima que se debe imprimir a la caja de 5 lb en A para que permanezca en contacto con la trayectoria circular. Además, determine la rapidez de la caja cuando llegue al punto B.



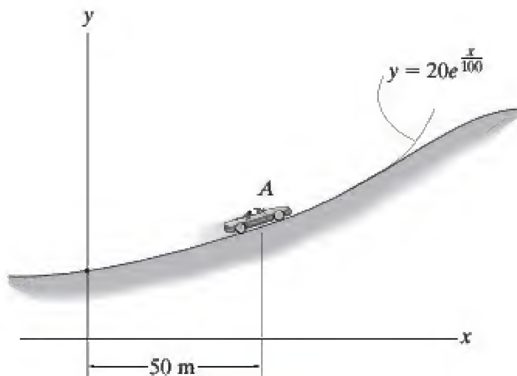
Probs. 13-78/79

***13-80.** La motocicleta de 800 kg viaja a una rapidez constante de 80 km/h cuesta arriba. Determine la fuerza normal que la superficie ejerce en sus ruedas cuando llega al punto A. Ignore su tamaño.



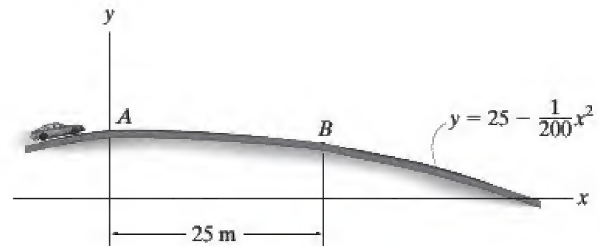
Prob. 13-80

•**13-81.** El automóvil de 1.8 Mg viaja cuesta arriba a una rapidez constante de 80 km/h. Determine la reacción normal de la carretera en el automóvil cuando llega al punto A. Ignore su tamaño.



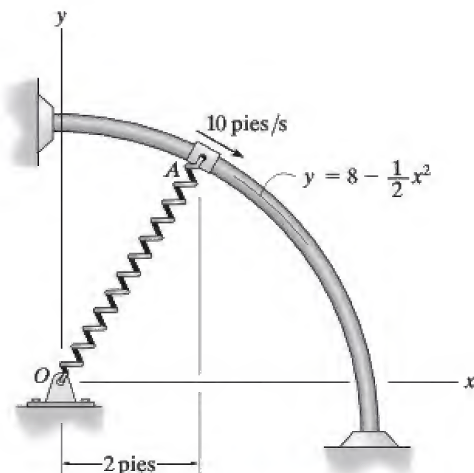
Prob. 13-81

13-82. Determine la rapidez máxima que el automóvil de 1.5 Mg puede alcanzar y seguir en contacto con la carretera cuando pase por el punto A. Si el automóvil mantiene esta rapidez, ¿cuál es la reacción normal de la carretera sobre él cuando pase por el punto B? Ignore el tamaño del automóvil.

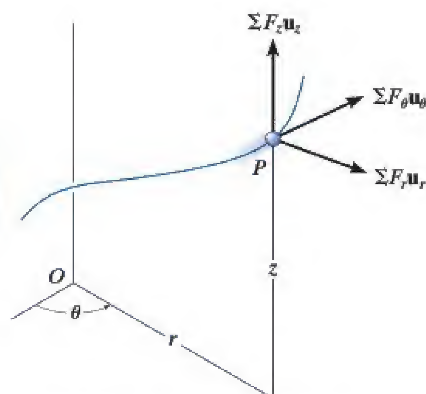


Prob. 13-82

13-83. El anillo de 5 lb se desliza sobre la barra lisa de modo que cuando está en A su rapidez es de 10 pies/s. Si el resorte al cual está conectado tiene una longitud no alargada de 3 pies y una rigidez de $k = 10$ lb/pie, determine la fuerza normal en el anillo y la aceleración de éste en este instante.



Prob. 13-83



Sistema de coordenadas inercial

Fig. 13-16

13.6 Ecuaciones de movimiento: coordenadas cilíndricas

Cuando todas las fuerzas que actúan en una partícula se descomponen en componentes cilíndricos, es decir, a lo largo de las direcciones de los vectores unitarios $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$ y $\mathbf{u}_z$, figura 13-16, la ecuación de movimiento puede expresarse como

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$
$$\Sigma F_r \mathbf{u}_r + \Sigma F_\theta \mathbf{u}_\theta + \Sigma F_z \mathbf{u}_z = ma_r \mathbf{u}_r + ma_\theta \mathbf{u}_\theta + ma_z \mathbf{u}_z$$

Para que esta ecuación se satisfaga, requerimos

$$\Sigma F_r = ma_r$$
$$\Sigma F_\theta = ma_\theta \qquad (13\text{-}9)$$
$$\Sigma F_z = ma_z$$

Si la partícula sólo puede moverse en el plano r-θ, entonces sólo se utilizan las primeras dos ecuaciones 13-9 para especificar el movimiento.

Fuerzas tangenciales y normales. El tipo de problema más directo que implica coordenadas cilíndricas requiere determinar las componentes de fuerza resultantes ΣF_r, ΣF_θ, ΣF_z que hacen que una partícula se mueva con una aceleración *conocida*. Si, no obstante, el movimiento acelerado de la partícula no está completamente especificado en el instante dado, entonces se deberá tener o calcular algunos datos en relación con las direcciones o magnitudes de las fuerzas que actúan en la partícula para resolver las ecuaciones 13-9. Por ejemplo, la fuerza **P** hace que la partícula de la figura 13-17*a* se mueva a lo largo de una trayectoria $r = f(\theta)$. La *fuerza normal* **N** que la trayectoria ejerce en la partícula siempre es *perpendicular a la tangente de la trayectoria*, en tanto que la fuerza de fricción **F** siempre actúa a lo largo de la tangente en la dirección opuesta del movimiento. Las *direcciones* de **N** y **F** pueden especificarse con respecto a la coordenada radial con el ángulo ψ (psi), figura 13-17*b*, el cual se define entre la línea radial *extendida* y la tangente a la curva.



A medida que desciende el carro de peso W por la pista espiral, la fuerza normal resultante que la pista ejerce en el carro puede representarse por su tres componentes cilíndricos, $-\mathbf{N}_r$ crea una aceleración radial $-\mathbf{a}_r$, $\mathbf{N}_\theta$ crea una aceleración transversal $\mathbf{a}_\theta$, y la diferencia $\mathbf{W} - \mathbf{N}_z$ crea una aceleración azimutal $-\mathbf{a}_z$.

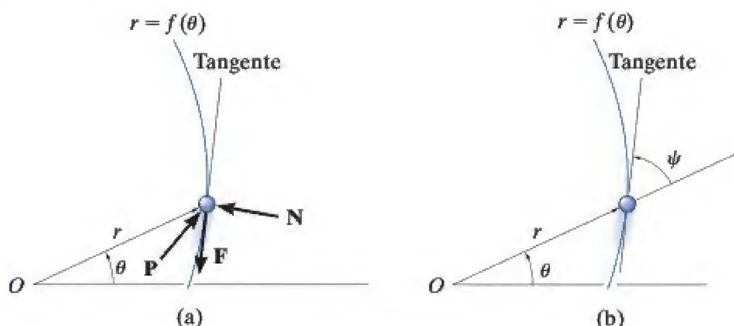
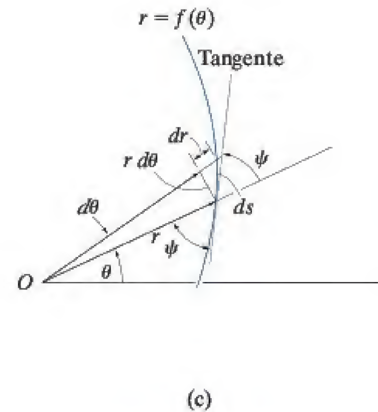


Fig. 13-17

Este ángulo se obtiene al observar que cuando la partícula recorre una distancia ds a lo largo de la trayectoria, figura 13-17c, la componente del desplazamiento en la dirección radial es dr y en la dirección transversal es $r\,d\theta$. Como estas dos componentes son mutuamente perpendiculares, el ángulo ψ se determina a partir de $\tan\psi = r\,d\theta/dr$, o

$$\tan\psi = \frac{r}{dr/d\theta} \qquad (13\text{-}10)$$

Si ψ se calcula como una cantidad positiva, entonces se mide de la *línea radial extendida* a la tangente en sentido opuesto a las manecillas del reloj o en la dirección positiva de θ. Si es negativo, se mide en la dirección opuesta a la θ positiva. Por ejemplo, considere el cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$, de la figura 13-18. Como $dr/d\theta = -a \operatorname{sen}\theta$, entonces cuando $\theta = 30°$, $\tan\psi = a(1 + \cos 30°)/(-a \operatorname{sen} 30°) = -3.732$, o $\psi = -75°$, medido en sentido de las manecillas del reloj, opuesto a $+\theta$ como se muestra en la figura.



(c)

Fig. 13-17 (cont.)

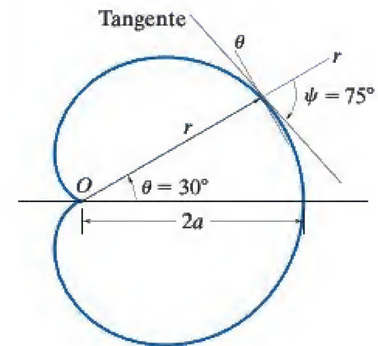


Fig. 13-18

Procedimiento para el análisis

Las coordenadas cilíndricas o polares son una opción adecuada para el análisis de un problema para el cual se dan datos con respecto al movimiento angular de la línea radial r, o en casos en los que la trayectoria puede expresarse convenientemente en función de estas coordenadas. Una vez que estas coordenadas se establecen, las ecuaciones de movimiento pueden aplicarse entonces para relacionar las fuerzas que actúan en la partícula con sus componentes de aceleración. El método para hacerlo se describió en el procedimiento de análisis dado en la sección 13.4. Lo siguiente es un resumen de este procedimiento.

Diagrama de cuerpo libre.

- Establezca el sistema de coordenadas r, θ, z inercial y trace el diagrama de cuerpo libre de la partícula.
- Suponga que $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\theta$, $\mathbf{a}_z$ actúan en las *direcciones positivas* de r, θ, z si son desconocidas.
- Identifique todas las incógnitas en el problema.

Ecuaciones de movimiento.

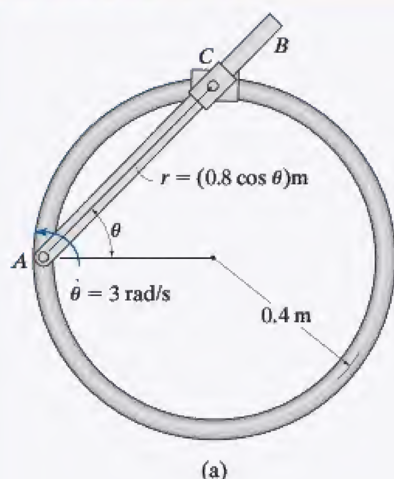
- Aplique las ecuaciones de movimiento, ecuaciones 13-9.

Cinemática.

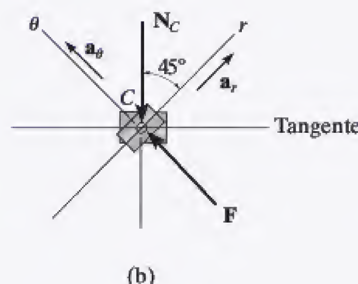
- Use los métodos de la sección 12.8 para determinar r y las derivadas con respecto al tiempo $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, $\ddot{z}$, y luego evalúe las componentes de aceleración $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$, $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$, $a_z = \ddot{z}$.
- Si cualquiera de las componentes de aceleración se calcula como una cantidad negativa, ello indica que actúa en la dirección de su coordenada negativa.
- Cuando se toman las derivadas con respecto al tiempo de $r = f(\theta)$, es muy importante utilizar la regla de la cadena del cálculo, la cual se analiza al final del apéndice C.

13

EJEMPLO 13.10



(a)



(b)

Fig. 13-19

El doble anillo liso de 0.5 kg que se muestra en la figura 13-19*a* puede deslizarse libremente sobre el brazo *AB* y la barra guía circular. Si el brazo gira a una velocidad angular constante de $\dot{\theta} = 3$ rad/s, determine la fuerza que el brazo ejerce sobre el anillo en el instante $\theta = 45°$. El movimiento ocurre en el plano horizontal.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. La reacción normal $\mathbf{N}_C$ de la barra guía circular y la fuerza $\mathbf{F}$ del brazo *AB* actúan en el anillo en el plano del movimiento, figura 13-19*b*. Observe que $\mathbf{F}$ actúa perpendicular al eje del brazo *AB*, es decir, en la dirección del eje θ, en tanto que $\mathbf{N}_C$ lo hace perpendicular a la tangente de la trayectoria circular en $\theta = 45°$. Las cuatro incógnitas son N_C, F, a_r y a_θ.

Ecuaciones de movimiento.

$$+\nearrow\Sigma F_r = ma_r; \qquad -N_C \cos 45° = (0.5\text{ kg})\, a_r \tag{1}$$

$$+\nwarrow\Sigma F_\theta = ma_\theta; \qquad F - N_C \operatorname{sen} 45° = (0.5\text{ kg})\, a_\theta \tag{2}$$

Cinemática. Con la regla de la cadena (vea el apéndice C), la primera y segunda derivadas con respecto al tiempo de r cuando $\theta = 45°$, $\dot{\theta} = 3$ rad/s, $\ddot{\theta} = 0$, son

$$r = 0.8 \cos\theta = 0.8 \cos 45° = 0.5657\text{ m}$$

$$\dot{r} = -0.8 \operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta} = -0.8 \operatorname{sen} 45°(3) = -1.6971\text{ m/s}$$

$$\ddot{r} = -0.8\left[\operatorname{sen}\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right]$$

$$= -0.8[\operatorname{sen} 45°(0) + \cos 45°(3^2)] = -5.091\text{ m/s}^2$$

Tenemos

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -5.091\text{ m/s}^2 - (0.5657\text{ m})(3\text{ rad/s})^2 = -10.18\text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (0.5657\text{ m})(0) + 2(-1.6971\text{ m/s})(3\text{ rad/s})$$

$$= -10.18\text{ m/s}^2$$

Si sustituimos estos resultados en las ecuaciones (1) y (2) y resolvemos, obtenemos

$$N_C = 7.20\text{ N}$$

$$F = 0$$ ***Resp.***

EJEMPLO 13.11

El cilindro C liso de 2 kg de la figura 13-20*a* tiene un pasador P a través de su centro el cual pasa por la ranura en el brazo OA. Si se hace que el brazo gire en el *plano vertical* a una razón constante $\dot{\theta} = 0.5$ rad/s, determine la fuerza que ejerce el brazo sobre la clavija en el instante $\theta = 60°$.

SOLUCIÓN

¿Por qué es una buena idea utilizar coordenadas polares para resolver este problema?

Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre del cilindro se muestra en la figura 13-20*a*. La fuerza en la clavija, $\mathbf{F}_P$, actúa perpendicular a la ranura del brazo. Como siempre, se supone que $\mathbf{a}_r$ y $\mathbf{a}_\theta$, actúan en las direcciones de r y θ *positivas*, respectivamente. Identifique las cuatro incógnitas.

Ecuaciones de movimiento. Con los datos en la figura 13-20*b*, tenemos

$$+\swarrow \Sigma F_r = ma_r; \qquad 19.62 \text{ sen } \theta - N_C \text{ sen } \theta = 2a_r \qquad (1)$$

$$+\searrow \Sigma F_\theta = ma_\theta; \qquad 19.62 \cos \theta + F_P - N_C \cos \theta = 2a_\theta \qquad (2)$$

Cinemática. A partir de la figura 13-20*a*, r puede relacionarse con θ por medio de la ecuación

$$r = \frac{0.4}{\text{sen } \theta} = 0.4 \csc \theta$$

Como $d(\csc \theta) = -(\csc \theta \cot \theta)\, d\theta$ y $d(\cot \theta) = -(\csc^2 \theta)d\theta$, entonces r y las derivadas con respecto al tiempo necesarias son

$$\dot{\theta} = 0.5 \qquad r = 0.4 \csc \theta$$

$$\ddot{\theta} = 0 \qquad \dot{r} = -0.4(\csc \theta \cot \theta)\dot{\theta}$$

$$= -0.2 \csc \theta \cot \theta$$

$$\ddot{r} = -0.2(-\csc \theta \cot \theta)(\dot{\theta}) \cot \theta - 0.2 \csc \theta(-\csc^2 \theta)\dot{\theta}$$

$$= 0.1 \csc \theta(\cot^2 \theta + \csc^2 \theta)$$

Al evaluar estas fórmulas en $\theta = 60°$, obtenemos

$$\dot{\theta} = 0.5 \qquad r = 0.462$$

$$\ddot{\theta} = 0 \qquad \dot{r} = -0.133$$

$$\ddot{r} = 0.192$$

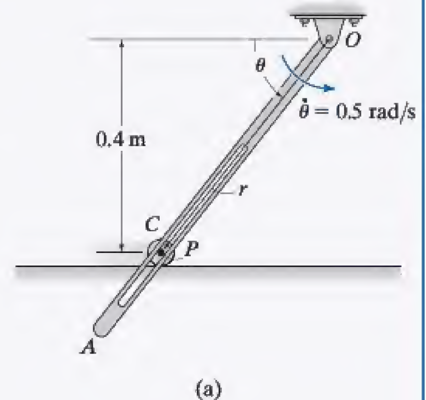
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0.192 - 0.462(0.5)^2 = 0.0770$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 + 2(-0.133)(0.5) = -0.133$$

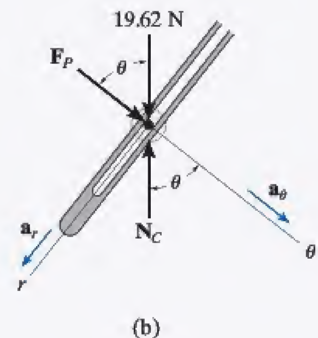
Si sustituimos estos resultados en las ecuaciones 1 y 2 con $\theta = 60°$ y resolvemos, se obtiene

$$N_C = 19.5 \text{ N} \qquad F_P = -0.356 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

El signo negativo indica que $\mathbf{F}_P$ actúa opuesta a la dirección mostrada en la figura 13-20*b*.



(a)

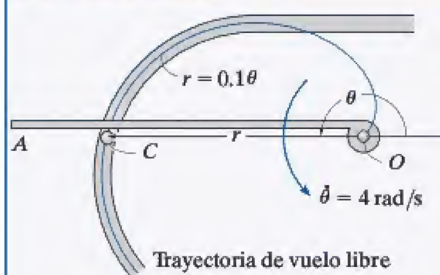


(b)

Fig. 13-20

13

EJEMPLO 13.12

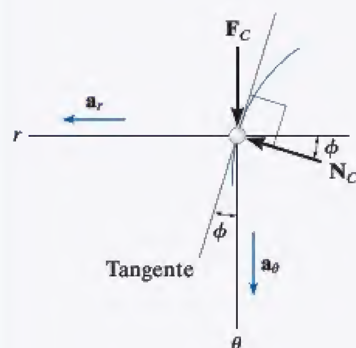


(a)

Una lata C de 0.5 kg de masa se mueve a lo largo de una ranura horizontal que se muestra en la figura 13-21a. La ranura tiene la forma de una espiral, la cual está definida por la ecuación $r = (0.1\theta)$m, donde θ está en radianes. Si el brazo OA gira a una velocidad constante $\dot{\theta} = 4$ rad/s en el plano horizontal, determine la fuerza que ejerce en la lata en el instante $\theta = \pi$ rad. Ignore la fricción y el tamaño de la lata.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. La fuerza impulsora $\mathbf{F}_C$ actúa perpendicular al brazo OA, en tanto que la fuerza normal a la pared de la ranura en la lata, $\mathbf{N}_C$, lo hace perpendicular a la tangente a la curva en $\theta = \pi$ rad, figura 13-21b. Como siempre, se supone que $\mathbf{a}_r$ y $\mathbf{a}_\theta$ actúan en las *direcciones positivas* de r y θ, respectivamente. Como la trayectoria está especificada, el ángulo ψ que la línea radial extendida r forma con la tangente, figura 13-21c, se determina con la ecuación 13-10. Tenemos $r = 0.1\theta$, de modo que $dr/d\theta = 0.1$, y por consiguiente



(b)

$$\tan\psi = \frac{r}{dr/d\theta} = \frac{0.1\theta}{0.1} = \theta$$

Cuando $\theta = \pi$, $\psi = \tan^{-1}\pi = 72.3°$, de modo que $\phi = 90° - \psi = 17.7°$, como se muestra en la figura 13-21c. Identifique las cuatro incógnitas en la figura 13-21b.

Ecuaciones de movimiento. Con $\phi = 17.7°$ y los datos de la figura 13-21b, tenemos

$$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_r = ma_r; \qquad N_C \cos 17.7° = 0.5a_r \qquad (1)$$

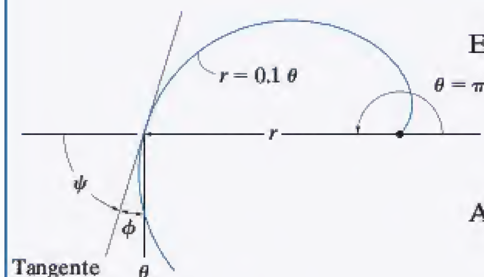
$$+\downarrow \Sigma F_\theta = ma_\theta; \qquad F_C - N_C \operatorname{sen} 17.7° = 0.5a_\theta \qquad (2)$$

Cinemática. Las derivadas con respecto al tiempo de r y θ son

$$\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s} \qquad r = 0.1\theta$$
$$\ddot{\theta} = 0 \qquad \dot{r} = 0.1\dot{\theta} = 0.1(4) = 0.4 \text{ m/s}$$
$$\ddot{r} = 0.1\ddot{\theta} = 0$$

En el instante $\theta = \pi$ rad,

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - 0.1(\pi)(4)^2 = -5.03 \text{ m/s}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 + 2(0.4)(4) = 3.20 \text{ m/s}^2$$



(c)

Fig. 13-21

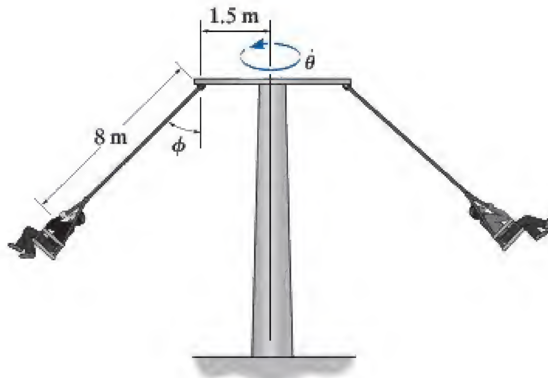
Al sustituir estos resultados en las ecuaciones 1 y 2 y resolver, resulta

$$N_C = -2.64 \text{ N}$$
$$F_C = 0.800 \text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

¿Qué indica el signo negativo de N_C?

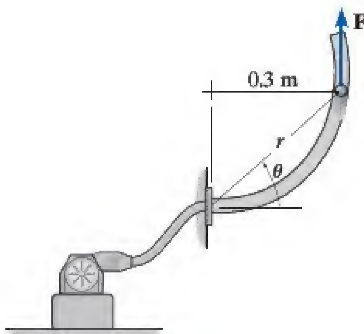
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F13-13. Determine la velocidad angular constante $\dot{\theta}$ del poste vertical del juego mecánico si $\phi = 45°$. Ignore la masa de los cables y la estatura de los pasajeros.



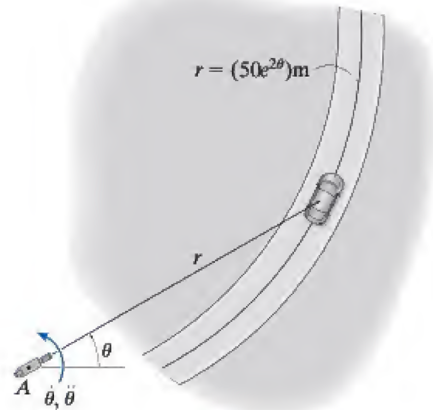
F13-13

F13-14. La bola de 0.2 kg es impulsada por medio de aire a través del tubo circular vertical liso cuya forma está definida por $r = (0.6 \text{ sen } \theta)$ m, donde θ está en radianes. Si $\theta = (\pi t^2)$ rad, donde t está en segundos, determine la magnitud de la fuerza **F** ejercida por el ventilador en la bola cuando $t = 0.5$ s.



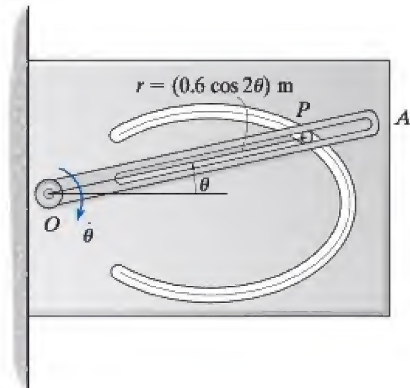
F13-14

F13-15. El automóvil de 2 Mg toma la curva descrita por $r = (50e^{2\theta})$ m, donde θ está en radianes. Si se coloca una cámara en A y gira con una velocidad angular de $\dot{\theta} = 0.05$ rad/s y una aceleración angular de $\ddot{\theta} = 0.01$ rad/s^2 en el instante $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad, determine la fuerza de fricción resultante desarrollada entre las llantas y la carretera en este instante.



F13-15

F13-16. El pasador P de 0.2 kg sólo puede moverse en la ranura curva lisa, la cual está definida por la lemniscata $r = (0.6 \cos 2\theta)$ m. El brazo ranurado OA, el cual tiene una velocidad angular constante en sentido de las manecillas del reloj de $\dot{\theta} = -3$ rad/s, controla su movimiento. Determine la fuerza que ejerce el brazo OA en el pasador P cuando $\theta = 0°$. El movimiento se da en el plano vertical.



F13-16

13

PROBLEMAS

***13-84.** La trayectoria del movimiento de una partícula de 5 lb en el plano horizontal se describe en función de coordenadas polares como $r = (2t + 1)$ pies y $\theta = (0.5t^2 - t)$ rad, donde t está en segundos. Determine la magnitud de la fuerza resultante que actúa en la partícula cuando $t = 2$ s.

•13-85. Determine la magnitud de la fuerza resultante que actúa en una partícula de 5 kg en el instante $t = 2$ s, si ésta se mueve a lo largo de una trayectoria horizontal definida por las ecuaciones $r = (2t + 10)$ m y $\theta = (1.5t^2 - 6t)$ rad, donde t está en segundos.

13-86. Una partícula de 2 kg viaja a lo largo de una trayectoria horizontal definida por

$$r = \left(\frac{1}{4}t^3 + 2\right)\text{m},\ \theta = \left(\frac{t^2}{4}\right)\text{rad},$$

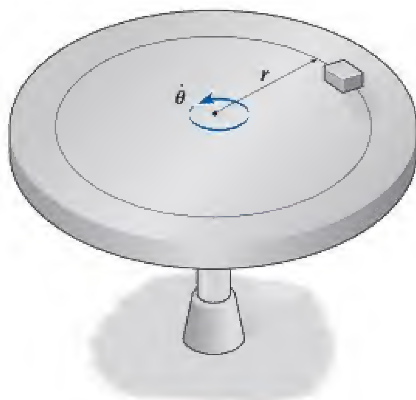
donde t está en segundos. Determine las componentes radial y transversal de la fuerza ejercida en la partícula cuando $t = 2$ s.

13-87. Una partícula de 2 kg viaja a lo largo de una trayectoria horizontal definida por

$$r = (3 + 2t^2)\text{m},\ \theta = \left(\frac{1}{3}t^3 + 2\right)\text{rad}$$

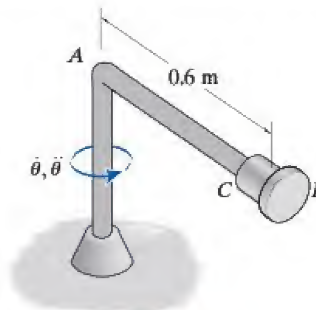
y $z = (5 - 2t^2)$m, donde t está en segundos. Determine las componentes r, θ, z que la trayectoria ejerce en la partícula en el instante $t = 1$ s.

***13-88.** Si el coeficiente de fricción estática entre el bloque de masa m y la tornamesa es μ_s, determine la velocidad angular constante máxima de la plataforma sin que el bloque se deslice.



Prob. 13-88

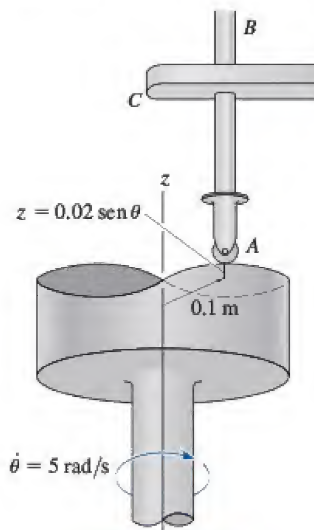
•13-89. El anillo C de 0.5 kg puede deslizarse libremente a lo largo de la barra lisa AB. En un instante dado, la barra AB gira con una velocidad angular $\dot{\theta} = 2$ rad/s y una aceleración angular $\ddot{\theta} = 2$ rad/s^2. Determine la fuerza normal de la barra AB y la reacción radial de la placa B en el anillo en este instante. Ignore la masa de la barra y el tamaño del anillo.



Prob. 13-89

13-90. La barra AB de 2 kg sube y baja a medida que su extremo se desliza sobre la superficie contorneada lisa de la leva, donde $r = 0.1$ m y $z = (0.02 \text{ sen } \theta)$ m. Si la leva gira a una velocidad angular constante de 5 rad/s, determine la fuerza que la leva ejerce en el rodillo A cuando $\theta = 90°$. Ignore la fricción en el cojinete C y la masa del rodillo.

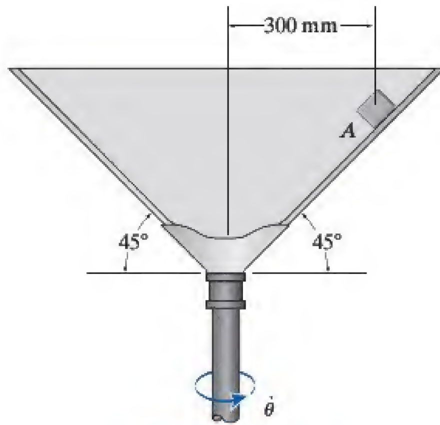
13-91. La barra AB de 2 kg sube y baja a medida que su extremo se desliza sobre la superficie contorneada lisa de la leva, donde $r = 0.1$ m y $z = (0.02 \text{ sen } \theta)$ m. Si la leva gira a una velocidad angular constante de 5 rad/s, determine la fuerza máxima y mínima que la leva ejerce en el rodillo en A. Ignore la fricción en el cojinete C y la masa del rodillo.



Probs. 13-90/91

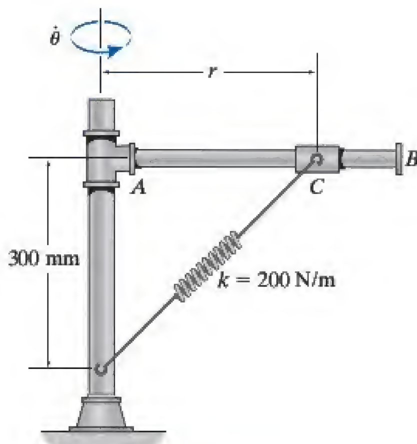
***13-92.** Si el coeficiente de fricción estática entre la superficie cónica y el bloque de masa m es $\mu_s = 0.2$, determine la velocidad angular constante mínima $\dot{\theta}$ de modo que el bloque no se deslice hacia abajo.

•13-93. Si el coeficiente de fricción estática entre la superficie cónica y el bloque es $\mu_s = 0.2$, determine la velocidad angular constante máxima $\dot{\theta}$ de modo que el bloque no se deslice hacia arriba.



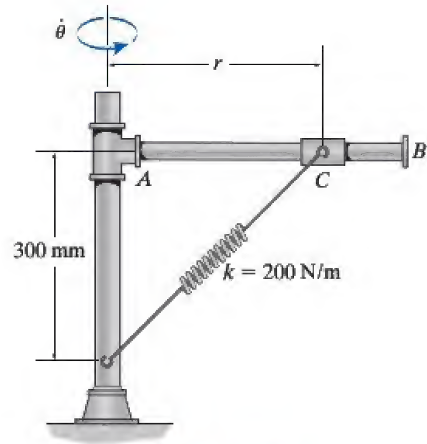
Probs. 13-92/93

13-94. Si la posición del anillo C de 3 kg sobre la barra lisa AB se mantiene en r = 720 mm, determine la velocidad angular constante $\dot{\theta}$ a la cual gira el mecanismo en torno al eje vertical. La longitud no alargada del resorte es de 400 mm. Ignore la masa de la barra y el tamaño del anillo.



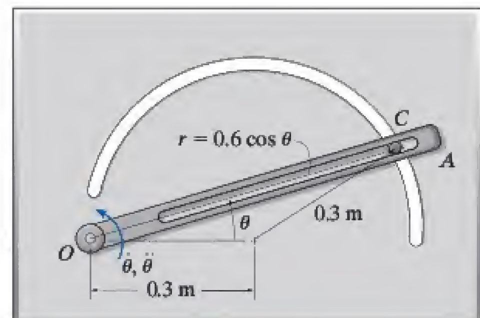
Prob. 13-94

13-95. El mecanismo gira sobre el eje vertical a una velocidad angular constante de $\dot{\theta}$ = 6 rad/s. Si la barra AB es lisa, determine la posición constante r del anillo C de 3 kg. La longitud no alargada del resorte es de 400 mm. Ignore la masa de la barra y el tamaño del anillo.



Prob. 13-95

***13-96.** Debido a la restricción, el cilindro C de 0.5 kg viaja a lo largo de la trayectoria descrita por $r = (0.6 \cos \theta)$m. Si el brazo OA gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj con una velocidad angular de $\dot{\theta}$ = 2 rad/s y una aceleración angular de $\ddot{\theta}$ = 0.8 rad/s² en el instante θ = 30°, determine la fuerza ejercida por el brazo en el cilindro en este instante. El cilindro está en contacto con sólo un borde de la ranura y el movimiento ocurre en el plano horizontal.

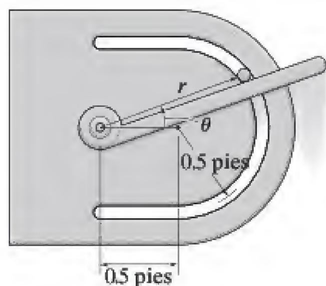


Prob. 13-96

13

•**13-97.** La lata lisa de 0.75 lb es guiada a lo largo de la trayectoria circular por el brazo. Si éste gira con una velocidad angular $\dot{\theta} = 2$ rad/s y una aceleración angular $\ddot{\theta} = 0.4$ rad/s^2 en el instante $\theta = 30°$, determine la fuerza que ejerce la guía en la lata. El movimiento ocurre en el *plano horizontal*.

13-98. Resuelva el problema 13-97 si el movimiento ocurre en el *plano vertical*.

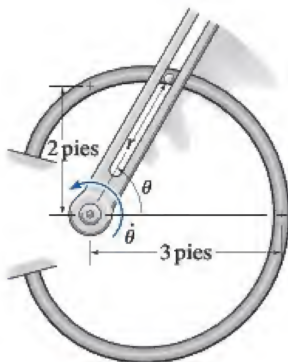


Probs. 13-97/98

13-99. Se utiliza la horquilla para mover la partícula de 2 lb alrededor de la trayectoria horizontal que tiene la forma de un limaçon, $r = (2 + \cos\theta)$ pies. Si en todo momento $\dot{\theta} = 0.5$ rad/s, determine la fuerza que ejerce la horquilla en la partícula en el instante $\theta = 90°$. La horquilla y la trayectoria tocan la partícula en sólo un lado.

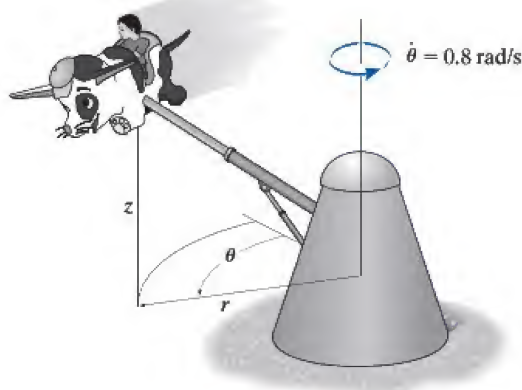
***13-100.** Resuelva el problema 13-99 en el instante $\theta = 60°$.

•**13-101.** Se utiliza la horquilla para mover la partícula de 2 lb alrededor de la trayectoria horizontal que tiene la forma de un limaçon, $r = (2 + \cos\theta)$ pies. Si $\theta = (0.5t^2)$ rad, donde t está en segundos, determine la fuerza que ejerce la horquilla sobre la partícula en el instante $t = 1$ s. La horquilla y la trayectoria tocan la partícula en sólo un lado.



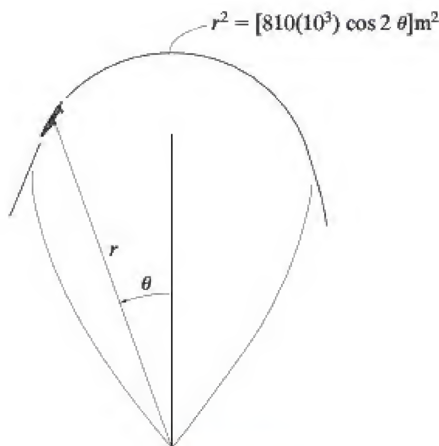
Probs. 13-99/100/101

13-102. El juego mecánico gira a una velocidad angular constante de $\dot{\theta} = 0.8$ rad/s. Si la trayectoria del juego está definida por $r = (3 \operatorname{sen}\theta + 5)$ m y $z = (3\cos\theta)$ m, determine las componentes r, θ y z de la fuerza ejercida por el asiento en el niño de 20 kg cuando $\theta = 120°$.



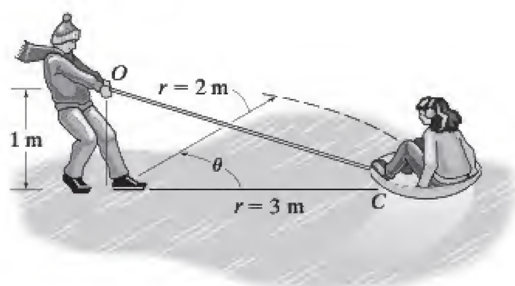
Prob. 13-102

13-103. El avión ejecuta un rizo vertical definido por $r^2 = [810(10^3)\cos 2\theta]$ m^2. Si el piloto mantiene una rapidez constante $v = 120$ m/s a lo largo de la trayectoria, determine la fuerza normal que el asiento ejerce sobre él en el instante $\theta = 0°$. La masa del piloto es de 75 kg.



Prob. 13-103

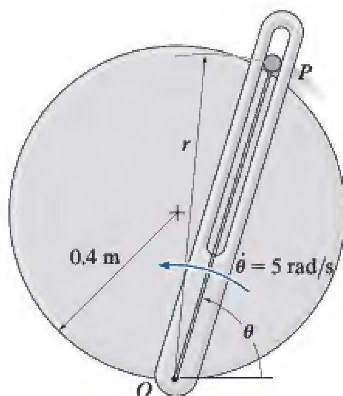
***13-104.** Un muchacho firmemente parado le da vueltas a la muchacha sentada en un "plato" o trineo redondo en una trayectoria circular de radio $r_0 = 3$ m de modo que su velocidad angular es $\dot{\theta}_0 = 0.1$ rad/s. Si se tira del cable OC hacia dentro de modo que la coordenada radial r cambie con una velocidad constante $\dot{r} = -0.5$ m/s, determine la tensión que ejerce en el trineo en el instante $r = 2$ m. La masa de la muchacha y el trineo es de 50 kg. Ignore el tamaño de la muchacha y el trineo y los efectos de la fricción entre el trineo y el hielo. *Sugerencia:* primero demuestre que la ecuación de movimiento en la dirección θ resulta $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (1/r)\, d/dt(r^2\dot{\theta}) = 0$. Al integrarse, $r^2\dot{\theta} = C$, donde la constante C se determina con los datos del problema.



Prob. 13-104

13-105. La masa de la partícula es de 80 g. Está unida a una cuerda elástica que se extiende de O a P y debido al brazo ranurado se mueve a lo largo de la trayectoria circular *horizontal* $r = (0.8 \text{ sen } \theta)$ m. Si la rigidez de la cuerda es $k = 30$ N/m y su longitud no alargada es de 0.25 m, determina la fuerza que ejerce el brazo en la partícula cuando $\theta = 60°$. El brazo guía tiene una velocidad angular constante $\dot{\theta} = 5$ rad/s.

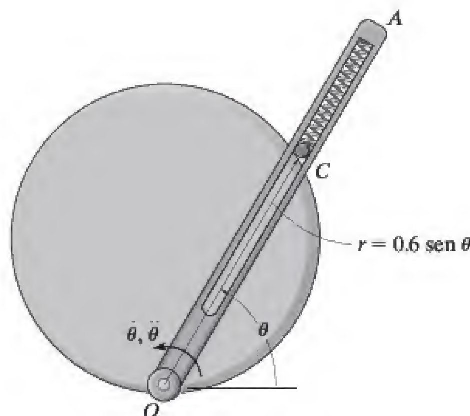
13-106. Resuelva el problema 13-105 si $\ddot{\theta} = 2$ rad/s^2 cuando $\dot{\theta} = 5$ rad/s y $\theta = 60°$.



Probs. 13-105/106

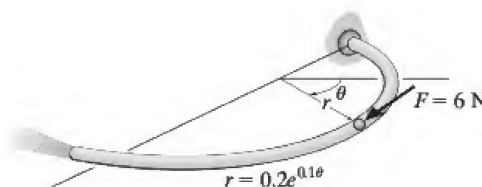
13-107. El cilindro C de 1.5 kg se mueve a lo largo de la trayectoria descrita por $r = (0.6 \text{ sen } \theta)$ m. Si el brazo OA gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj a una velocidad angular constante $\dot{\theta} = 3$ rad/s, determine la fuerza ejercida por la ranura del brazo OA en el cilindro en el instante $\theta = 60°$. La rigidez del resorte es de 100 N/m y no está alargado cuando $\theta = 30°$. Sólo un borde del brazo ranurado toca el cilindro. Ignore el tamaño del cilindro. El movimiento ocurre en el plano horizontal.

***13-108.** El cilindro C de 1.5 kg se desplaza a lo largo de la trayectoria descrita por $r = (0.6 \text{ sen } \theta)$ m. Si el brazo OA gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj a una velocidad angular de $\dot{\theta} = 3$ rad/s, determine la fuerza ejercida por la ranura lisa del brazo OA sobre el cilindro en el instante $\theta = 60°$. La rigidez del resorte es de 100 N/m y cuando $\theta = 30°$ no está alargado. Sólo un borde del brazo ranurado toca el cilindro. Ignore el tamaño del cilindro. El movimiento ocurre en el plano vertical.



Probs. 13-107/108

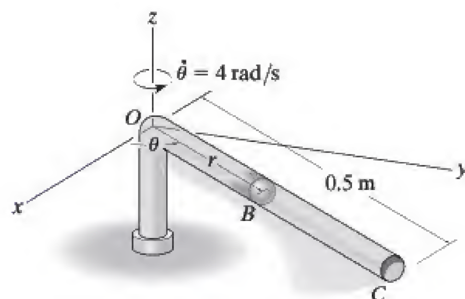
•13-109. Con presión neumática, se hace que una bola de 0.5 kg se mueva a través del tubo instalado en el plano horizontal y cuya forma es la de una espiral logarítmica. Si la fuerza tangencial ejercida en la bola por la presión neumática es de 6 N, determine la tasa de incremento en la rapidez de la bola en el instante $\theta = \pi/2$. Además, ¿cuál es el ángulo ψ entre la coordenada radial r y la línea de acción de la fuerza de 6 N?



Prob. 13-109

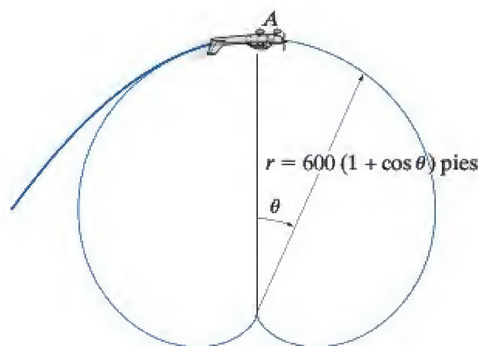
13

13-110. El tubo gira en el plano horizontal a una velocidad constante $\dot{\theta} = 4$ rad/s. Si una bola B de 0.2 kg comienza a moverse del reposo en el origen O con una velocidad radial inicial $\dot{r} = 1.5$ m/s y se mueve hacia fuera a través del tubo, determine las componentes radial y transversal de su velocidad en el instante en que deja el extremo externo C, $r = 0.5$ m. *Sugerencia:* demuestre que la ecuación de movimiento en la dirección r es $\ddot{r} - 16r = 0$. La solución es de la forma $r = Ae^{-4t} + Be^{4t}$. Evalúe las constantes de integración A y B y determine el tiempo t cuando $r = 0.5$ m. Prosiga para obtener v_r y v_θ.



Prob. 13-110

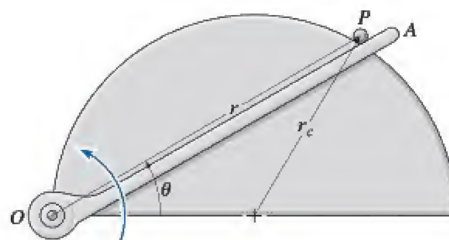
13-111. El piloto de un avión ejecuta un rizo vertical el cual en parte sigue la trayectoria de un cardioide, $r = 600(1 + \cos\theta)$ pies. Si su rapidez en A ($\theta = 0°$) es una constante $v_P = 80$ pies/s, determine la fuerza vertical que el cinturón de seguridad debe ejercer en él para mantenerlo en su asiento cuando el avión hace un rizo invertido en A. El piloto pesa 150 lb.



Prob. 13-111

***13-112.** El brazo OA guía la bola de 0.5 lb a lo largo de la trayectoria circular vertical $r = 2r_c \cos\theta$. Si la velocidad angular del brazo es $\dot{\theta} = 0.4$ rad/s y una aceleración angular $\ddot{\theta} = 0.8$ rad/s^2 en el instante $\theta = 30°$, determine la fuerza del brazo en la bola. Ignore la fricción y el tamaño de la bola. Establezca $r_c = 0.4$ pies.

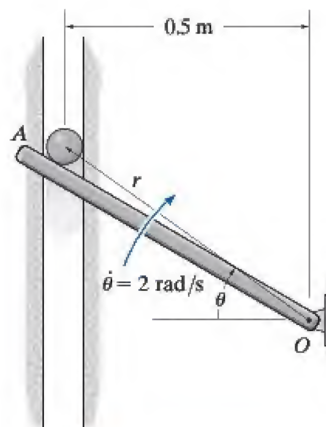
•13-113. El brazo OA guía la bola de masa m a lo largo de la trayectoria circular vertical $r = 2r_c \cos\theta$. Si la velocidad angular constante del brazo es $\dot{\theta}_0$, determine el ángulo $\theta \leq 45°$ al cual la bola comienza a dejar la superficie del semicilindro. Ignore la fricción y el tamaño de la bola.



Probs. 13-112/113

13-114. La masa de la bola es de 1 kg y se mueve sólo a lo largo de una ranura vertical debido a la rotación del brazo liso OA. Determine la fuerza del brazo en la bola y la fuerza normal de la ranura en la bola cuando $\theta = 30°$. El brazo gira a una velocidad angular constante $\dot{\theta} = 3$ rad/s. Suponga que sólo un lado de la ranura toca la bola en todo momento.

13-115. Resuelva el problema 13-114, si la velocidad angular del brazo es $\ddot{\theta} = 2$ rad/s^2 cuando $\dot{\theta} = 3$ rad/s en $\theta = 30°$.



Probs. 13-114/115

*13.7 Movimiento de fuerza central y mecánica espacial

Si una partícula se mueve sólo bajo la influencia de una fuerza cuya línea de acción siempre está dirigida hacia un punto fijo, el movimiento se llama *movimiento de fuerza central*. Por lo común, este tipo de movimiento lo provocan fuerzas electrostáticas y gravitatorias.

Para analizar el movimiento, consideraremos la partícula P de la figura 13-22a, de masa m en la que actúa sólo la fuerza central $\mathbf{F}$. El diagrama de cuerpo libre de la partícula se muestra en la figura 13-22b. Con coordenadas polares (r, θ), las ecuaciones de movimiento, ecuaciones 13-9, se escriben

$$\Sigma F_r = ma_r; \qquad -F = m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

$$\Sigma F_\theta = ma_\theta; \qquad 0 = m\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right) \tag{13-11}$$

La segunda de estas ecuaciones se escribe como

$$\frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right] = 0$$

de modo que al integrar se obtiene

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h \tag{13-12}$$

Aquí h es la constante de integración.

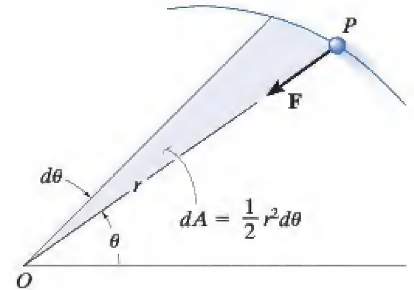
En la figura 13-22a observe que el área sombreada descrita por el radio r, a medida que r describe un ángulo $d\theta$, es $dA = \frac{1}{2}r^2\,d\theta$. Si la *velocidad areal* se define como

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{2} \tag{13-13}$$

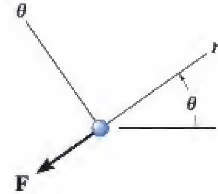
entonces se ve que la velocidad areal de una partícula sometida a movimiento centralizado es *constante*. Expresado de otra manera, la partícula barrerá segmentos de área iguales por unidad de tiempo a medida que se desplaza a lo largo de la trayectoria. Para obtener la *trayectoria del movimiento*, $r = f(\theta)$, la variable independiente t se elimina de las ecuaciones 13-11. Con la regla de la cadena del cálculo y la ecuación 13-12, las derivadas con respecto al tiempo de las ecuaciones 13-11 se pueden reemplazar por

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = \left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)\right]\frac{h}{r^2}$$



(a)



(b)

Fig. 13-22



Este satélite está sometido a una fuerza central y su movimiento orbital se puede pronosticar con exactitud mediante las ecuaciones desarrolladas en esta sección.

Si sustituimos una nueva variable dependiente (xi) $\xi = 1/r$ en la segunda ecuación, tenemos

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -h^2\xi^2\frac{d^2\xi}{d\theta^2}$$

Además, el cuadrado de la ecuación 13-12 se escribe

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = h^2\xi^4$$

Al sustituir estas dos ecuaciones en la primera de las ecuaciones 13-11 se tiene

$$-h^2\xi^2\frac{d^2\xi}{d\theta^2} - h^2\xi^3 = -\frac{F}{m}$$

o

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi = \frac{F}{mh^2\xi^2} \qquad (13\text{-}14)$$

Esta ecuación diferencial define la trayectoria por la que la partícula viaja cuando se somete a la fuerza central **F**.*

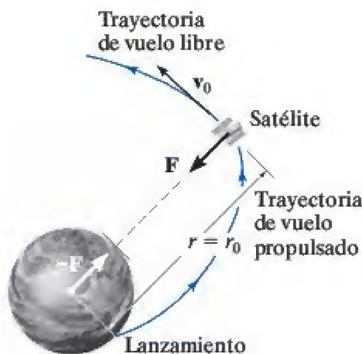


Fig. 13-23

Para su aplicación, se considerará la fuerza gravitatoria. Algunos ejemplos comunes de sistemas de fuerza central que dependen de la gravitación incluyen el movimiento de la Luna y satélites artificiales alrededor de la Tierra, y el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Como un problema típico de mecánica espacial, considere la trayectoria de una satélite o vehículo espacial lanzado a una órbita de vuelo libre con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$, figura 13-23. Se supondrá que esta velocidad inicialmente es *paralela* a la tangente en la superficie terrestre, como se muestra en la figura.† Un poco después de que el satélite vuela libremente, la única fuerza que actúa en él es la fuerza de gravitación de la Tierra. (Las atracciones gravitatorias que implican otros cuerpos como la Luna o el Sol se omitirán puesto que el caso de órbitas cercanas a la Tierra su efecto es mínimo comparado con la gravitación de la Tierra.) De acuerdo con la ley de la gravitación de Newton, la fuerza **F** siempre actuará entre los centros de masa de la Tierra y el satélite, figura 13-23. De acuerdo con la ecuación 13-1, la magnitud de esta fuerza de atracción es

$$F = G\frac{M_e m}{r^2}$$

donde M_e y m representan la masa de la Tierra y el satélite, respectivamente, G es la contante gravitacional y r es la distancia entre los

*En la derivación, **F** se considera positiva cuando está dirigida hacia el punto O. Si **F** está opuestamente dirigida, el lado derecho de la ecuación 13-14 deberá ser negativo.

†El caso en que $\mathbf{v}_0$ actúa a un cierto ángulo inicial θ con respecto a la tangente, puede describirse mejor mediante la conservación de la cantidad de movimiento angular (vea prob. 15-100).

centros de masa. Para obtener la trayectoria orbital, establecemos $\xi = 1/r$ en la ecuación precedente y sustituimos el resultado en la ecuación 13-14. Obtenemos

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi = \frac{GM_e}{h^2} \tag{13-15}$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden contiene coeficientes constantes y es no homogénea. La solución es la suma de las soluciones complementarias y particulares proporcionadas por

$$\xi = \frac{1}{r} = C\cos(\theta - \phi) + \frac{GM_e}{h^2} \tag{13-16}$$

Esta ecuación representa la *trayectoria de vuelo libre* del satélite. Es la ecuación de una sección cónica expresada en función de coordenadas polares.

Una interpretación geométrica de la ecuación 13-16 requiere conocer la ecuación de una sección cónica. Como se muestra en la figura 13-24, una sección cónica se define como el lugar geométrico de un punto P que se desplaza de modo que la relación de su distancia a un *foco*, punto fijo F, a su distancia perpendicular a una línea fija DD llamada *directriz* es constante. Esta relación constante se denotará como e y se llama *excentricidad*. Por definición

$$e = \frac{FP}{PA}$$

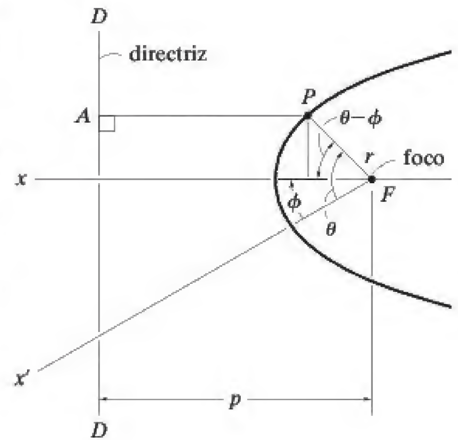


Fig. 13-24

Por la figura 13-24,

$$FP = r = e(PA) = e[p - r\cos(\theta - \phi)]$$

o

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}\cos(\theta - \phi) + \frac{1}{ep}$$

Al comparar esta ecuación con la ecuación 13-16, se ve que la distancia fija del foco a la directriz es

$$p = \frac{1}{C} \tag{13-17}$$

Y la excentricidad de la sección cónica de la trayectoria es

$$e = \frac{Ch^2}{GM_e} \tag{13-18}$$

13

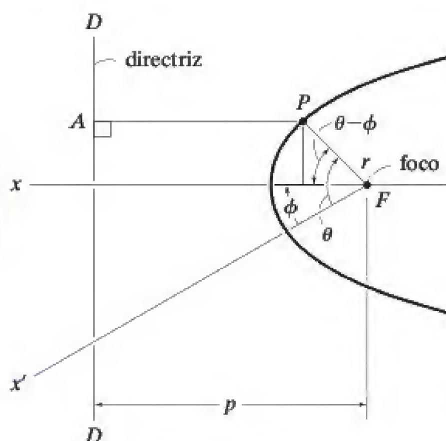


Fig. 13-24 (cont.)

Siempre que el ángulo polar θ se mida con respecto al eje x (un eje de simetría puesto que es perpendicular a la directriz), el ángulo ϕ es cero, figura 13-24, y por consiguiente la ecuación 13-16 se reduce a

$$\frac{1}{r} = C\cos\theta + \frac{GM_e}{h^2} \tag{13-19}$$

Las constantes h y C se determinan con los datos obtenidos para la posición y velocidad del satélite al final de la *trayectoria de vuelo propulsado*. Por ejemplo, si la altura o distancia inicial al vehículo espacial es r_0, medida desde el centro de la Tierra y su velocidad inicial es v_0 al principio de su vuelo libre, figura 13-25, entonces la constante h se obtiene con la ecuación 13-12. Cuando $\theta = \phi = 0°$, la velocidad $\mathbf{v}_0$ no tiene componente radial; por consiguiente, de acuerdo con la ecuación 12-25, $v_0 = r_0(d\theta/dt)$, de modo que

$$h = r_0^2\frac{d\theta}{dt}$$

o

$$h = r_0 v_0 \tag{13-20}$$

Para determinar C, use la ecuación 13-19 con $\theta = 0°$, $r = r_0$ y sustituya en la ecuación 13-20 para h:

$$C = \frac{1}{r_0}\left(1 - \frac{GM_e}{r_0 v_0^2}\right) \tag{13-21}$$

La ecuación de la trayectoria de vuelo libre es

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}\left(1 - \frac{GM_e}{r_0 v_0^2}\right)\cos\theta + \frac{GM_e}{r_0^2 v_0^2} \tag{13-22}$$

El tipo de trayectoria recorrida por el satélite se determina con el valor de la excentricidad de la sección cónica dada por la ecuación 13-18. Si

$e = 0$	la trayectoria de vuelo libre es un círculo	(13-23)
$e = 1$	la trayectoria de vuelo libre es una parábola	
$e < 1$	la trayectoria de vuelo libre es una elipse	
$e > 1$	la trayectoria de vuelo libre es una hipérbola	

Trayectoria parabólica. Cada una de estas trayectorias se muestran en la figura 13-25. Por las curvas se ve que cuando el satélite sigue una trayectoria parabólica, está "en el borde" de nunca regreso a su punto de partida inicial. La velocidad de lanzamiento inicial, $\mathbf{v}_0$, requerida para que el satélite siga una trayectoria parabólica se llama *velocidad de escape*. La rapidez v_e se determina con la segunda de las ecuaciones 13-23, $e = 1$, con las ecuaciones 13-18, 13-20 y 13-21. Se deja como ejercicio demostrar que

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{r_0}} \qquad (13\text{-}24)$$

Órbita circular. La rapidez v_c requerida para lanzar un satélite a una *órbita circular* se puede determinar mediante la primera de las ecuaciones 13-23, $e = 0$. Como e está relacionada con h y C, ecuación 13-18, C debe ser cero para satisfacer esta ecuación (de acuerdo con la ecuación 13-20, h no puede ser cero); y por consiguiente, mediante la ecuación 13-21, tenemos

$$v_c = \sqrt{\frac{GM_e}{r_0}} \qquad (13\text{-}25)$$

Siempre que r_0 representa una altura mínima de lanzamiento, en la cual la resistencia de la atmósfera se omite, las velocidades de lanzamiento menores que v_c harán que el satélite reingrese a la atmósfera y o se queme o estrelle, figura 13-25.

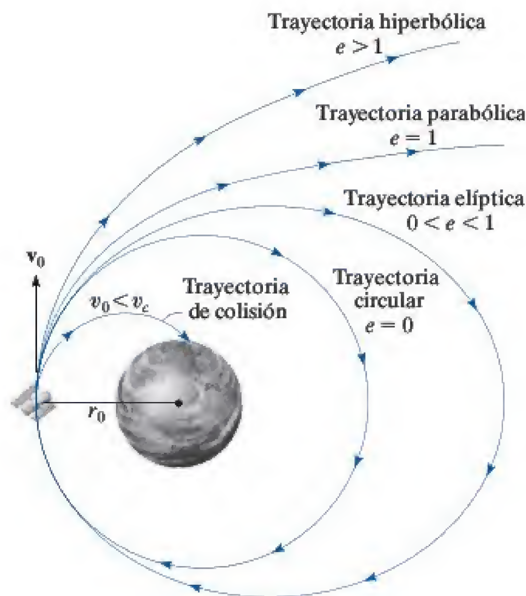


Fig. 13-25

13

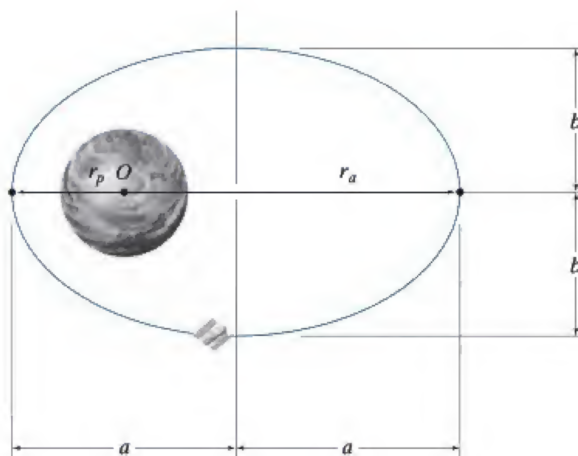


Fig. 13-26

Órbita elíptica. Todas las trayectorias alcanzadas por los planetas y la mayoría de los satélites son elípticas, figura 13-26. Para la órbita de un satélite alrededor de la Tierra, la *distancia mínima* de la órbita al centro de la Tierra O (el cual se encuentra localizado en uno de los focos de la elipse) es r_p y se determina con la ecuación 13-22 y $\theta = 0°$. Por consiguiente;

$$r_p = r_0 \tag{13-26}$$

Esta distancia mínima se llama *perigeo* de la órbita. El *apogeo* o distancia máxima r_a se determina con la ecuación 13-22 y $\theta = 180°$.* Por tanto,

$$r_a = \frac{r_0}{(2GM_e/r_0v_0^2) - 1} \tag{13-27}$$

Con referencia a la figura 13-26, la mitad del eje mayor de la elipse es

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} \tag{13-28}$$

Por geometría analítica se puede demostrar que la mitad del eje menor se determina con la ecuación

$$b = \sqrt{r_p r_a} \tag{13-29}$$

*En realidad, la terminología perigeo y apogeo tiene que ver sólo con órbitas alrededor de la *Tierra*. Si cualquier otro cuerpo celestial se localiza en el foco de una órbita elíptica, las distancias mínimas y máximas se conocen respectivamente como *periapsis* y *apoapsis* de la órbita.

Además, mediante integración directa, el área de una elipse es

$$A = \pi ab = \frac{\pi}{2}(r_p + r_a)\sqrt{r_p r_a} \qquad (13\text{-}30)$$

La ecuación 13-13 definió la velocidad areal, $dA/dt = h/2$. Al integrar se obtiene $A = hT/2$, donde T es el *periodo* para realizar una revolución orbital. Según la ecuación 13-30, el periodo es

$$T = \frac{\pi}{h}(r_p + r_a)\sqrt{r_p r_a} \qquad (13\text{-}31)$$

Además de predecir la trayectoria orbital de satélites terrestres, la teoría desarrollada en esta sección es válida, hasta una aproximación sorprendentemente cercana, al predecir el movimiento real de los planetas que viajan alrededor del Sol. En este caso, la masa del Sol, M_s, se debía sustituir por M_e cuando se utilicen las fórmulas apropiadas.

El hecho de que los planetas sigan órbitas elípticas alrededor del Sol fue descubierto por el astrónomo alemán Johannes Kepler a principios del siglo XVII. Realizó su descubrimiento *antes* de que Newton hubiera desarrollado las leyes del movimiento y la ley de la gravitación y por tanto con el tiempo constituyó una importante comprobación de la validez de estas leyes. Las leyes de Kepler, desarrolladas después de 20 años de observación planetaria, se resumen como sigue:

1. Todo planeta viaja en su órbita de tal suerte que la línea que lo une con el centro del Sol barre áreas iguales a intervalos iguales, cualquiera que sea la longitud de la línea.

2. La órbita de todo planeta es una elipse con el Sol colocado en uno de sus focos.

3. El cuadrado del periodo de cualquier planeta es directamente proporcional al cubo del eje mayor de su órbita.

Las ecuaciones 13-13 y 13-22 dan un enunciado matemático de la primera y segunda leyes, respectivamente. La tercera ley puede comprobarse con la ecuación 13-31 mediante las ecuaciones 13-19, 13-28 y 13-29 (vea el problema 13-116).

13

EJEMPLO 13.13

Se lanza un satélite a 600 km de la superficie terrestre, con una velocidad inicial de 30 Mm/h que actúa paralela a la tangente en la superficie terrestre, figura 13-27. Suponga que el radio de la Tierra es de 6378 km y que su masa es de 5.976(10^{24}) kg, y determine (a) la excentricidad de la trayectoria orbital y (b) la velocidad del satélite en el apogeo.

SOLUCIÓN

Parte (a). La excentricidad de la órbita se obtiene con la ecuación 13-18. Primero se determinan las constantes h y C con las ecuaciones 13-20 y 13-21. Como

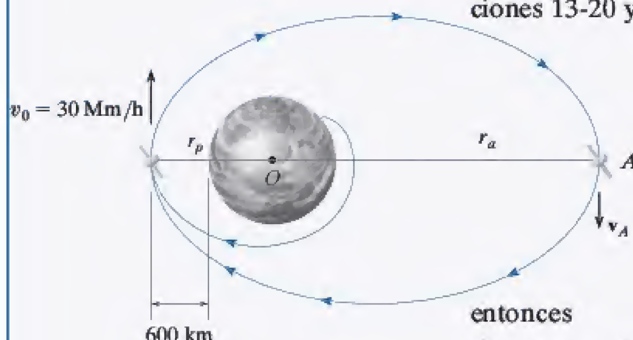


Fig. 13-27

$$r_p = r_0 = 6378 \text{ km} + 600 \text{ km} = 6.978(10^6) \text{ m}$$

$$v_0 = 30 \text{ Mm/h} = 8333.3 \text{ m/s}$$

entonces

$$h = r_p v_0 = 6.978(10^6)(8333.3) = 58.15(10^9) \text{ m}^2/\text{s}$$

$$C = \frac{1}{r_p}\left(1 - \frac{GM_e}{r_p v_0^2}\right)$$

$$= \frac{1}{6.978(10^6)}\left\{1 - \frac{66.73(10^{-12})[5.976(10^{24})]}{6.978(10^6)(8333.3)^2}\right\} = 25.4(10^{-9}) \text{ m}^{-1}$$

Por consiguiente,

$$e = \frac{Ch^2}{GM_e} = \frac{2.54(10^{-8})[58.15(10^9)]^2}{66.73(10^{-12})[5.976(10^{24})]} = 0.215 < 1 \quad \textit{Resp.}$$

Por la ecuación 13-23, se ve que la órbita es una *elipse*.

Parte (b). Si el satélite hubiera sido lanzado en el apogeo A que se muestra en la figura 13-27, con una velocidad $\mathbf{v}_A$, se mantendría la misma órbita siempre que

$$h = r_p v_0 = r_a v_A = 58.15(10^9) \text{ m}^2/\text{s}$$

Por la ecuación 13-27, tenemos

$$r_a = \frac{r_p}{\dfrac{2GM_e}{r_p v_0^2} - 1} = \frac{6.978(10^6)}{\dfrac{2[66.73(10^{-12})][5.976(10^{24})]}{6.978(10^6)(8333.3)^2} - 1} = 10.804(10^6)$$

Por tanto,

$$v_A = \frac{58.15(10^9)}{10.804(10^6)} = 5382.2 \text{ m/s} = 19.4 \text{ Mm/h} \quad \textit{Resp.}$$

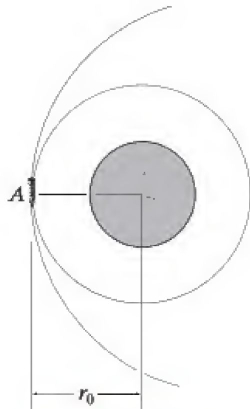
NOTA: cuanto más se aleja el satélite de la Tierra, más lento se mueve, lo que era de esperarse, puesto que h es constante.

PROBLEMAS

En los siguientes problemas, excepto en los que se indique lo contrario, suponga que el radio de la Tierra es de 6378 km, que su masa es de 5.976 (10^{24}) kg, que la masa del Sol es de 1.99 (10^{30})kg y que la constante gravitacional es $G = 66.73\ (10^{-12})\ \text{m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2)$.

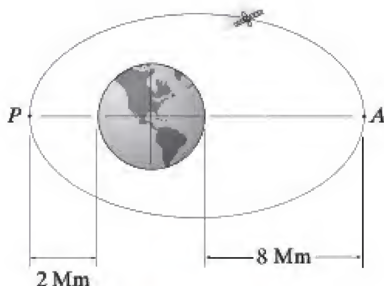
***13-116.** Compruebe la tercera ley del movimiento de Kepler. *Sugerencia:* use las ecuaciones 13-19, 13-28, 13-29 y 13-31.

•13-117. El explorador Viking se aproxima al planeta Marte en una trayectoria parabólica como se muestra. Cuando llega al punto A su velocidad es de 10 Mm/h. Determine r_0 y la velocidad requerida en A de modo que pueda mantenerse entonces en una órbita circular como se muestra. La masa de Marte es 0.1074 veces la masa de la Tierra.



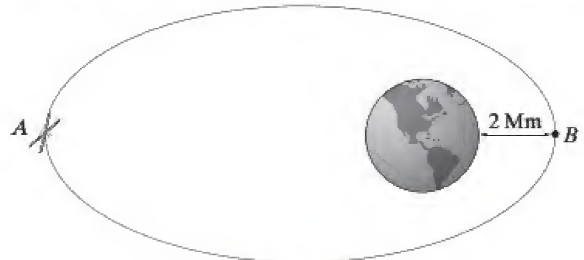
Prob. 13-117

13-118. El satélite describe una órbita elíptica alrededor de la Tierra como se muestra. Determine su velocidad en el perigeo P y en apogeo A y el periodo del satélite.



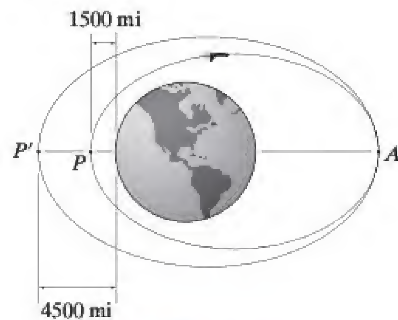
Prob. 13-118

13-119. El satélite se mueve en una órbita elíptica con una excentricidad $e = 0.25$. Determine su velocidad cuando está en su distancia máxima A y distancia mínima B de la Tierra.



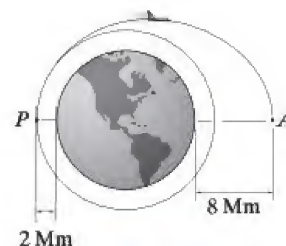
Prob. 13-119

***13-120.** Se lanza el transbordador espacial con una velocidad de 17 500 mi/h paralela a la tangente de la superficie terrestre en el punto P y en seguida viaja alrededor de la órbita elíptica. Cuando llega al punto A, sus motores se encienden y su velocidad se incrementa de repente. Determine el incremento de velocidad requerido de modo que entre en la segunda órbita elíptica. Considere $G = 34.4(10^{-9})\ \text{pies}^4/\text{lb}\cdot\text{s}^4$, $M_e = 409(10^{21})$ slug y $r_e = 3960$ mi, donde 5280 pies = mi.



Prob. 13-120

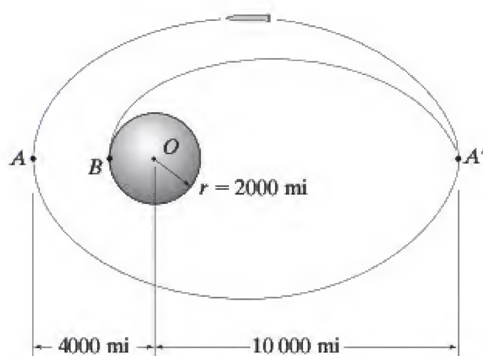
•13-121. Determine el incremento de velocidad del transbordador espacial en el punto P de modo que viaje desde una órbita circular hasta una órbita elíptica que pasa por el punto A. Además, calcule la rapidez del transbordador en A.



Prob. 13-121

13-122. El cohete vuela libremente a lo largo de una trayectoria elíptica $A'A$. El planeta no tiene atmósfera y su masa es 0.60 veces la de la Tierra. Si la órbita tiene el apoapsis y periapsis mostrados, determine la velocidad del cohete cuando está en el punto A. Considere $G = 34.4(10^{-9})(\text{lb} \cdot \text{pie}^2)/\text{slug}^2$, $M_e = 409(10^{21})$ slug, 1 mi = 5280 pies.

13-123. Si el cohete va a aterrizar en el superficie del planeta, determine la velocidad de vuelo libre que debe tener en A' de modo que aterrice en B. ¿Qué tanto tiempo se requiere para que el cohete aterrice, al ir de A' a B? El planeta no tiene atmósfera y su masa es 0.6 veces la de la Tierra. Considere $G = 34.4(10^{-9})(\text{lb} \cdot \text{pie}^2)/\text{slug}^2$, $M_e = 409(10^{21})$ slug, 1 mi = 5280 pies.



Probs. 13-122/123

*__13-124.__ Se tiene que colocar un satélite de comunicaciones en una órbita circular ecuatorial alrededor de la Tierra de modo que permanezca siempre sobre un punto directo de la superficie terrestre. Si esto requiere que el periodo sea de 24 horas (aproximadamente) determine el radio de la órbita y la velocidad del satélite.

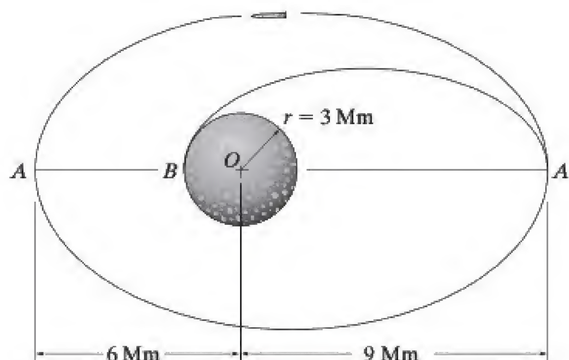
•**13-125.** La ecuación 13-25 proporciona la rapidez de un satélite lanzado a una órbita circular alrededor de la Tierra. Determine la velocidad de un satélite lanzado paralelo a la superficie terrestre, de modo que viaje en una órbita circular a 800 km de la superficie terrestre.

13-126. La órbita de la Tierra tiene un excentricidad $e = 0.0821$ alrededor del Sol. Como la distancia mínima de la Tierra al Sol es de $151.3(10^6)$ km, encuentre a qué velocidad viaja el cohete cuando está a esta distancia. Determine la ecuación en coordenadas polares que describa la órbita de la Tierra alrededor del Sol.

13-127. Un cohete se encuentra en una órbita elíptica de vuelo libre alrededor de la Tierra de modo que la excentricidad de su órbita es e y su perigeo es r_0. Determine el incremento mínimo de rapidez que deberá tener para escapar del campo gravitacional de la Tierra cuando está en este punto a lo largo de su órbita.

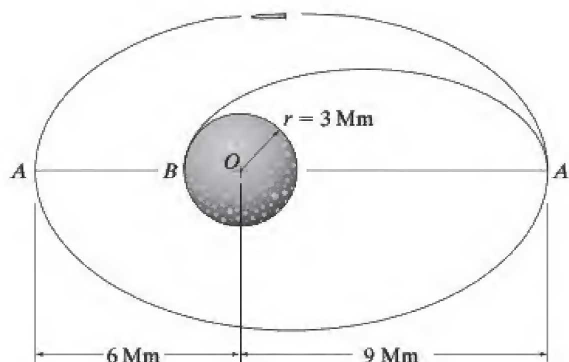
*__13-128.__ Un cohete está en una órbita circular alrededor de la Tierra a una altitud $h = 4$ Mm. Determine el incremento de rapidez que debe tener para que escape del campo gravitacional de la Tierra.

•**13-129.** El cohete está en vuelo libre a lo largo de una trayectoria elíptica $A'A$. El planeta no tiene atmósfera y su masa es 0.70 veces la de la Tierra. Si el cohete tiene apoapsis y periapsis como se muestra en la figura, determine la rapidez del cohete cuando está en el punto A.



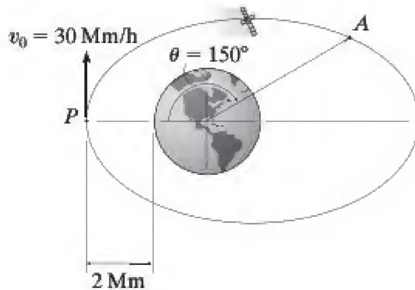
Prob. 13-129

13-130. Si el cohete va a aterrizar en la superficie del planeta, determine la velocidad de vuelo libre requerida que debe tener en A' de modo que choque con el planeta en B. ¿Cuánto tiempo requiere el cohete para aterrizar al ir de A' a B a lo largo de una trayectoria elíptica? El planeta no tiene atmósfera y su masa es 0.70 veces la de la Tierra.



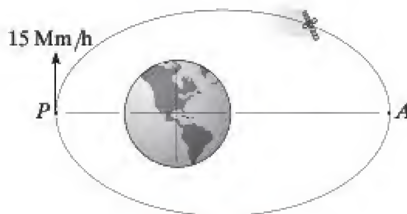
Prob. 13-130

13-131. Se lanza el satélite paralelo a la tangente de la superficie terrestre con una velocidad de $v_0 = 30$ Mm/h desde una altitud de 2 Mm sobre el nivel del mar como se muestra. Demuestre que la órbita es elíptica y determine la velocidad del satélite cuando llega al punto A.



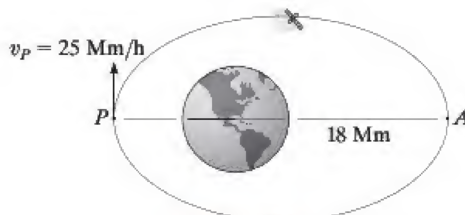
Prob. 13-131

***13-132.** El satélite describe una órbita elíptica cuya excentricidad es $e = 0.15$. Si su velocidad en el perigeo es $v_P = 15$ Mm/h, determine la velocidad en el perigeo A y el periodo del satélite.



Prob. 13-132

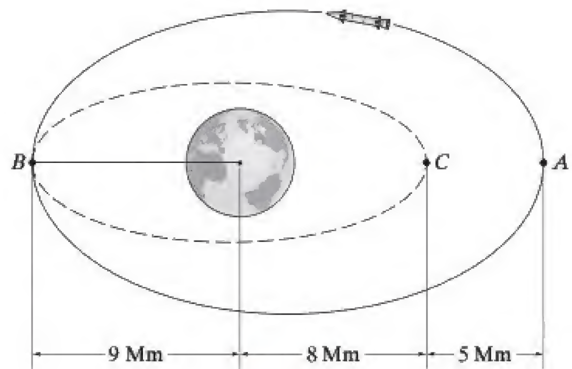
•13-133. El satélite describe una órbita elíptica. Cuando está en el perigeo P, su velocidad es $v_P = 25$ Mm/h y cuando llega al punto A, su velocidad es $v_A = 15$ Mm/h y su altitud sobre la superficie terrestre es 18 Mm. Determine el periodo del satélite.



Prob. 13-133

13-134. Se lanza un satélite con una velocidad inicial $v_0 = 4000$ km/h, paralelo a la superficie terrestre. Determine la altitud requerida (o rango de altitudes) sobre la superficie terrestre para lanzarlo si la trayectoria de vuelo libre tiene que ser (a) circular, (b) parabólica, (c) elíptica y (d) hiperbólica.

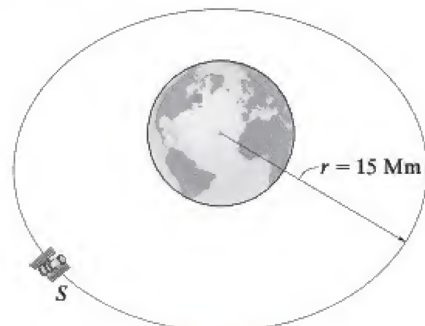
13-135. El cohete está en una órbita elíptica de vuelo libre alrededor de la Tierra de modo que $e = 0.76$ como se muestra. Determine su rapidez cuando está en el punto A. Además determine el cambio repentino de rapidez que el cohete debe experimentar en B para que esté en vuelo libre a lo largo de la órbita indicada por la trayectoria de líneas punteadas.



Prob. 13-135

***13-136.** Un satélite de comunicaciones viaja en una órbita circular sobre la Tierra de modo que siempre permanece sobre un punto directo de la superficie terrestre. En consecuencia, su periodo debe ser igual a la rotación de la Tierra, que es aproximadamente de 24 horas. Determine la altitud del satélite h sobre la superficie terrestre y su rapidez orbital.

•13-137. Determine la rapidez constante del satélite S de modo que circunde la Tierra con una órbita de radio $r = 15$ Mm. *Sugerencia:* use la ecuación 13-1.



Prob. 13-137

13

PROBLEMAS CONCEPTUALES

P13-1. Si la caja se suelta desde el punto de reposo en A, use valores numéricos para demostrar cómo estimaría el tiempo que le lleva llegar a B. Además, haga una lista de los supuestos para su análisis.



P13-1

P13-2. El remolcador tiene una masa conocida y su hélice proporciona un empuje máximo conocido. Cuando el remolcador marcha a toda máquina usted observa el tiempo que le lleva alcanzar una velocidad de valor conocido a partir del punto de reposo. Demuestre cómo podría determinar la masa de la barcaza. Ignore la resistencia del agua en el remolcador. Use valores numéricos para explicar su respuesta.



P13-2

P13-3. Determine la rapidez mínima de cada carro A y B de modo que los pasajeros no pierdan el contacto con el asiento mientras los brazos giran a una razón constante. ¿Cuál es la fuerza normal máxima del asiento en cada pasajero? Use valores numéricos para explicar su respuesta.



P13-3

P13-4. Cada carro está conectado en sus extremos por medio de un pasador al aro de la rueda, la cual gira a una rapidez constante. Con valores numéricos demuestre cómo se determina la fuerza resultante que el asiento ejerce en el pasajero localizado en la parte superior del carro A. Los pasajeros van sentados hacia el centro de la rueda. Además, haga una lista de los supuestos para su análisis.



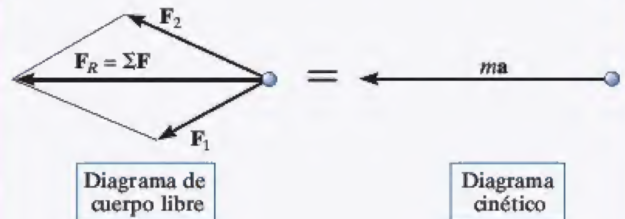
P13-4

REPASO DEL CAPÍTULO

Cinética

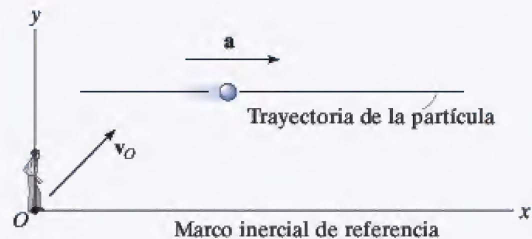
Cinética es el estudio de la relación entre las fuerzas y la aceleración que provocan. Esta relación está basada en la segunda ley del movimiento de Newton, expresada matemáticamente como $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Antes de aplicar la ecuación de movimiento, es importante trazar primero el *diagrama de cuerpo libre* de la partícula para tener en cuenta todas las fuerzas que actúan en ella. Gráficamente, este diagrama es igual al *diagrama cinético*, el cual muestra el resultado de las fuerzas, esto es, el vector $m\mathbf{a}$.



Sistema de coordenadas inercial

Cuando se aplica la ecuación de movimiento, es importante medir la aceleración de un sistema de coordenadas inercial. Este sistema dispone de ejes que no giran sino que o están fijos o se trasladan a una velocidad constante. Varios tipos de sistemas de coordenadas inerciales pueden utilizarse para aplicar la ecuación $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ en su forma de componentes.



Se utilizan ejes rectangulares x, y, z para describir el movimiento rectilíneo a lo largo de cada uno de estos ejes.

$$\Sigma F_x = ma_x,\ \Sigma F_y = ma_y,\ \Sigma F_z = ma_z$$

Con frecuencia se utilizan ejes normales y tangenciales n, t cuando se conoce la trayectoria. Recuerde que $\mathbf{a}_n$ siempre está dirigida en la dirección $+n$. Indica el cambio en la dirección de la velocidad. Asimismo recuerde que $\mathbf{a}_t$ es tangente a la trayectoria. Indica el cambio en la magnitud de la velocidad.

$$\Sigma F_t = ma_t,\ \Sigma F_n = ma_n,\ \Sigma F_b = 0$$

$$a_t = dv/dt \quad \text{o} \quad a_t = v\,dv/ds$$

$$a_n = v^2/\rho \quad \text{donde} \quad \rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}|}{|d^2y/dx^2|}$$

Las coordenadas cilíndricas son útiles cuando se especifica el movimiento angular de la línea radial r o cuando la trayectoria se puede describir de manera conveniente con estas coordenadas.

$$\Sigma F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

$$\Sigma F_z = m\ddot{z}$$

Movimiento de fuerza central

Cuando una fuerza sola actúa en una partícula, como durante la trayectoria de vuelo libre de un satélite en un campo gravitacional, entonces el movimiento se conoce como movimiento de fuerza central. La órbita depende de la excentricidad e; y por consiguiente, la trayectoria puede ser circular, parabólica, elíptica o hiperbólica.



Para diseñar apropiadamente el rizo de esta montaña rusa, es necesario asegurarse de que los carros tengan suficiente energía para completar el rizo sin que se salgan de los rieles.

Cinética de una partícula: trabajo y energía

14

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Desarrollar el principio de trabajo y energía y aplicarlo para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y desplazamiento.
- Estudiar problemas que implican potencia y eficiencia
- Presentar el concepto de fuerza conservadora y aplicar el teorema de la conservación de la energía para resolver problemas de cinética.

14.1 Trabajo de una fuerza

En este capítulo analizaremos el movimiento de una partícula por medio de los conceptos de trabajo y energía. La ecuación resultante servirá para resolver problemas que impliquen fuerza, velocidad y desplazamiento. Pero primero tenemos que definir el trabajo de una fuerza. Específicamente, una fuerza **F** realizará *trabajo* en una partícula sólo cuando ésta sufra un *desplazamiento en la dirección de la fuerza*. Por ejemplo, si la fuerza **F** en la figura 14-1 hace que la partícula se mueva a lo largo de la trayectoria s de la posición **r** a una nueva posición **r**′, el desplazamiento es entonces $d\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$. La magnitud de $d\mathbf{r}$ es ds, la longitud del segmento diferencial a lo largo de la trayectoria. Si el ángulo entre las colas de $d\mathbf{r}$ y **F** es θ, figura 14-1, entonces el trabajo realizado por **F** es una *cantidad escalar*, definida por

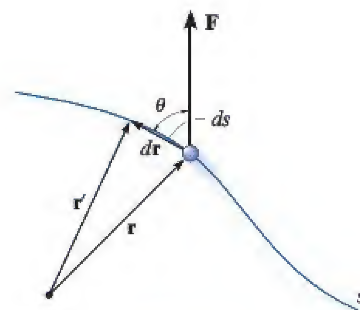


Fig. 14-1

$$dU = F\,ds\cos\theta$$

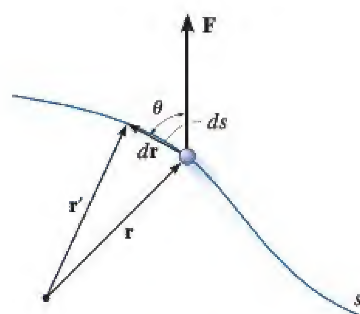


Fig. 14-1

14

Por definición del producto punto esta ecuación también puede escribirse como

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Este resultado puede interpretarse en una de dos maneras: o como el producto de F y el componente de desplazamiento $ds \cos\theta$ en la dirección de la fuerza, o como el producto de ds por el componente de fuerza, $F\cos\theta$, en la dirección del desplazamiento. Observe que si $0° \leq \theta < 90°$, entonces el componente de fuerza y el desplazamiento tienen el *mismo sentido,* de modo que el trabajo es *positivo*; en tanto que si $90° < \theta \leq 180°$, estos vectores tendrán *sentido opuesto*, y por consiguiente el trabajo es *negativo*. Además, $dU = 0$ si la fuerza es *perpendicular* al desplazamiento, puesto que $\cos 90° = 0$, o si la fuerza se aplica en un *punto fijo*, en cuyo caso el desplazamiento es cero.

La unidad de trabajo en unidades SI es el joule (J) el cual es la cantidad de trabajo realizada por una fuerza de un newton cuando recorre una distancia de un metro en la dirección de la fuerza ($1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$). En el sistema FPS, el trabajo se mide en unidades libra-pie (pie · libra), que es el trabajo realizado por una fuerza de una libra que actúa a lo largo de una distancia de un pie en la dirección de la fuerza.*

Trabajo de una fuerza variable. Si la partícula en la que actúa una fuerza **F** sufre un desplazamiento finito a lo largo de su trayectoria de $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$ o de s_1 a s_2, figura 14-2*a*, el trabajo de la fuerza **F** se determina mediante integración. Siempre que **F** y θ puedan expresarse en función de la posición, entonces

$$U_{1-2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} F\cos\theta \, ds \tag{14-1}$$

En ocasiones, esta relación se obtiene por medio de datos experimentales para trazar la gráfica de $F\cos\theta$ vs. s. Entonces, el *área* bajo la gráfica limitada por s_1 y s_2 representa el trabajo total, figura 14-2*b*.

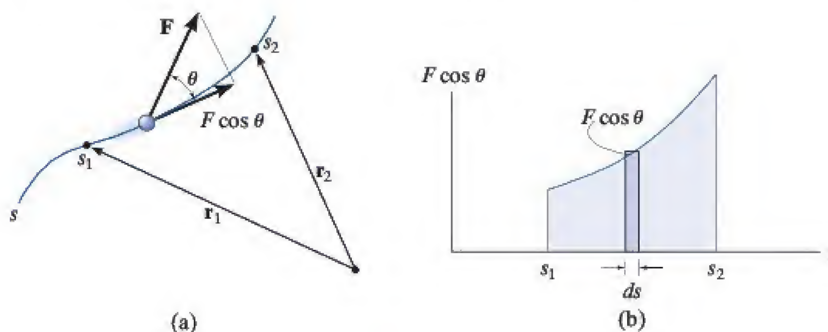


Fig. 14-2

*Por convención, las unidades del momento de una fuerza o par de torsión se escriben como lb · pies, para distinguirlas de aquellas que significan trabajo, pies · lb.

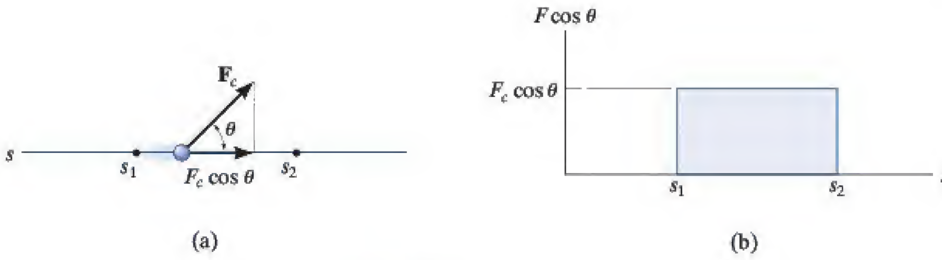


Fig. 14-3

Trabajo de una fuerza constante que se mueve a lo largo de una línea recta. Si la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}_c$ es constante y actúa a un ángulo constante θ con respecto a su trayectoria de línea recta, figura 14-3*a*, entonces el componente de $\mathbf{F}_c$ en la dirección del desplazamiento siempre es $F_c \cos\theta$. El trabajo realizado por $\mathbf{F}_c$ cuando la partícula se desplaza de s_1 a s_2 se determina con la ecuación 14-1, en cuyo caso

$$U_{1-2} = F_c \cos\theta \int_{s_1}^{s_2} ds$$

o

$$\boxed{U_{1-2} = F_c \cos\theta(s_2 - s_1)} \tag{14-2}$$

Aquí $\mathbf{F}_c$ representa el *área del rectángulo* en la figura 14-3*b*.

Trabajo de un peso. Considere una partícula de peso $\mathbf{W}$, el cual se desplaza a lo largo de la trayectoria mostrada en la figura 14-4 de la posición s_1 a s_2. En un punto intermedio, el desplazamiento $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$. Como $\mathbf{W} = -W\mathbf{j}$, al aplicar la ecuación 14-1 tenemos

$$U_{1-2} = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (-W\mathbf{j})\cdot(dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} -W\,dy = -W(y_2 - y_1)$$

o

$$\boxed{U_{1-2} = -W\,\Delta y} \tag{14-3}$$

Por tanto, el trabajo es independiente de la trayectoria y es igual a la magnitud del peso de la partícula por el desplazamiento vertical. En el caso mostrado en la figura 14-4 el trabajo es *negativo*, puesto que W actúa hacia abajo y Δy es hacia arriba. Observe, sin embargo, que si la partícula se desplaza *hacia abajo* $(-\Delta y)$, el trabajo del peso es *positivo*. ¿Por qué?

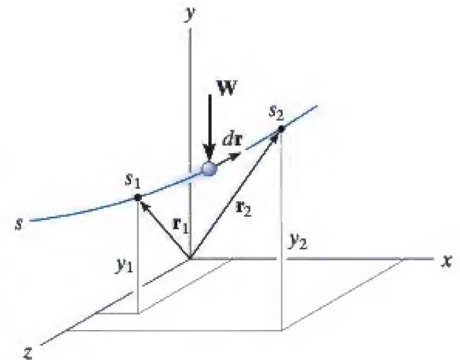


Fig. 14-4

Trabajo de una fuerza de resorte. Si un resorte elástico se alarga una distancia ds, figura 14-5a, entonces el trabajo realizado por la fuerza que actúa en la partícula adjunta es $dU = -F_s ds = -ks\,ds$. El trabajo es *negativo* puesto que $\mathbf{F}_s$ actúa en el sentido opuesto a ds. Si la partícula se desplaza de s_1 a s_2, el trabajo de $\mathbf{F}_s$ es por tanto

$$U_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} F_s\,ds = \int_{s_1}^{s_2} -ks\,ds$$

$$\boxed{U_{1-2} = -\left(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2\right)} \qquad (14\text{-}4)$$

Este trabajo representa el área trapezoidal bajo la línea $F_s = ks$, figura 14-5b.

Para no cometer errores en el signo cuando se aplica esta ecuación, basta fijarse en la dirección de la fuerza de resorte que actúa en la partícula y compararla con el sentido del desplazamiento de ésta; si ambos actúan en el *mismo sentido*, el *trabajo es positivo*; si lo hacen *opuestos* entre sí, el *trabajo es negativo*.

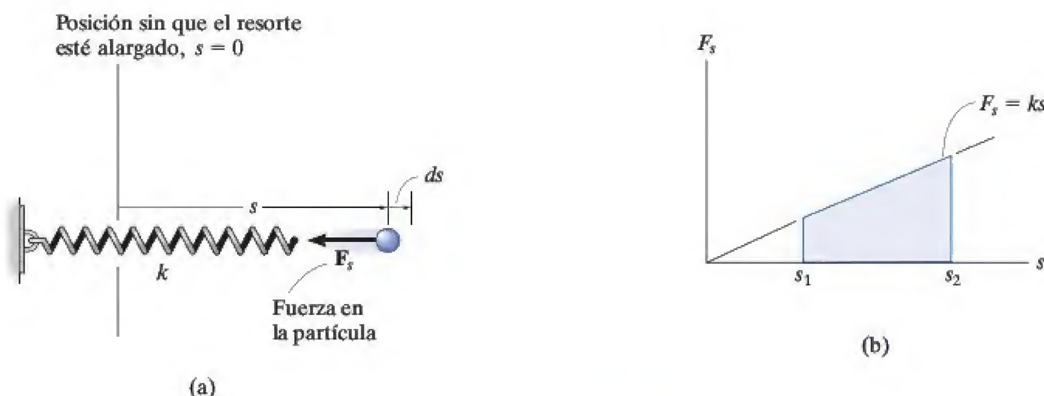
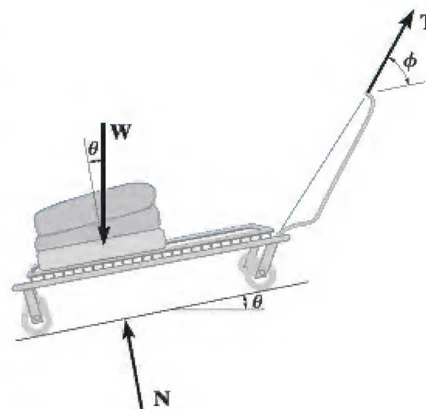


Fig. 14-5

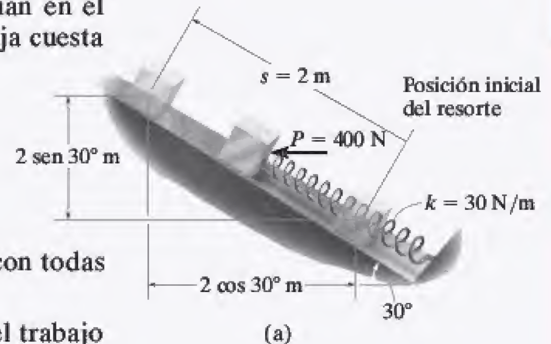
Las fuerzas que actúan en la carretilla al jalarla cuesta arriba una distancia s, se muestran en su diagrama de cuerpo libre. La fuerza en el remolque $\mathbf{T}$ realiza un trabajo positivo $U_T = (T\cos\phi)s$, el peso realiza trabajo negativo $U_W = -(W \text{ sen } \theta)s$, y la fuerza normal $\mathbf{N}$ no realiza trabajo puesto que no se desplaza a lo largo de su línea de acción.





EJEMPLO 14.1

El bloque de 10 kg de la figura 14-6*a* descansa sobre el plano inclinado. Si el resorte originalmente está alargado 0.5 m, determine el trabajo total realizado por todas las fuerzas que actúan en el bloque cuando una fuerza horizontal $P = 400$ N lo empuja cuesta arriba $s = 2$ m.



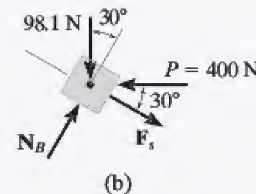


Fig. 14-6

14

SOLUCIÓN

Primero se traza el diagrama de cuerpo libre del bloque con todas las fuerzas que actúan en el bloque, figura 14-6*b*.

Fuerza horizontal *P*. Como esta fuerza es *constante*, el trabajo se determina con la ecuación 14-2. El resultado puede calcularse como la fuerza por el componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza, es decir,

$$U_P = 400 \text{ N } (2 \text{ m} \cos 30°) = 692.8 \text{ J}$$

o el desplazamiento por el componente de fuerza en la dirección del desplazamiento, es decir,

$$U_P = 400 \text{ N} \cos 30°(2 \text{ m}) = 692.8 \text{ J}$$

Fuerza del resorte F_s. En la posición inicial el resorte está alargado $s_1 = 0.5$ m y en la posición final está alargado $s_2 = 0.5$ m $+$ 2 m $=$ 2.5 m. Requerimos que el trabajo sea negativo puesto que la fuerza y el desplazamiento se oponen entre sí. El trabajo de $\mathbf{F}_s$ es por tanto

$$U_s = -\left[\tfrac{1}{2}(30 \text{ N/m})(2.5 \text{ m})^2 - \tfrac{1}{2}(30 \text{ N/m})(0.5 \text{ m})^2\right] = -90 \text{ J}$$

Peso *W*. Como el peso actúa en el sentido opuesto a su desplazamiento vertical, el trabajo es negativo; es decir,

$$U_W = -(98.1 \text{ N}) \ (2 \text{ m sen } 30°) = -98.1 \text{ J}$$

Observe que también es posible considerar el componente del peso en la dirección del desplazamiento, es decir,

$$U_W = -(98.1 \text{ sen } 30° \text{ N}) \ (2 \text{ m}) = -98.1 \text{ J}$$

Fuerza normal N_B. Esta fuerza *no* realiza *trabajo* puesto que *siempre* es perpendicular al desplazamiento.

Trabajo total. El trabajo de todas las fuerzas cuando el bloque se desplaza 2 m es por consiguiente

$$U_T = 692.8 \text{ J} - 90 \text{ J} - 98.1 \text{ J} = 505 \text{ J} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

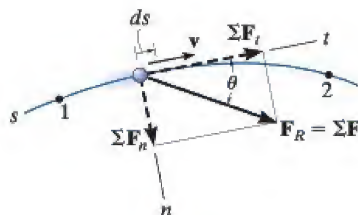


Fig. 14-7

14.2 Principio de trabajo y energía

Considere la partícula que aparece en la figura 14-7, localizada en la trayectoria definida con respecto a un sistema de coordenadas inercial. Si la partícula tiene una masa m y se somete a un sistema de fuerzas externas, representado por la fuerza resultante $\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F}$, entonces la ecuación de movimiento de la partícula en la dirección tangencial es $\Sigma F_t = ma_t$. Si aplicamos la ecuación cinemática $a_t = v\,dv/ds$ e integramos ambos lados y suponemos que inicialmente la partícula tiene una posición $s = s_1$ y una rapidez $v = v_1$ y después $s = s_2$ y $v = v_2$, tenemos

$$\Sigma \int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds = \int_{v_1}^{v_2} mv\,dv$$

$$\Sigma \int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 \qquad (14\text{-}5)$$

En la figura 14-7, observe que $\Sigma F_t = \Sigma F \cos\theta$ y puesto que la ecuación 14-1 define el trabajo, el resultado final se escribe como

$$\Sigma U_{1-2} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 \qquad (14\text{-}6)$$

Esta ecuación representa el *principio de trabajo y energía* para la partícula. El término del lado izquierdo es la suma del trabajo realizado por *todas* las fuerzas que actúan en la partícula cuando ésta se mueve del punto 1 al punto 2. Los dos términos del lado derecho, cuya forma es $T = \frac{1}{2}mv^2$, definen la *energía cinética* final e inicial, respectivamente. Como el trabajo, la energía cinética es un *escalar* y sus unidades son joules (J) y lb · pie. Sin embargo, a diferencia del trabajo, que puede ser o positivo o negativo, la energía cinética *siempre* es *positiva*, sin importar la dirección del movimiento de la partícula.

Cuando se aplica la ecuación 14-6, a menudo se expresa como

$$\boxed{T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2} \qquad (14\text{-}7)$$

la cual establece que la energía cinética inicial de la partícula, más el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan en ella cuando se mueve de su posición inicial a su posición final, es igual a la energía cinética final de la partícula.

Como se señaló en la derivación, el principio de trabajo y energía representa una forma integrada de $\Sigma F_t = ma_t$, con que se obtuvo por la ecuación cinemática $a_t = v\,dv/ds$. Por consiguiente, este principio constituye una *sustitución* conveniente de $\Sigma F_t = ma_t$ cuando se resuelven problemas cinéticos que implican *fuerza*, *velocidad* y *desplazamiento*, puesto que estas cantidades intervienen en la ecuación 14-7. Para su aplicación, se sugiere el siguiente procedimiento.

Procedimiento para el análisis

Trabajo (Diagrama de cuerpo libre).

- Establezca el sistema de coordenadas inercial y trace un diagrama de cuerpo libre donde aparezcan todas las fuerzas que realizan trabajo en la partícula cuando se mueve a lo largo de su trayectoria.

Principio de trabajo y energía.

- Aplique el principio de trabajo y energía, $T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$.
- La energía cinética en los puntos inicial y final *siempre* es *positiva*, puesto que implica la velocidad al cuadrado $\left(T = \frac{1}{2}mv^2\right)$.
- Una fuerza realiza trabajo cuando se desplaza en la dirección de la fuerza.
- El trabajo es *positivo* cuando el componente de fuerza actúa en el *mismo sentido de dirección* como su desplazamiento, de lo contrario es negativo.
- Las fuerzas que son funciones del desplazamiento deben integrarse para obtener el trabajo. Gráficamente, el trabajo es igual al área bajo la curva de fuerza-desplazamiento.
- El trabajo de un peso es el producto de su magnitud por el desplazamiento vertical, $U_W = \pm Wy$. Es positivo cuando el peso se mueve hacia abajo.
- El trabajo de un resorte tiene la forma $U_s = \frac{1}{2}ks^2$, donde k es la rigidez del resorte y s es su alargamiento o compresión.

La aplicación numérica de este procedimiento se ilustra en los ejemplos dados después de la sección 14.3.



Si un automóvil choca con estos barriles de protección, su energía cinética se transformará en trabajo, lo que hace que los barriles, y hasta cierto grado el automóvil, se deformen. Si conocemos la cantidad de energía que puede absorber cada barril, es posible que diseñemos un parachoques como éste.

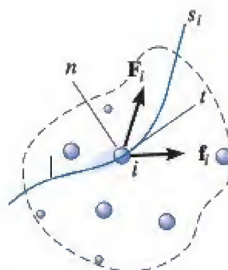
14.3 Principio de trabajo y energía para un sistema de partículas

El principio de trabajo y energía puede ampliarse para incluir un sistema de partículas aislado adentro de un espacio cerrado como se muestra en la figura 14-8. Aquí la partícula *i*-ésima arbitraria, de masa m_i, está sometida a una fuerza externa resultante $\mathbf{F}_i$ y a una fuerza interna resultante $\mathbf{f}_i$ que todas las demás partículas ejercen en la partícula *i*-ésima. Si aplicamos el principio de trabajo y energía a ésta y a cada una de las demás partículas que componen el sistema, entonces, puesto que el trabajo y la energía son cantidades escalares, las ecuaciones se suman algebraicamente, lo que da

$$\Sigma T_1 + \Sigma U_{1-2} = \Sigma T_2 \tag{14-8}$$

En este caso, la energía cinética inicial del sistema, además del trabajo realizado por todas las fuerzas externas e internas que actúan en el sistema, es igual a la energía cinética final del sistema.

Si el sistema representa un *cuerpo rígido en movimiento*, o una serie de cuerpos en movimiento conectados, entonces todas las partículas de cada cuerpo experimentarán el *mismo desplazamiento*. Por consiguiente, el trabajo de todas las fuerzas internas tendrá lugar en pares colineales iguales pero opuestos y por tanto se cancelan. Por otra parte, si se supone que el cuerpo es *no rígido*, sus partículas pueden desplazarse a lo largo de *trayectorias diferentes*, y una parte de la energía producida por las interacciones de las fuerzas se disipará y perderá como calor o se almacenará en el cuerpo si ocurren deformaciones permanentes. Analizaremos estos efectos brevemente al final de esta sección y en la sección 15.4. A lo largo de este texto, sin embargo, se aplicará el principio de trabajo y energía a problemas en los que no se tienen que considerar tales pérdidas de energía.



Sistema de coordenadas inercial

Fig. 14-8

Trabajo de fricción originado por deslizamiento. A continuación investigaremos una clase especial de problemas que requiere una cuidadosa aplicación de la ecuación 14-8. Estos problemas implican casos en los que un cuerpo se desliza sobre la superficie de otro cuando hay fricción. Considere, por ejemplo, un bloque que se traslada una distancia s sobre una superficie áspera como se muestra en la figura 14-9*a*. Si la fuerza aplicada **P** apenas balancea la fuerza de fricción *resultante* $\mu_k N$, figura 14-9*b*, entonces, debido al equilibrio, se mantiene una velocidad constante **v** y esperaríamos que se aplicara la ecuación 14-8 como sigue:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + Ps - \mu_k Ns = \tfrac{1}{2}mv^2$$

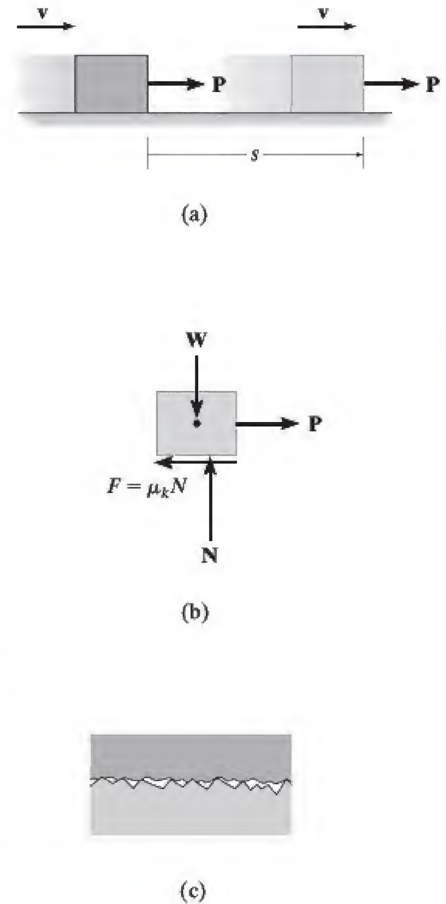


Fig. 14-9

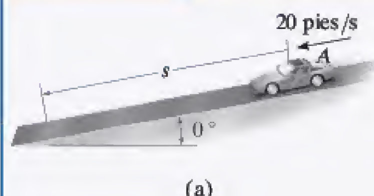
No obstante, esta ecuación se satisface si $P = \mu_k N$; sin embargo, como se sabe por experiencia, el deslizamiento *generará calor*, una forma de energía que parece no estar considerada en la ecuación de trabajo-energía. Para explicar esta paradoja y de esa manera representar con más precisión la naturaleza de la fricción, en realidad tendríamos que modelar el bloque de modo que las superficies en contacto sean *deformables* (no rígidas).* Recuerde que las partes ásperas en la parte inferior del bloque actúan como "dientes" y cuando el bloque se desliza estos dientes *se deforman un poco* y o se rompen o vibran al ser jalados por "dientes" en la superficie de contacto, figura 14-9*c*. Por consiguiente, las fuerzas de fricción que actúan en el bloque en estos puntos se desplazan ligeramente a causa de las deformaciones localizadas y más adelante las reemplazan otras fuerzas de fricción cuando se forman otros puntos de contacto. En todo momento, la **F** *resultante* de todas estas fuerzas de fricción en esencia permanece constante, es decir, $\mu_k N$; sin embargo, debido a las muchas *deformaciones localizadas*, el desplazamiento real s' de $\mu_k N$ *no* es el mismo que el desplazamiento s de la fuerza aplicada **P.** En lugar de eso, s' será *menor* que s ($s' < s$), y por consiguiente el *trabajo externo* realizado por la fuerza de fricción resultante será $\mu_k Ns'$ y no $\mu_k Ns$. La cantidad de trabajo restante, $\mu_k N(s - s')$, se manifiesta como un incremento de la *energía interna*, la cual hace en realidad que se eleve la temperatura del bloque.

En suma entonces, la ecuación 14-8 se aplica a problemas que implican fricción producida por deslizamiento; sin embargo, hay que entender que el trabajo de la fuerza de fricción resultante no está representada por $\mu_k Ns$; antes bien, este término representa *tanto* el trabajo externo producido por fricción ($\mu_k Ns'$) *como* el trabajo interno [$\mu_k N(s - s')$] el cual se convierte en varias formas de energía interna, como calor.†

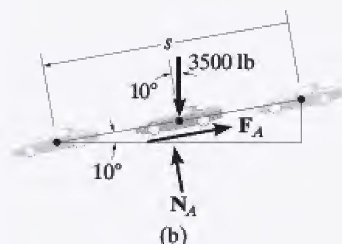
*Vea el capítulo 8 de *Ingeniería Mecánica: Estática.*

†Vea B.A. Sherwood y W.H. Bernard, "Work and Heat Transfer in the Presence of Sliding Friction", *Am. J. Phys.* 52, 1001, 1984.

EJEMPLO 14.2



(a)



(b)

Fig. 14-10

El automóvil de 3500 lb de la figura 14-10*a* viaja cuesta abajo de la carretera inclinada 10° a una rapidez de 20 pies/s. Si el conductor aplica los frenos y hace que las ruedas se bloqueen, determine qué distancia *s* patinan las llantas en la carretera. El coeficiente de fricción cinética entre las llantas y la carretera es $\mu_k = 0.5$.

SOLUCIÓN

Este problema se resuelve por medio del principio de trabajo y energía puesto que implica fuerza, velocidad y desplazamiento.

Trabajo (Diagrama de cuerpo libre). Como se muestra en la figura 14-10*b*, la fuerza normal $\mathbf{N}_A$ no realiza trabajo puesto que nunca se desplaza a lo largo de su línea de acción. El peso, 3500 lb, se desplaza *s* sen 10° y realiza trabajo positivo. ¿Por qué? La fuerza de fricción $\mathbf{F}_A$ realiza tanto trabajo externo como interno cuando experimenta un desplazamiento *s*. Este trabajo es negativo puesto que se opone al desplazamiento. Aplicamos la ecuación de equilibrio normal a la carretera y tenemos

$$+\nwarrow \Sigma F_n = 0; \quad N_A - 3500 \cos 10° \text{ lb} = 0 \qquad N_A = 3446.8 \text{ lb}$$

Por tanto,

$$F_A = \mu_k N_A = 0.5\,(3446.8 \text{ lb}) = 1723.4 \text{ lb}$$

Principio de trabajo y energía.

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3500 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(20 \text{ pies/s})^2 + 3500 \text{ lb}(s \operatorname{sen} 10°) - (1723.4 \text{ lb})s = 0$$

Al despejar *s* resulta

$$s = 19.5 \text{ pies} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: si este problema se resuelve por medio de la ecuación de movimiento, se requieren *dos pasos*. Primero, según el diagrama de cuerpo libre, figura 14-10*b*, la ecuación de movimiento se aplica a lo largo del plano inclinado. De esto resulta

$$+\swarrow \Sigma F_s = ma_s; \quad 3500 \operatorname{sen} 10° \text{ lb} - 1723.4 \text{ lb} = \frac{3500 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2} a$$

$$a = -10.3 \text{ pies/s}^2$$

Segundo, como *a* es constante, tenemos

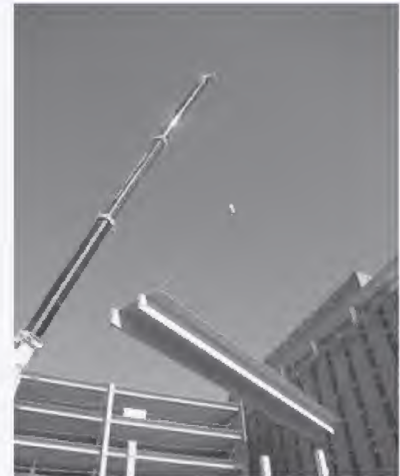
$$(+\swarrow) \quad v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0);$$

$$(0)^2 = (20 \text{ pies/s})^2 + 2(-10.3 \text{ pies/s}^2)(s - 0)$$

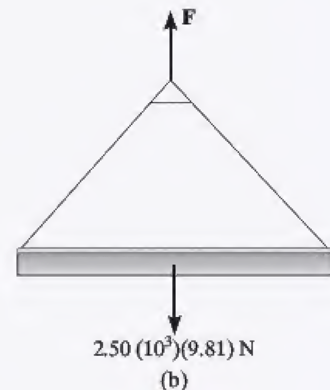
$$s = 19.5 \text{ pies} \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 14.3

Durante un breve tiempo la grúa de la figura 14-11*a* levanta la viga de 2.50 Mg con una fuerza $F = (28 + 3s^2)$ kN. Determine la velocidad de la viga cuando alcanza $s = 3$ m. También, ¿cuánto tiempo se requiere para que alcance esta altura a partir del punto de reposo?



(a)



(b)

Fig. 14-11

SOLUCIÓN

Podemos resolver una parte del problema con el principio de trabajo y energía puesto que implica fuerza, velocidad y desplazamiento. Debe utilizarse cinemática para determinar el tiempo. Observe que cuando $s = 0$, $F = 28(10^3)\text{N} > W = 2.50(10^3)(9.81)\text{N}$, por lo que habrá movimiento.

Trabajo (Diagrama de cuerpo libre). Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, figura 14-11*b*, la fuerza **F** realiza trabajo positivo, que se determina mediante integración puesto que esta fuerza es variable. Además, el peso es constante y realizará trabajo negativo ya que el desplazamiento es hacia arriba.

Principios de trabajo y energía.

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$0 + \int_0^s (28 + 3s^2)(10^3)\, ds - (2.50)(10^3)(9.81)s = \tfrac{1}{2}(2.50)(10^3)v^2$$

$$28(10^3)s + (10^3)s^3 - 24.525(10^3)s = 1.25(10^3)v^2$$

$$v = (2.78s + 0.8s^3)^{\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

Cuando $s = 3$ m,

$$v = 5.47 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Cinemática. Como podemos expresar la velocidad en función del desplazamiento, el tiempo se determina con $v = ds/dt$. En este caso,

$$(2.78s + 0.8s^3)^{\frac{1}{2}} = \frac{ds}{dt}$$

$$t = \int_0^3 \frac{ds}{(2.78s + 0.8s^3)^{\frac{1}{2}}}$$

La integración se realiza numéricamente con una calculadora de bolsillo. El resultado es

$$t = 1.79 \text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: la aceleración de la viga se determina al integrar la ecuación (1) por medio de $v\, dv = a\, ds$, o más directamente, al aplicar la ecuación de movimiento $\Sigma F = ma$.

14

14

EJEMPLO 14.4

La masa de la plataforma P de la figura 14-12a es insignificante y está atada por abajo, de modo que las cuerdas de 0.4 m de largo mantienen comprimido 0.6 m un resorte de 1 m de largo cuando *no hay nada* sobre la plataforma. Si se coloca un bloque de 2 kg sobre la plataforma y se libera del punto de reposo después de que la plataforma se empuja hacia abajo 0.1 m, figura 14-12b, determine la altura máxima h que el bloque se eleva en el aire, medida desde el suelo.

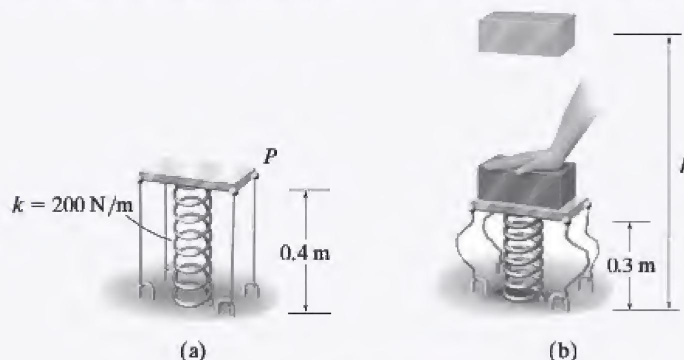
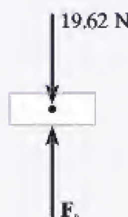


Fig. 14-12

SOLUCIÓN

Trabajo (Diagrama de cuerpo libre). Como el bloque se suelta del punto de reposo y después alcanza su altura máxima, las velocidades inicial y final son cero. El diagrama de cuerpo libre del bloque cuando aún está en contacto con la plataforma se muestra en la figura 14-12c. Observe que el peso realiza trabajo negativo y la fuerza del resorte trabajo positivo. ¿Por qué? En particular, la *compresión inicial* en el resorte es $s_1 = 0.6\text{ m} + 0.1\text{ m} = 0.7\text{ m}$. Debido a las cuerdas, la *compresión final* del resorte es $s_2 = 0.6\text{ m}$ (después de que el bloque sale de la plataforma). La cara inferior del bloque se eleva desde una altura de $(0.4\text{ m} - 0.1\text{ m}) = 0.3\text{ m}$ hasta una altura final h.



(c)

Principio de trabajo y energía.

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + \left\{-\left(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2\right) - W\,\Delta y\right\} = \tfrac{1}{2}mv_2^2$$

Observe que aquí $s_1 = 0.7\text{ m} > s_2 = 0.6\text{ m}$ y por tanto el trabajo del resorte determinado con la ecuación 14-4 será positivo una vez que se realizan los cálculos. Por tanto,

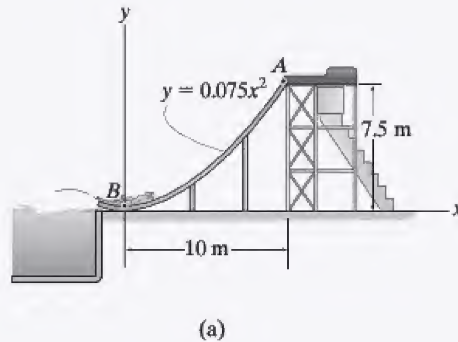
$$0 + \left\{-\left[\tfrac{1}{2}(200\text{ N/m})(0.6\text{ m})^2 - \tfrac{1}{2}(200\text{ N/m})(0.7\text{ m})^2\right] - (19.62\text{ N})[h - (0.3\text{ m})]\right\} = 0$$

Al resolver se obtiene

$$h = 0.963\text{ m}$$ ***Resp.***

EJEMPLO 14.5

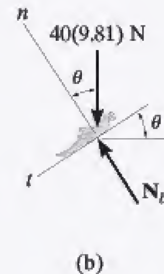
El muchacho de 40 kg en la figura 14-13*a* se desliza cuesta abajo del tobogán acuático. Si parte del punto de reposo en A, determine su rapidez cuando llega a B y la reacción normal que el tobogán ejerce en esta posición.



(a)

SOLUCIÓN

Trabajo (Diagrama de cuerpo libre). Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, figura 14-13*b*, dos fuerzas actúan en el muchacho al descender por el tobogán. Observe que la fuerza normal no realiza trabajo.



(b)

Principio de trabajo y energía.

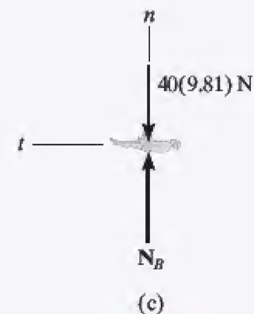
$$T_A + \Sigma U_{A-B} = T_B$$

$$0 + (40(9.81)\text{N})(7.5\text{ m}) = \tfrac{1}{2}(40\text{ kg})v_B^2$$

$$v_B = 12.13\text{ m/s} = 12.1\text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Ecuación de movimiento. Al referirnos al diagrama de cuerpo libre cuando el muchacho está en B, figura 14-13*c*, la reacción normal $\mathbf{N}_B$ se obtiene ahora al aplicar la ecuación de movimiento a lo largo del eje n. Aquí, el radio de curvatura de la trayectoria es

$$\rho_B = \frac{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|} = \left.\frac{[1 + (0.15x)^2]^{3/2}}{|0.15|}\right|_{x=0} = 6.667\text{ m}$$



(c)

Fig. 14-13

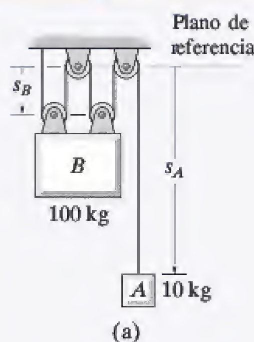
Por tanto,

$$+\uparrow \Sigma F_n = ma_n; \quad N_B - 40(9.81)\text{ N} = 40\text{ kg}\left(\frac{(12.13\text{ m/s})^2}{6.667\text{ m}}\right)$$

$$N_B = 1275.3\text{ N} = 1.28\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

14

EJEMPLO 14.6



(a)



(b)

Fig. 14-14

La masa de los bloques A y B que se muestran en la figura 14-14*a* es de 10 kg y 100 kg, respectivamente. Determine la distancia que B se desplaza cuando se suelta desde el punto de reposo hasta el punto donde su rapidez es de 2 m/s.

SOLUCIÓN

Este problema se resuelve si se consideran los bloques por separado y se aplica el principio de trabajo y energía a cada bloque. Sin embargo, el trabajo de la tensión del cable (desconocida) se elimina si los bloques A y B se consideran como un *solo sistema*.

Trabajo (Diagrama de cuerpo libre). Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre del sistema, figura 14-14*b*, la fuerza del cable **T** y las reacciones $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ *no realizan trabajo*, ya que estas fuerzas representan las reacciones en los soportes y por consiguiente no se mueven mientras los bloques se desplazan. Los dos pesos realizan trabajo positivo si *suponemos* que ambos se mueven hacia abajo en el sentido positivo de s_A y s_B.

Principio de trabajo y energía. Si tenemos en cuenta que los bloques se sueltan del punto de reposo, tenemos

$$\Sigma T_1 + \Sigma U_{1-2} = \Sigma T_2$$

$$\left\{\tfrac{1}{2}m_A(v_A)_1^2 + \tfrac{1}{2}m_B(v_B)_1^2\right\} + \{W_A\,\Delta s_A + W_B\,\Delta s_B\} = \left\{\tfrac{1}{2}m_A(v_A)_2^2 + \tfrac{1}{2}m_B(v_B)_2^2\right\}$$

$$\{0 + 0\} + \{98.1\text{ N}\,(\Delta s_A) + 981\text{ N}\,(\Delta s_B)\} = \left\{\tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(v_A)_2^2 + \tfrac{1}{2}(100\text{ kg})(2\text{ m/s})^2\right\} \qquad (1)$$

Cinemática. Al usar los métodos de cinemática analizados en la sección 12.9 en la figura 14-14*a* se ve que la longitud total l de todos los segmentos verticales de cable pueden expresarse en función de las coordenadas de posición s_A y s_B como

$$s_A + 4s_B = l$$

Por consiguiente, un cambio de posición en la ecuación de desplazamiento resulta en

$$\Delta s_A + 4\,\Delta s_B = 0$$

$$\Delta s_A = -4\,\Delta s_B$$

Aquí vemos que un desplazamiento hacia abajo de un bloque produce un desplazamiento hacia arriba del otro bloque. Observe que Δs_A y Δs_B deben tener la *misma* convención de signos en las ecuaciones 1 y 2. Al considerar las derivadas con respecto al, tiempo se obtiene

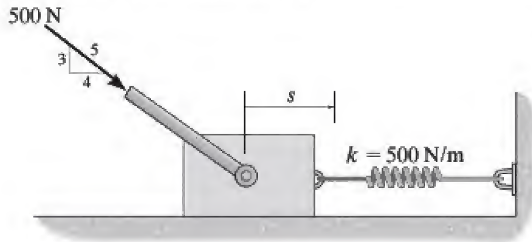
$$v_A = -4v_B = -4(2\text{ m/s}) = -8\text{ m/s} \qquad (2)$$

Al conservar el signo negativo en la ecuación 2 y sustituirlo en la ecuación 1 resulta

$$\Delta s_B = 0.883\text{ m}\downarrow \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

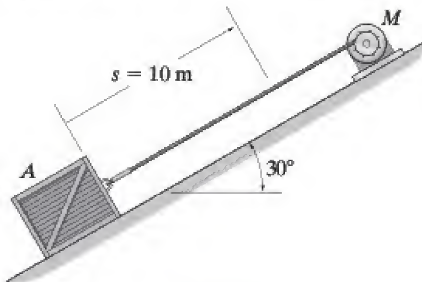
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F14-1. El resorte se coloca entre la pared y el bloque de 10 kg. Si éste se somete a una fuerza $F = 500$ N, determine su velocidad cuando $s = 0.5$ m. Cuando $s = 0$, el bloque está en reposo y el resorte no está comprimido. La superficie de contacto es lisa.



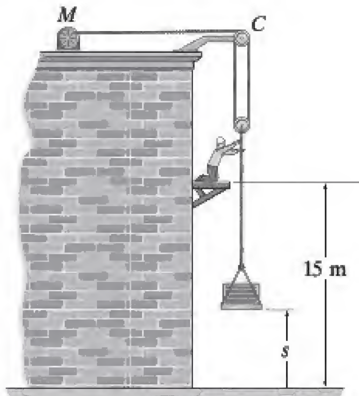
F14-1

F14-2. Si el motor ejerce una fuerza constante de 300 N en el cable, determine la rapidez del embalaje de 20 kg cuando recorre $s = 10$ m hacia arriba del plano, a partir del punto de reposo. El coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y el plano es $\mu_k = 0.3$.



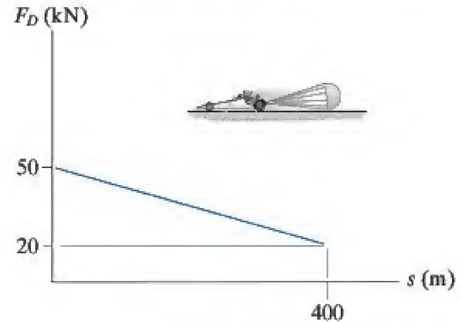
F14-2

F14-3. Si el motor ejerce una fuerza $F = (600 + 2s^2)$ N en el cable, determine la rapidez del embalaje de 100 kg cuando se eleva a $s = 15$ m. Inicialmente el embalaje está en reposo en el suelo.



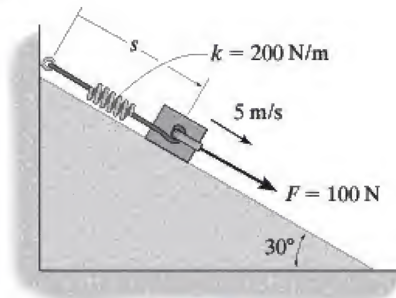
F14-3

F14-4. El dragster de 1.8 Mg se desplaza a 125 m/s cuando el motor se apaga y el paracaídas se abre. Si la fuerza de frenado del paracaídas puede ser representada de forma aproximada por la gráfica, determine la rapidez del dragster cuando ha recorrido 400 m.



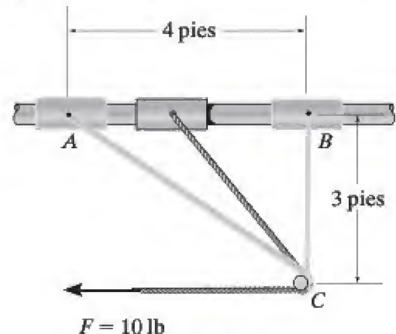
F14-4

F14-5. Cuando $s = 0.6$ m, el resorte no está comprimido y la rapidez del bloque de 10 kg es de 5 m/s hacia abajo del plano. Determine la distancia s cuando el bloque se detiene.



F14-5

F14-6. Al collarín de 5 lb lo jala por una cuerda que pasa alrededor de una pequeña clavija en C. Si la cuerda se somete a una fuerza constante $F = 10$ lb y el collarín está en reposo cuando está en A, determine su rapidez cuando llega a B. Ignore la fricción.

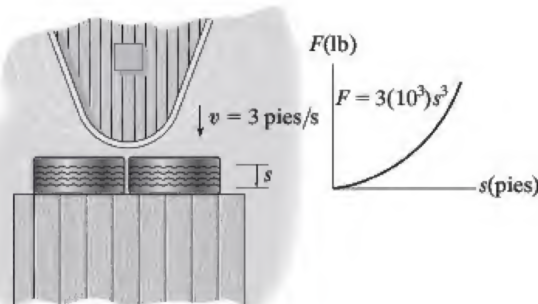


F14-6

PROBLEMAS

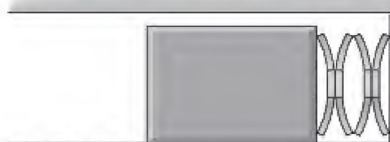
•**14-1.** Un embalaje de 1500 lb se jala a lo largo del suelo a una rapidez constante durante una distancia de 25 pies por medio de un cable que forma un ángulo de 15° con la horizontal. Determine la tensión en el cable y el trabajo realizado por esta fuerza. El coeficiente de fricción cinética entre el suelo y el embalaje es $\mu_k = 0.55$.

14-2. El movimiento de un bote de 6500 lb es impedido por un parachoques que proporciona una resistencia como se muestra en la gráfica. Determine la distancia máxima que el bote mella el parachoques si su rapidez de aproximación es de 3 pies/s.



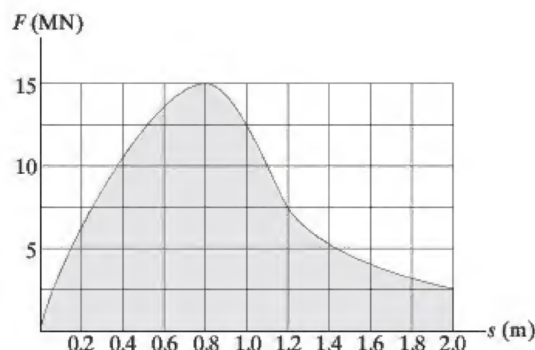
Prob. 14-2

14-3. El tapón pesa 20 lb y es empujado contra una serie de rondanas de resorte Belleville de modo que la compresión en el resorte es $s = 0.05$ pies. Si la fuerza del resorte en el tapón es $F = (3s^{1/3})$ lb, donde s está en pies, determine la rapidez del tapón después de que se aleja del resorte. Ignore la fricción.



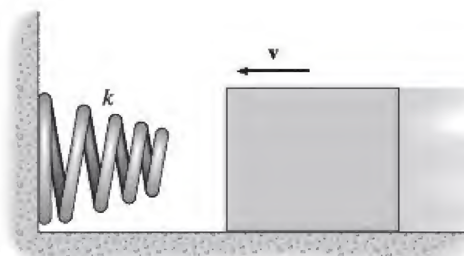
Prob. 14-3

*__14-4.__ Cuando se dispara un proyectil de 7 kg con un cañón de 2 m de longitud, la fuerza del explosivo ejercida en el proyectil mientras está en el cañón varía como se muestra. Determine la velocidad de salida aproximada del proyectil en el momento en que sale del cañón. Ignore los efectos de fricción en el interior del cañón y suponga que el cañón está en posición horizontal.



Prob. 14-4

•**14-5.** El bloque de 1.5 kg se desliza a lo largo de un plano liso y choca con un *resorte no lineal* con una rapidez de $v = 4$ m/s. El resorte se denomina "no lineal" porque su resistencia es $F_s = ks^2$, donde $k = 900$ N/m². Determine la rapidez del bloque después de que comprime el resorte $s = 0.2$ m.



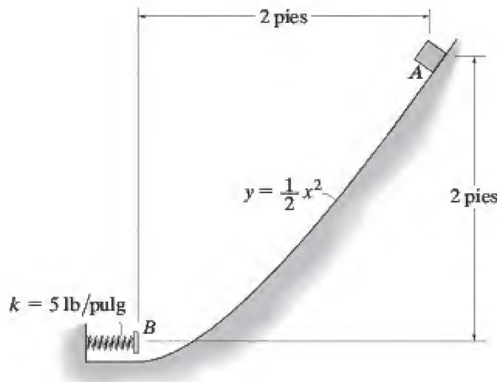
Prob. 14-5

14-6. Cuando el conductor aplica los frenos de una camioneta que viaja a 10 km/h, ésta se desliza 3 m antes de detenerse. ¿Qué distancia patina la camioneta si su velocidad es de 80 km/h cuando se aplican los frenos?



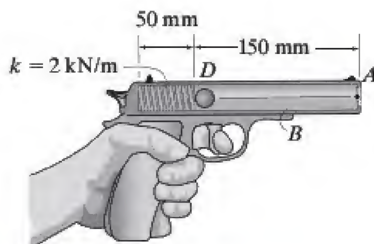
Prob. 14-6

14-7. El bloque de 6 lb se suelta del punto de reposo en A y se desliza hacia abajo de la superficie parabólica lisa. Determine la compresión máxima del resorte.



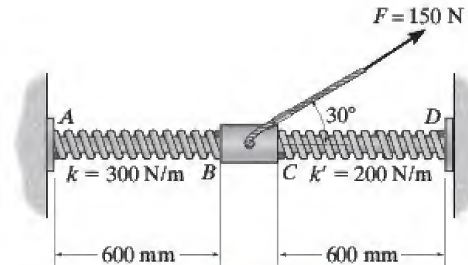
Prob. 14-7

***14-8.** La longitud no alargada del resorte de la pistola de juguete es de 100 mm, se comprime y bloquea en la posición mostrada. Cuando se tira del gatillo, el resorte se descomprime 12.5 mm y la bola de 20 g se mueve a lo largo del cañón de la pistola. Determine la rapidez de la bola cuando sale de la pistola. Ignore la fricción.



Prob. 14-8

•14-9. La rigidez de los resortes AB y CD es $k = 300$ N/m y $k' = 200$ N/m, respectivamente y la longitud no alargada de ambos es de 600 mm. Si el anillo liso de 2 kg se suelta del punto de reposo cuando los resortes no están alargados, determine la rapidez del anillo cuando ha recorrido 200 mm.



Prob. 14-9

14-10. La velocidad del automóvil es $v_1 = 100$ km/h cuando el conductor ve un obstáculo frente al automóvil cuya masa es de 2 Mg. Le toma 0.75 s para reaccionar y aplicar los frenos, lo que hace que el automóvil patine; determine la distancia que el automóvil recorre antes de detenerse. El coeficiente de fricción cinética entre las llantas y la carretera es $\mu_k = 0.25$.

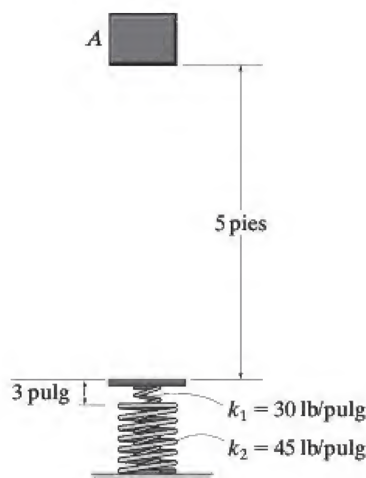
14-11. La velocidad del automóvil es $v_1 = 100$ km/h cuando el conductor ve un obstáculo frente al automóvil cuya masa es de 2 Mg. Le toma 0.75 s para reaccionar y aplicar los frenos, lo que hace que el automóvil patine. Si el automóvil se detiene cuando ha recorrido una distancia de 175 m, determine el coeficiente de fricción cinética entre las llantas y la carretera.



Probs. 14-10/11

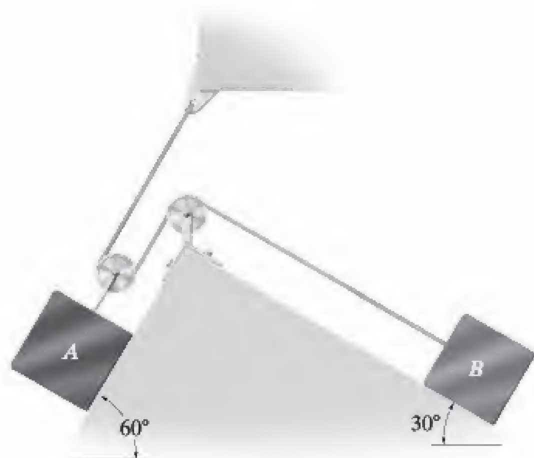
14

*14-12. El bloque de 10 lb se suelta del punto de reposo en A. Determine la compresión de cada uno de los resortes después de que el bloque choca con la plataforma y se detiene momentáneamente. En un principio ambos resortes no están alargados. Suponga que la masa de la plataforma es insignificante.



Prob. 14-12

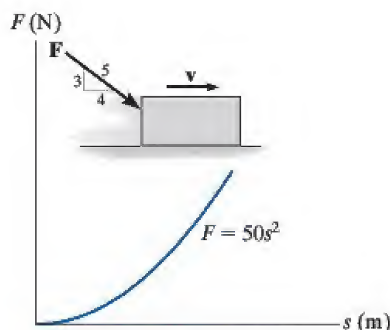
14-13. Determine la velocidad del bloque A de 60 lb si los dos bloques se sueltan del punto de reposo y el bloque B de 40 lb se mueve 2 pies hacia arriba del plano inclinado. El coeficiente de fricción cinética entre ambos bloques y los planos inclinados es $\mu_k = 0.10$.



Prob. 14-13

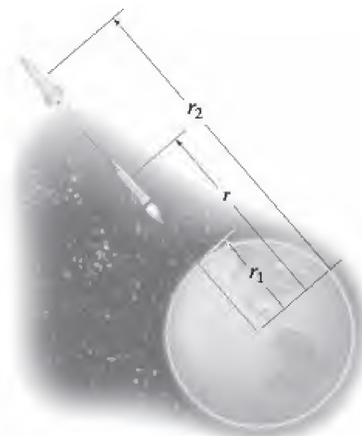
14-14. La magnitud de la fuerza **F** que actúa en una dirección constante en el bloque de 20 kg varía con la posición s de éste. Determine qué tanto se desliza el bloque antes de que su velocidad sea de 5 m/s. Cuando $s = 0$ el bloque se está moviendo a la derecha a 2 m/s. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es $\mu_k = 0.3$.

14-15. La magnitud de la fuerza **F** que actúa en una dirección constante en el bloque de 20 kg varía con la posición s de éste. Determine la rapidez del bloque después de que se desliza 3 m. Cuando $s = 0$ el bloque se mueve a la derecha a 2 m/s. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es $\mu_k = 0.3$.



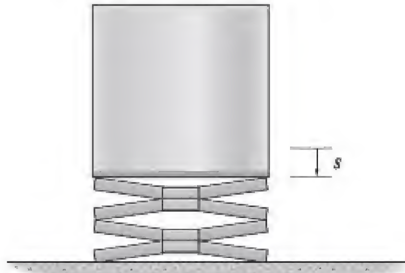
Prob. 14-15

14-16. Se lanza verticalmente un cohete de masa m desde la superficie terrestre, es decir, en $r = r_1$. Si supone que no se pierde masa cuando asciende, determine el trabajo que debe realizar contra la gravedad para alcanzar una distancia r_2. La fuerza de la gravedad es $F = GM_e m/r^2$ (ecuación 13-1), donde M_e es la masa terrestre y r la distancia entre el cohete y el centro de la Tierra.



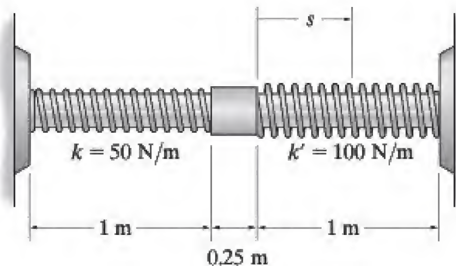
Prob. 14-16

•**14-17.** El cilindro pesa 20 lb y es empujado contra una serie de rondanas de resorte Belleville de modo que la compresión en el resorte es $s = 0.05$ pies. Si la fuerza del resorte en el cilindro es $F = (100s^{1/3})$lb, donde s está en pies, determine la rapidez del cilindro exactamente después de que se aleja del resorte, es decir, en $s = 0$.



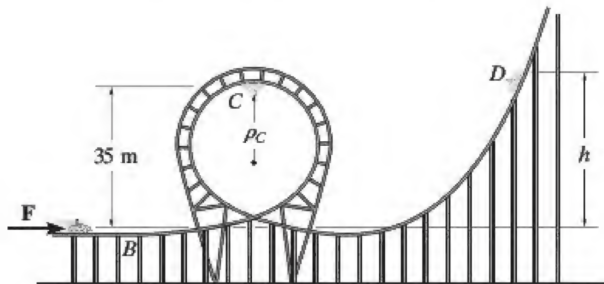
Prob. 14-17

14-18. La masa del collarín es de 20 kg y descansa sobre una barra lisa. Dos resortes están unidos al collarín y a los extremos de la barra como se muestra. La longitud no comprimida de cada resorte es de 1 m. Si el collarín se desplaza $s = 0.5$ m y se suelta del punto de reposo, determine su velocidad en el momento en que regresa al punto $s = 0$.



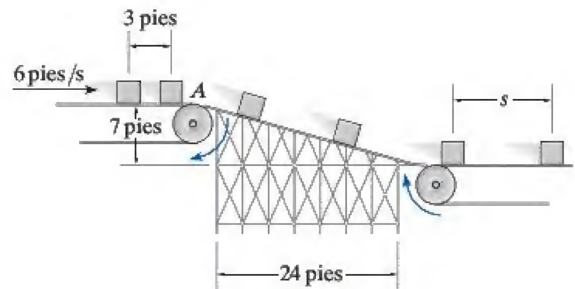
Prob. 14-18

14-19. Determine la altura h de la rampa D a la que llegará el carro de 200 kg de la montaña rusa, si se lanza en B con una rapidez apenas suficiente para que llegue a la parte superior del rizo en C sin que pierda el contacto con los rieles. El radio de curvatura en C es $\rho_C = 25$ m.



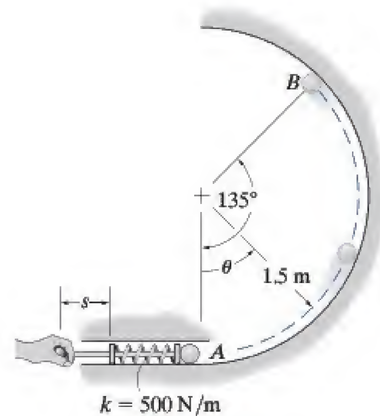
Prob. 14-19

***14-20.** Los paquetes que pesan 15 lb se transfieren horizontalmente de una banda transportadora a la siguiente por medio de una rampa cuyo coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.15$. La transportadora superior se mueve a 6 pies/s y la separación entre los paquetes es de 3 pies. Determine la rapidez de la transportadora inferior para que los paquetes no se deslicen cuando se ponen en contacto horizontalmente con ella. ¿Cuál es la separación s entre los paquetes en la transportadora inferior?



Prob. 14-20

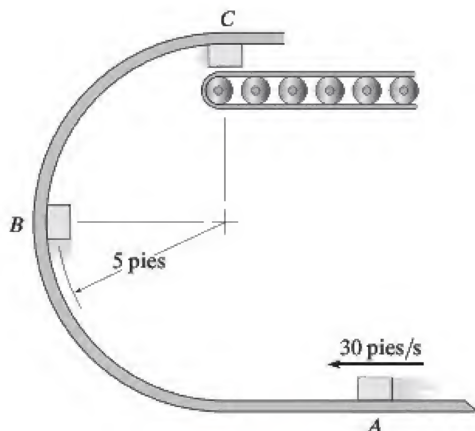
•**14-21.** La bola de 0.5 kg cuyo tamaño no importa, se lanza hacia arriba de la rampa circular vertical lisa por medio de un émbolo de resorte. Éste mantiene el resorte comprimido 0.08 m cuando $s = 0$. Determine qué distancia se debe jalar s y soltar de modo que la bola comience a perder el contacto con la rampa cuando $\theta = 135°$.



Prob. 14-21

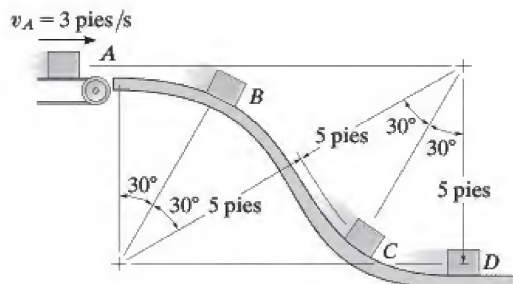
14

14-22. La caja de 2 lb se desliza por la rampa circular lisa. Si la velocidad de la caja es de 30 pies/s en A, determine su velocidad y la fuerza normal que actúa en la rampa cuando la caja está en B y C. Suponga que el radio de curvatura de la trayectoria en C sigue siendo de 5 pies.



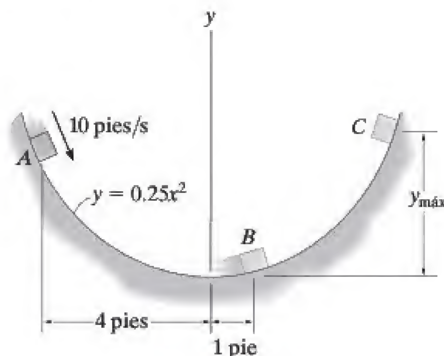
Prob. 14-22

14-23. Paquetes que pesan 50 lb llegan al tobogán a $v_A = 3$ pies/s por medio de una banda transportadora. Determine su rapidez cuando llegan a los puntos B, C y D. Además, calcule la fuerza normal del tobogán en los paquetes en B y C. Ignore la fricción y el tamaño de los paquetes.



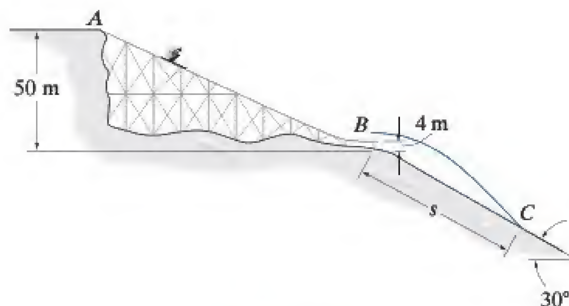
Prob. 14-23

***14-24.** El bloque de 2 lb se desliza hacia abajo de la superficie parabólica lisa de modo que cuando está en A su rapidez es de 10 pies/s. Determine la magnitud de la velocidad y aceleración del bloque cuando llega al punto B y la altura máxima $y_{máx}$ que alcanza.



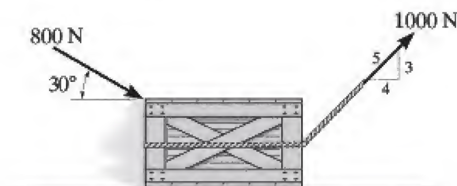
Prob. 14-24

•**14-25.** El esquiador parte del punto de reposo en A y desciende por la rampa. Si la fricción y resistencia del aire pueden omitirse, determine su rapidez v_B cuando llega a B. Además, determine la distancia s donde hace contacto con el suelo en C, si salta cuando se desplaza horizontalmente en B. Ignore la estatura del esquiador. Su masa es de 70 kg.



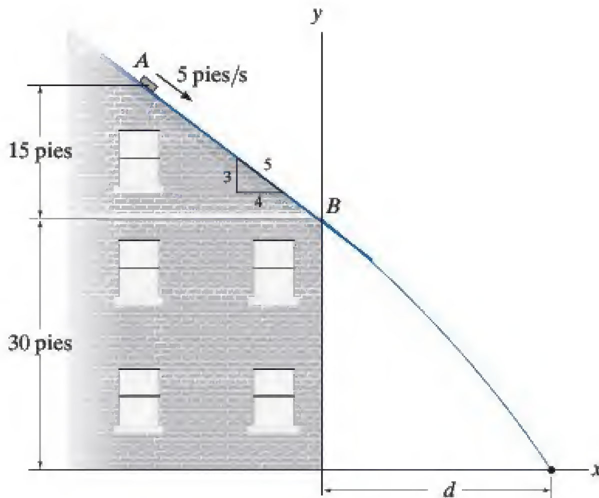
Prob. 14-25

14-26. El embalaje, cuya masa es de 100 kg, se somete a la acción de las dos fuerzas. Si originalmente está en reposo, determine la distancia que se desliza para alcanzar una rapidez de 6 m/s. El coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y la superficie es $\mu_k = 0.2$.



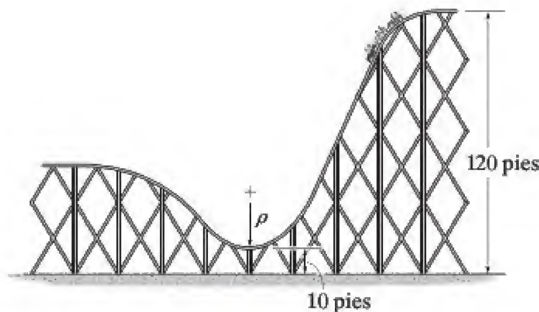
Prob. 14-26

14-27. El ladrillo de 2 lb se desliza hacia abajo del techo de modo que cuando está en A su velocidad es de 5 pies/s. Determine la rapidez del ladrillo justo antes de que deje la superficie en B, la distancia d de la pared hasta donde choca con el suelo y la rapidez a la cual golpea el suelo.



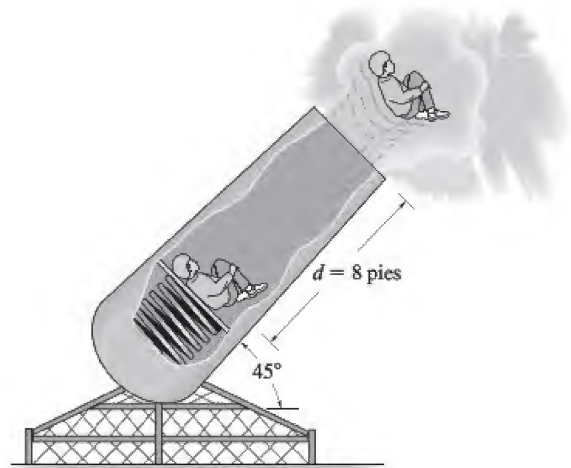
Prob. 14-27

*14-28. Las montañas rusas se diseñan de modo que los usuarios no experimenten una fuerza normal de más de 3.5 veces su peso contra el asiento del carro. Determine el radio de curvatura mínimo ρ de la rampa en su punto más bajo si la rapidez es de 5 pies/s en la cresta de la caída. Ignore la fricción.



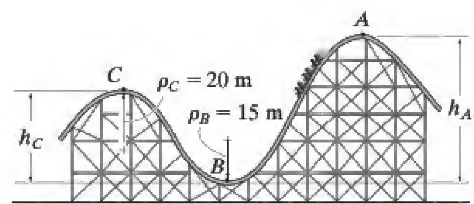
Prob. 14-28

•**14-29.** El hombre de 120 lb actúa como bala de cañón humana al ser "disparado" con el cañón que es accionado por el resorte que se muestra. Si la aceleración máxima que puede experimentar es $a = 10g = 322$ pies/s^2, determine qué rigidez requiere el resorte, el cual se comprime 2 pies en el momento del disparo. ¿Con qué velocidad saldrá del cañón, $d = 8$ pies, cuando el cañón se dispare? Cuando el resorte se comprime $s = 2$ pies, entonces $d = 8$ pies. Ignore la fricción y suponga que el hombre se mantiene en una posición rígida durante todo el movimiento.



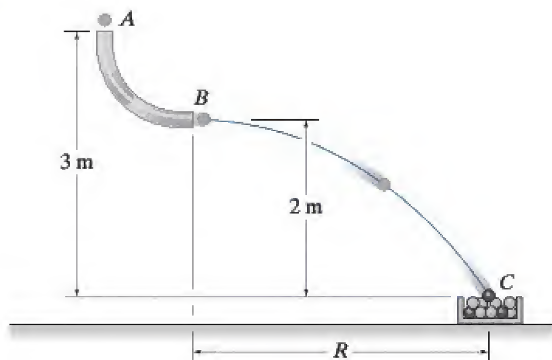
Prob. 14-29

14-30. Si se va a diseñar la pista de modo que los pasajeros de la montaña rusa no experimenten una fuerza normal igual a cero o más de 4 veces su peso, determine las alturas limitantes h_A y h_C de modo que esto no ocurra. La montaña rusa parte del punto de reposo en la posición A. Ignore la fricción.



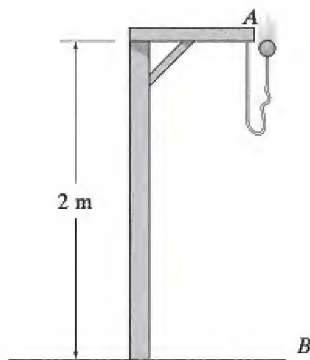
Prob. 14-30

14-31. Las canicas de 5 g de masa caen del punto de reposo en A a través del tubo de vidrio y se acumulan en el recipiente en C. Determine la distancia R del recipiente al extremo del tubo y la rapidez a la cual las canicas caen en el recipiente. Ignore el tamaño de éste.



Prob. 14-31

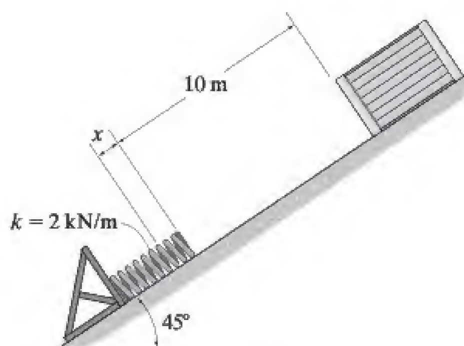
***14-32.** La bola de 0.5 kg de masa se cuelga de una banda elástica que tiene una longitud no alargada de 1 m y una rigidez $k = 50$ N/m. Si el apoyo en A al cual se sujeta está a 2 m del piso, determine la rapidez máxima que la bola puede tener en A de modo que no toque el suelo cuando llegue a su punto más bajo B. Ignore el tamaño de la bola y la masa de la banda elástica.



Prob. 14-32

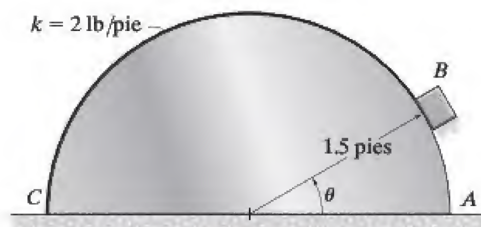
•14-33. Si el coeficiente de fricción cinética entre el embalaje de 100 kg y el plano es $\mu_k = 0.25$, determine la compresión x del resorte requerida para llevar el embalaje momentáneamente al reposo. En un principio el resorte no está alargado y el embalaje está en reposo.

14-34. Si el coeficiente de fricción cinética entre el embalaje de 100 kg y el plano es $\mu_k = 0.25$, determine la rapidez del embalaje en el momento en que la compresión del resorte es $x = 1.5$ m. Inicialmente el resorte no está alargado y el embalaje está en reposo.



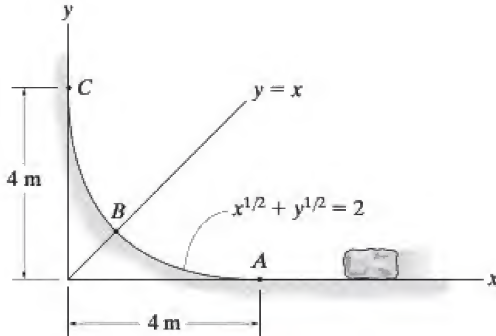
Probs. 14-33/34

14-35. Un bloque de 2 lb descansa sobre una superficie semicilíndrica. Una cuerda elástica que tiene una rigidez $k = 2$ lb/pie está atada al bloque en B y a la base del semicilindro en el punto C. Si se suelta el bloque del punto de reposo en $A(\theta = 0°)$, determine la longitud no alargada de la cuerda de modo que el bloque comience a separarse del semicilindro en el instante $\theta = 45°$. Ignore el tamaño del bloque.



Prob. 14-35

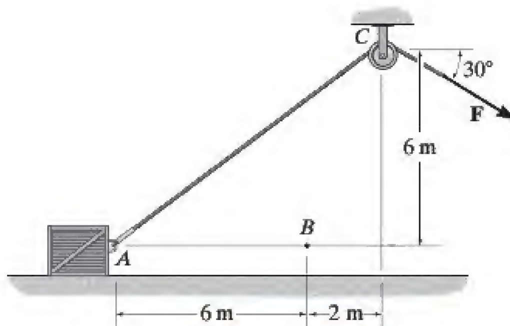
***14-36.** La rapidez de la piedra de 50 kg es $v_A = 8$ m/s cuando llega al punto A. Determine la fuerza normal que ejerce en la pendiente cuando llega al punto B. Ignore la fricción y el tamaño de la piedra.



Prob. 14-36

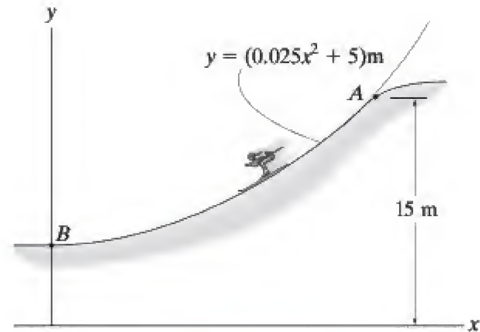
•14-37. Si el embalaje de 75 kg parte del punto de reposo en A, determine su rapidez cuando llega al punto B. El cable se somete a una fuerza constante $F = 300$ N. Ignore la fricción y el tamaño de la polea.

14-38. Si el embalaje de 75 kg comienza a moverse del punto de reposo en A y su rapidez es de 6 m/s cuando pasa por el punto B, determine la fuerza constante **F** ejercida en el cable. Ignore la fricción y el tamaño de la polea.



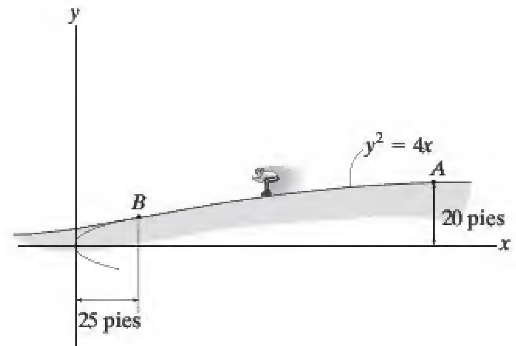
Probs. 14-37/38

14-39. Si el esquiador de 60 kg pasa por el punto A a una rapidez de 5 m/s, determine su rapidez cuando llega al punto B. Además determine la fuerza normal ejercida en él por la pendiente en este punto. Ignore la fricción.



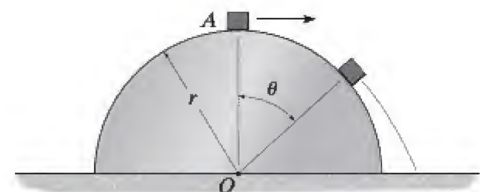
Prob. 14-39

***14-40.** El patinador de 150 lb pasa por el punto A a una rapidez de 6 pies/s. Determine su rapidez cuando llega al punto B y la fuerza normal ejercida en él por la pista en este punto. Ignore la fricción.



Prob. 14-40

•14-41. A una pequeña caja de masa m se le imprime una rapidez de $v = \sqrt{\frac{1}{4}gr}$ en la parte superior del semicilindro liso. Determine el ángulo θ al cual la caja se separa del cilindro.



Prob. 14-41

14

14.4 Potencia y eficiencia

Potencia. El término "potencia" constituye una base útil para seleccionar el tipo de motor o máquina requerida para realizar una cierta cantidad de trabajo en un tiempo dado. Por ejemplo, cada una de dos bombas puede vaciar un depósito si se le da tiempo suficiente; sin embargo, la bomba de mayor potencia completará la tarea más rápido.

Por consiguiente, la *potencia* generada por una máquina o motor que realiza una cierta cantidad de trabajo dU dentro del intervalo dt es

$$P = \frac{dU}{dt} \tag{14-9}$$

Si el trabajo dU se expresa como $dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, entonces

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

o

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{14-10}$$



La potencia de salida de esta locomotora se deriva de la fuerza de fricción propulsora **F** desarrollada en sus ruedas. Ésta es la fuerza que vence la resistencia a la fricción de los vagones remolcados y es capaz de llevar el peso del tren cuesta arriba.

De ahí que la potencia es un *escalar*, donde en esta fórmula **v** representa la velocidad de la partícula en la cual actúa la fuerza **F**.

Las unidades básicas de potencia utilizadas en los sistemas SI y FPS son el watt (W) y el caballo de fuerza (hp), respectivamente. Estas unidades se definen como

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ N} \cdot \text{m/s}$$

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ pies} \cdot \text{lb/s}$$

Para la conversión entre los sistemas de unidades, 1 hp = 746 W.

Eficiencia. La *eficiencia mecánica* de una máquina se define como la relación de la salida de potencia útil producida por la máquina a la entrada de potencia suministrada a la máquina. Por tanto,

$$\epsilon = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}} \tag{14-11}$$

Si la energía suministrada a la máquina ocurre durante el *mismo intervalo* durante el cual es extraída, entonces la eficiencia también se expresa en función de la relación

$$\epsilon = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}} \qquad (14\text{-}12)$$

Como las máquinas se componen de una serie de piezas móviles, siempre se desarrollarán fuerzas de fricción dentro de ellas y, por consiguiente, se requiere energía extra o potencia adicional para vencer estas fuerzas. Por tanto, la potencia de salida será menor que la potencia de entrada, de ahí que *la eficiencia de una máquina siempre es menor que 1*.

La potencia suministrada a un cuerpo se determina por el siguiente procedimiento.

Procedimiento para el análisis

- Primero determine la fuerza externa **F** que actúa en el cuerpo y que provoca el movimiento. Esta fuerza casi siempre la genera una máquina o un motor que se coloca dentro o fuera del cuerpo.
- Si el cuerpo está en aceleración, podría requerirse trazar su diagrama de cuerpo libre y aplicar la ecuación de movimiento ($\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$) para determinar **F**.
- Una vez que se determina **F** y la velocidad **v** de la partícula donde se aplica **F**, la potencia se determina al multiplicar la magnitud de la fuerza por el componente de velocidad que actúa en la dirección de **F** (es decir, $P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = Fv\cos\theta$).
- En algunos problemas la potencia la determina el cálculo del trabajo realizado por **F** por unidad de tiempo ($P_{\text{prom}} = \Delta U/\Delta t$).



Los requerimientos de potencia de este elevador dependen de la fuerza vertical **F** que actúa en él y que hace que se desplace hacia arriba. Si la velocidad del elevador es **v**, entonces la potencia de salida es $P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$.

EJEMPLO 14.7

El hombre que aparece en la figura 14-15*a* empuja el embalaje de 50 kg con una fuerza $F = 150$ N. Determine la potencia suministrada por el hombre cuando $t = 4$ s. El coeficiente de fricción cinética entre el piso y el embalaje es $\mu_k = 0.2$. En un principio, el embalaje está en reposo.

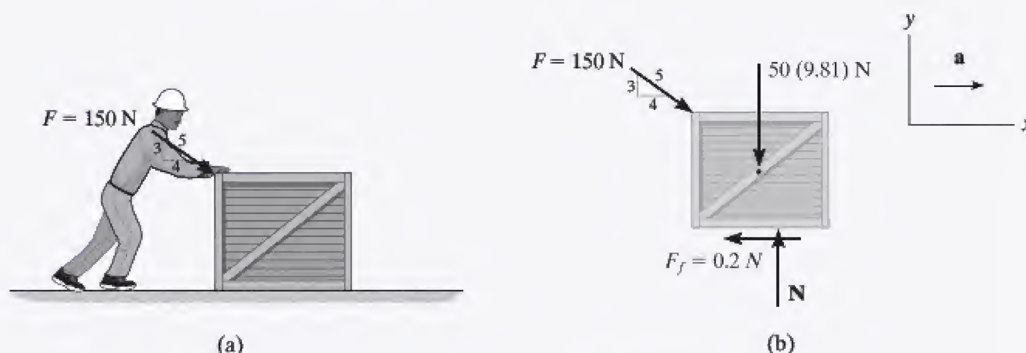


Fig. 14-15

SOLUCIÓN

Para determinar la potencia desarrollada por el hombre, primero debe calcularse la velocidad de la fuerza de 150 N. El diagrama de cuerpo libre del embalaje se muestra en la figura 14-15*b*. Al aplicar la ecuación de movimiento,

$$+\uparrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad N - \left(\tfrac{3}{5}\right)150 \text{ N} - 50(9.81) \text{ N} = 0$$

$$N = 580.5 \text{ N}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad \left(\tfrac{4}{5}\right)150 \text{ N} - 0.2(580.5 \text{ N}) = (50 \text{ kg})a$$

$$a = 0.078 \text{ m/s}^2$$

Por consiguiente, la velocidad del embalaje cuando $t = 4$ s es

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad v = v_0 + a_c t$$

$$v = 0 + (0.078 \text{ m/s}^2)(4 \text{ s}) = 0.312 \text{ m/s}$$

La potencia suministrada al embalaje por el hombre cuando $t = 4$ s es, por consiguiente

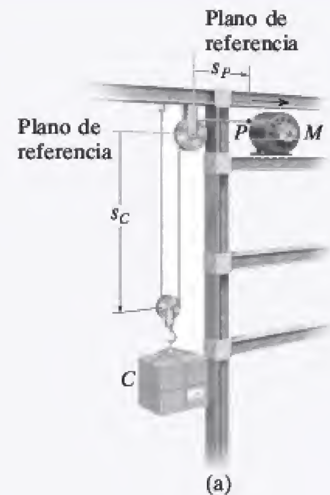
$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_x v = \left(\tfrac{4}{5}\right)(150 \text{ N})(0.312 \text{ m/s})$$

$$= 37.4 \text{ W}$$

Resp.

EJEMPLO 14.8

El motor M del malacate en la figura 14-16a levanta el embalaje C de 75 lb de modo que la aceleración del punto P es de 4 pies/s^2. Determine la potencia que debe suministrarse al motor en el instante en que la velocidad de P es de 2 pies/s. Ignore la masa de la polea y el cable y considere $\epsilon = 0.85$.



(a)

SOLUCIÓN

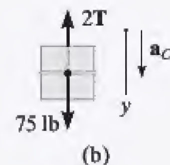
Para determinar la potencia de salida del motor, primero es necesario determinar la tensión en el cable puesto que el motor desarrolla esta fuerza.

A partir del diagrama de cuerpo libre, figura 14-16b, tenemos

$$+\downarrow \quad \Sigma F_y = ma_y; \qquad -2T + 75 \text{ lb} = \frac{75 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2} a_c \tag{1}$$

La aceleración del embalaje puede calcularse por medio de cinemática para relacionarla con la aceleración conocida del punto P, figura 14-16a. Con los métodos de la sección 12.9, las coordenadas s_C y s_P pueden relacionarse con una parte constante de la longitud del cable l la cual cambia en las direcciones vertical y horizontal. Tenemos $2s_C + s_P = l$. Al tomar la segunda derivada con respecto al tiempo de esta ecuación, resulta

$$2a_C = -a_P \tag{2}$$



(b)

Fig. 14-16

Como $a_P = +4$ pies/s^2, entonces $a_C = -(4 \text{ pies/s}^2)/2 = -2 \text{ pies/s}^2$. ¿Qué indica el signo negativo? Al sustituir este resultado en la ecuación 1 y *conservar* el signo negativo puesto que la aceleración *tanto* en la ecuación 1 como en la ecuación 2 se consideró positiva hacia abajo, tenemos

$$-2T + 75 \text{ lb} = \left(\frac{75 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(-2 \text{ pies/s}^2)$$

$$T = 39.83 \text{ lb}$$

La potencia de salida, medida en caballos de fuerza, requerida para jalar el cable a razón de 2 pies/s es por consiguiente

$$P = \mathbf{T}\cdot\mathbf{v} = (39.83 \text{ lb})(2 \text{ pies/s})[1 \text{ hp}/(550 \text{ pies}\cdot\text{lb/s})]$$
$$= 0.1448 \text{ hp}$$

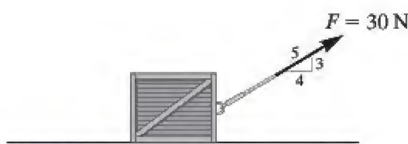
Esta *potencia de salida* requiere que el motor proporcione una *potencia de entrada* de

$$\text{potencia de entrada} = \frac{1}{\epsilon}(\text{potencia de salida})$$
$$= \frac{1}{0.85}(0.1448 \text{ hp}) = 0.170 \text{ hp} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

NOTA: dado que la velocidad del embalaje cambia constantemente, el requerimiento de potencia es *instantáneo*.

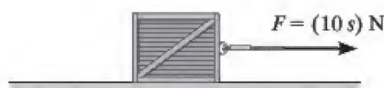
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F14-7. Si la superficie de contacto entre el bloque de 20 kg y el suelo es lisa, determine la potencia de la fuerza **F** cuando $t = 4$ s. En un principio, el bloque está en reposo.



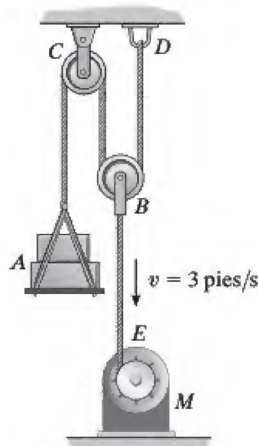
F14-7

F14-8. Si $F = (10s)$ N, donde s está en metros y la superficie de contacto entre el bloque y el suelo es lisa, determine la potencia de la fuerza **F**, cuando $s = 5$ m. En un principio, el bloque de 20 kg está en reposo.



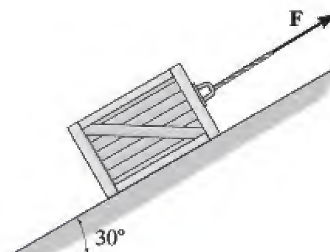
F14-8

F14-9. Si el motor enrolla el cable a una rapidez constante de $v = 3$ pies/s, determine la potencia suministrada al motor. La carga pesa 100 lb y la eficiencia del motor es $\epsilon = 0.8$. Ignore la masa de las poleas.



F14-9

F14-10. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque de 20 kg y el plano inclinado es $\mu_k = 0.2$. Si el bloque se mueve hacia arriba del plano inclinado a velocidad constante $v = 5$ m/s, determine la potencia de la fuerza **F**.



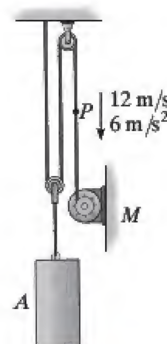
F14-10

F14-11. Si el motor M eleva la carga A de 50 kg a una velocidad constante de 1.5 m/s, determine la potencia de entrada del motor, el cual opera con una eficiencia $\epsilon = 0.8$.



F14-11

F14-12. En el instante mostrado, el punto P en el cable tiene una velocidad $v_P = 12$ m/s, la cual se está incrementando a razón de $a_P = 6$ m/s^2. Determine la potencia de entrada del motor M en este instante si opera con una eficiencia $\epsilon = 0.8$. La masa del bloque A es de 50 kg.



F14-12

PROBLEMAS

14-42. La máquina diesel de un tren de 400 Mg incrementa su velocidad de manera uniforme a partir del punto de reposo a 10 m/s en 100 s a lo largo de una vía horizontal. Determine la potencia promedio desarrollada.

14-43. Determine la potencia de entrada de un motor necesaria para levantar 300 lb a una razón constante de 5 pies/s. La eficiencia del motor es $\epsilon = 0.65$.

***14-44.** Un tranvía eléctrico pesa 15 000 lb y acelera a lo largo de una carretera recta horizontal a partir del punto de reposo, de modo que la potencia siempre es de 100 hp. Determine qué distancia debe recorrer para alcanzar una rapidez de 40 pies/s.

•14-45. La Milkin Aircraft Co. fabrica un motor turborreactor que se instala en un avión que pesa 13 000 lb. Si el motor desarrolla un empuje constante de 5200 lb, determine la potencia de salida del avión cuando está a punto de despegar con una rapidez de 600 mi/h.

14-46. El motor del automóvil de 3500 lb genera una potencia constante de 50 hp mientras viaja cuesta arriba a una rapidez constante. Si el motor opera con una eficiencia $\epsilon = 0.8$, determine la velocidad del automóvil. Ignore la resistencia al avance y al rodamiento.



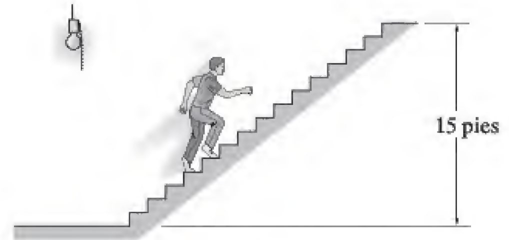
Prob. 14-46

14-47. Un camión cargado pesa $16(10^3)$ lb y acelera de manera uniforme sobre una carretera plana desde 15 pies/s hasta 30 pies/s durante 4 s. Si la resistencia por fricción al movimiento es de 325 lb, determine la potencia máxima que desee suministrarse a las ruedas.

***14-48.** Un automóvil que pesa 3500 lb sube una pendiente de 7° a una rapidez constante de $v = 40$ pies/s. Si se ignoran la fricción y la resistencia del viento, determine la potencia desarrollada por el motor dado que la eficiencia mecánica del automóvil es $\epsilon = 0.65$.

•14-49. El peldaño de una escalera eléctrica se mueve a una rapidez constante de 0.6 m/s. Si los escalones son de 125 mm de altura y de 250 mm de longitud, determine la potencia de un motor necesaria para levantar una masa promedio de 150 kg por escalón. Hay 32 escalones.

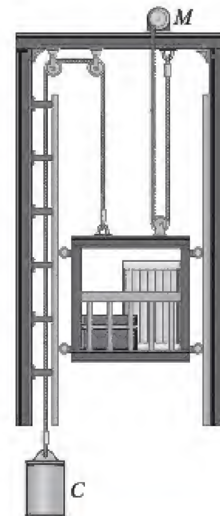
14-50. El hombre que pesa 150 lb es capaz de subir un tramo de escalera de 15 pies de altura en 4 s. Determine la potencia generada. ¿Cuánto tiempo tendría que estar encendido un foco de 100 W para consumir la misma cantidad de energía? *Conclusión:* ¡por favor apague las luces cuando no estén en uso!



Prob. 14-50

14-51. La masa total del elevador y la carga es de 800 kg y la del contrapeso C es de 150 kg. En un instante dado, el elevador tiene una velocidad ascendente de 2 m/s y una aceleración de 1.5 m/s^2. Determine la potencia generada por el motor M en este instante si opera con una eficiencia de $\epsilon = 0.8$.

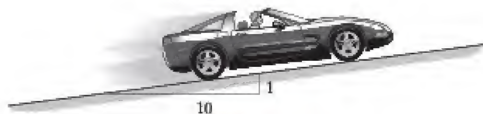
***14-52.** La masa total del elevador y la carga es de 800 kg y la del contrapeso C es de 150 kg. Si la velocidad ascendente del elevador aumenta de manera uniforme de 0.5 m/s a 1.5 m/s en 1.5 s, determine la potencia promedio generada por el motor M durante este tiempo. El motor opera con una eficiencia de $\epsilon = 0.8$.



Probs. 14-51/52

•**14-53.** El automóvil de 2 Mg incrementa su rapidez uniformemente desde el punto de reposo hasta 25 m/s en 30 s cuesta arriba. Determine la potencia máxima que el motor debe suministrar, el cual opera con una eficiencia de $\epsilon = 0.8$. Además, determine la potencia promedio suministrada por el motor.

14



Prob. 14-53

14-54. Determine la velocidad del embalaje de 200 lb en 15 s si el motor opera con una eficiencia de $\epsilon = 0.8$. La potencia de entrada al motor es de 2.5 hp. El coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y el plano es $\mu_k = 0.2$.



Prob. 14-54

14-55. Se suministra una potencia constante de 1.5 hp al motor mientras opera con una eficiencia de $\epsilon = 0.8$. Determine la velocidad del embalaje de 200 lb en 15 segundos, a partir del punto de reposo. Ignore la fricción.



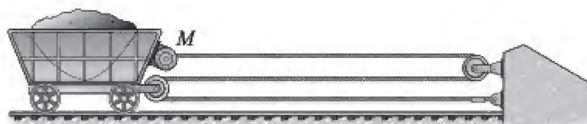
Prob. 14-55

***14-56.** La transmisión hidráulica de un camión de 30 000 lb permite que el motor suministre una potencia constante a las ruedas traseras. Determine la distancia requerida para que el camión que viaja por una carretera plana incremente su rapidez de 35 pies/s a 60 pies/s si se suministran 90 hp a las ruedas traseras. Ignore la resistencia al avance y al rodamiento.

•**14-57.** Si el motor de un automóvil de 1.5 Mg genera una potencia constante de 15 kW, determine la rapidez del automóvil después de haber recorrido una distancia de 200 m en una carretera plana a partir del punto de reposo. Ignore la fricción.

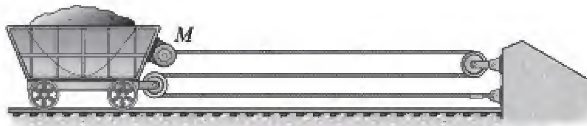
14-58. A la vagoneta de mina de 1.2 Mg la jala un malacate M montado en ella. Si el malacate ejerce una fuerza de $F = (150t^{3/2})$ N en el cable donde t está en segundos, determine la potencia de salida del malacate cuando $t = 5$ s, a partir del punto de reposo.

14-59. A la vagoneta de mina de 1.2 Mg la jala un malacate M montado en ella. Si el malacate genera una potencia de salida constante de 30 kW, determine la rapidez de la vagoneta en el instante en que ha recorrido una distancia de 30 m, a partir del punto de reposo.



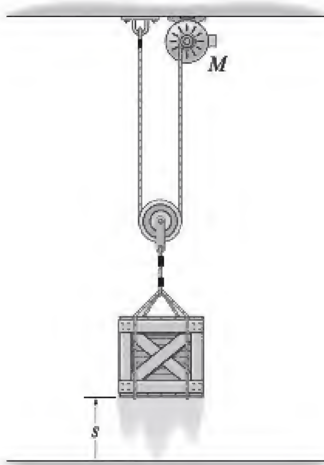
Probs. 14-58/59

***14-60.** A la vagoneta de mina de 1.2 Mg la jala un malacate M montado en ella. Si el malacate genera una potencia de salida constante de 30 kW y la vagoneta comienza a moverse desde el punto de reposo, determine su velocidad cuando $t = 5$ s.



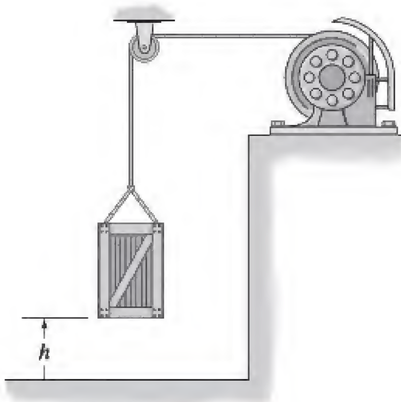
Prob. 14-60

•**14-61.** El motor M levanta el embalaje de 50 lb. Si el embalaje comienza a moverse desde el punto de reposo y con una aceleración constante alcanza una rapidez de 12 pies/s después de alzarse $s = 10$ pies, determine la potencia que debe suministrarse al motor en el instante $s = 10$ pies. La eficiencia del motor es $\epsilon = 0.65$. Ignore la masa de la polea y el cable.



Prob. 14-61

14-62. Un motor levanta un embalaje de 60 kg a una velocidad constante hasta una altura $h = 5$ m en 2 s. Si la potencia indicada del motor es de 3.2 kW, determine la eficiencia del motor.



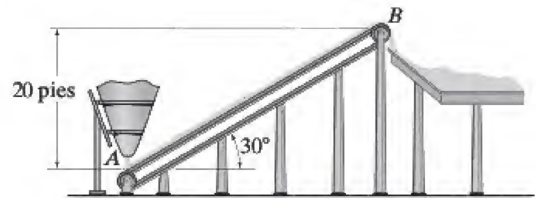
Prob. 14-62

14-63. Si el turborreactor del dragster genera un empuje constante de $T = 20$ kN, determine la potencia generada por el turborreactor en función del tiempo. Ignore la resistencia al avance y al rodamiento y la pérdida de combustible. La masa del dragster es de 1 Mg y arranca desde el punto de reposo.



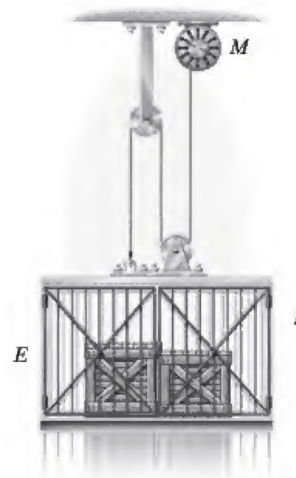
Prob. 14-63

***14-64.** Desde el silo en A se descarga arena a la transportadora y se transporta a la plataforma de almacenamiento a razón de 360 000 lb/h. Un motor eléctrico conectado a la transportadora mantiene la rapidez de la banda en 3 pies/s. Determine la potencia promedio generada por el motor.



Prob. 14-64

14-65. El elevador de 500 kg comienza a subir desde el punto de reposo y viaja hacia arriba con una aceleración constante $a_c = 2$ m/s^2. Determine la potencia de salida del motor M cuando $t = 3$ s. Ignore la masa de las poleas y el cable.



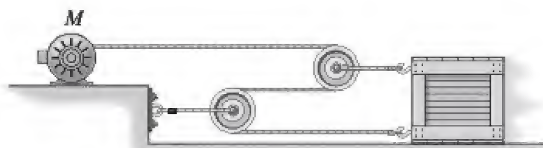
Prob. 14-65

14-66. Se lanza verticalmente desde el punto de reposo un cohete de 8 Mg de masa total. Si los motores generan un empuje constante $T = 300$ kN, determine la potencia de salida de los motores en función del tiempo. Ignore el efecto de la resistencia al avance y la pérdida de combustible y peso.



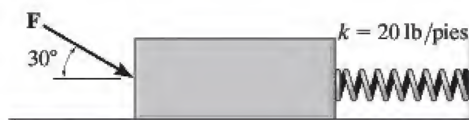
Prob. 14-66

14-67. La masa del embalaje es de 150 kg y descansa sobre una superficie cuyos coeficientes de fricción estática y cinética son $\mu_s = 0.3$ y $\mu_k = 0.2$, respectivamente. Si el motor M suministra una fuerza al cable de $F = (8t^2 + 20)$ N, donde t está en segundos, determine la potencia de salida desarrollada por el motor cuando $t = 5$ s.



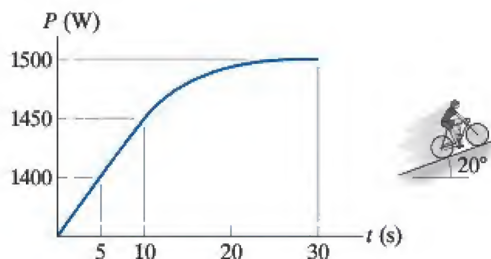
Prob. 14-67

***14-68.** El bloque de 50 lb descansa sobre una superficie áspera cuyo coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.2$. Una fuerza $F = (40 + s^2)$ lb, donde s está en pies, actúa en el bloque en la dirección mostrada. Si en un principio el resorte no está alargado ($s = 0$) y el bloque está en reposo, determine la potencia desarrollada por la fuerza en el instante en que el bloque se ha desplazado $s = 1.5$ pies.



Prob. 14-68

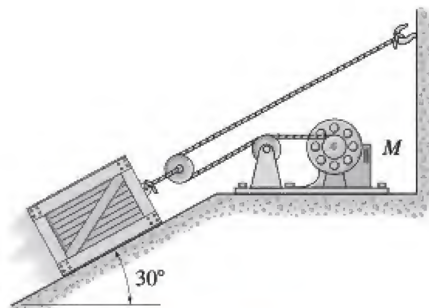
•**14-69.** Con los datos de la curva de potencia biomecánica que se ilustra, determine la rapidez máxima alcanzada por el ciclista y su bicicleta, los cuales tienen una masa total de 92 kg, a medida que el ciclista asciende la pendiente de 20° a partir del punto de reposo.



Prob. 14-69

14-70. Al embalaje de 50 kg lo jala hacia arriba en el plano inclinado de 30° el sistema de polea y motor M. Si el embalaje comienza a moverse desde el punto de reposo y, mediante una aceleración constante, alcanza una rapidez de 4 m/s, después de recorrer 8 m a lo largo del plano, determine la potencia que debe suministrarse al motor en el instante en que el cable se ha movido 8 m. Ignore la fricción a lo largo del plano. La eficiencia del motor es $\epsilon = 0.74$.

14-71. Resuelva el problema 14-70 si el coeficiente de fricción cinética entre el plano y el embalaje es $\mu_k = 0.3$.



Probs. 14-70/71

14.5 Fuerzas conservadoras y energía potencial

Fuerza conservadora. Si el trabajo de una fuerza es *independiente de la trayectoria* y depende sólo de la posición inicial y final en la trayectoria, entonces podemos clasificarla como una *fuerza conservadora*. Ejemplos de fuerzas conservadoras son el peso de una partícula y la fuerza desarrollada por un resorte. El trabajo realizado por el peso depende *sólo* del *desplazamiento vertical* del peso y el trabajo realizado por una fuerza de resorte depende *sólo* del *alargamiento* o *compresión* del resorte.

En contraste con una fuerza conservadora, considere la fuerza de fricción ejercida *en un objeto que se desliza* por una superficie fija. El trabajo realizado por la fuerza de fricción *depende de la trayectoria* —cuanto más larga sea la trayectoria, mayor será el trabajo. Por consiguiente, las *fuerzas de fricción son no conservadoras*. El trabajo se disipa del cuerpo en forma de calor.

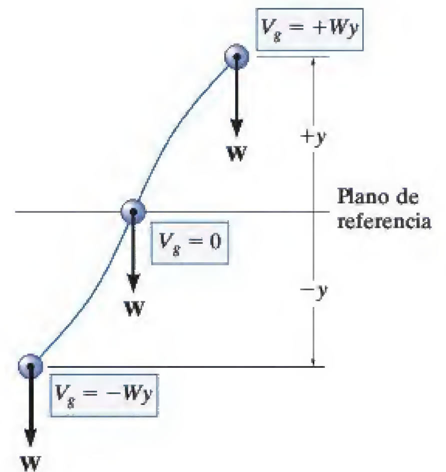


Fig. 14-17

Energía. La energía se define como la capacidad de realizar trabajo. Por ejemplo, si una partícula originalmente está en reposo, entonces el principio de trabajo y energía establece que $\Sigma U_{1\to2} = T_2$. Expresado de otra manera, la energía cinética es igual al trabajo que debe realizarse en la partícula para llevarla del estado de reposo al estado de velocidad v. Por tanto, la *energía cinética* es una medida de la *capacidad* de la partícula *de realizar trabajo*, la cual está asociada con el *movimiento* de la partícula. Cuando la energía se deriva de la *posición* de la partícula, medida con respecto a un plano de referencia, se llama energía potencial. Por tanto, la *energía potencial* es una medida de la cantidad de trabajo que una fuerza conservadora realizará cuando se mueve de una posición dada al plano de referencia. En mecánica, la energía potencial creada por la gravedad (peso) o un resorte elástico es importante.

Energía potencial gravitacional. Si una partícula se encuentra a una distancia *y por encima* de un plano de referencia arbitrariamente seleccionado, como se muestra en la figura 14-17, el peso de la partícula **W** tiene una *energía potencial gravitacional* positiva, V_g, puesto que **W** tiene la capacidad de realizar trabajo positivo cuando la partícula regresa al plano de referencia. Asimismo, si la partícula se encuentra a una distancia *y por debajo* del plano de referencia, V_g es negativa puesto que el peso realiza trabajo negativo cuando la partícula regresa al plano de referencia. En el plano de referencia $V_g = 0$.

En general, si y es *positiva hacia arriba*, la energía potencial gravitacional de la partícula de peso W es*

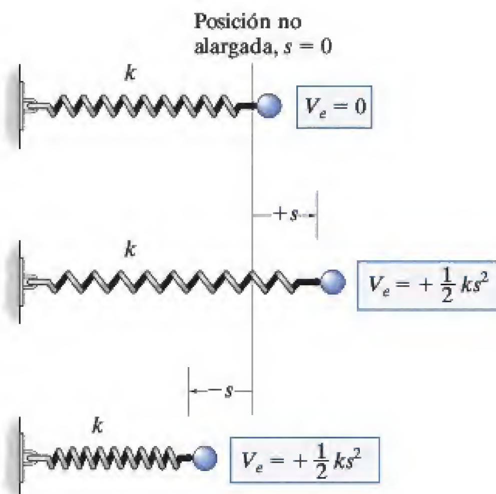
$$V_g = Wy \tag{14-13}$$

*Aquí se supone que el peso es *constante*. Esta suposición es adecuada para diferencias mínimas de elevación Δy. Sin embargo, si el cambio de elevación es significativo debe tomarse en cuenta la variación del peso con la elevación (vea el problema 14-16).

Energía potencial elástica. Cuando se alarga o comprime un resorte elástico una distancia s a partir de su posición no alargada, en el resorte puede almacenarse energía potencial elástica V_e. Esta energía es

$$V_e = +\tfrac{1}{2}ks^2 \tag{14-14}$$

Aquí V_e *siempre es positiva* ya que, en la posición deformada, la fuerza del resorte tiene la *capacidad* o "potencial" de realizar siempre trabajo en la partícula cuando el resorte regresa a su posición no alargada, figura 14-18.



Energía potencial elástica

Fig. 14-18

El peso de los sacos colocados sobre esta plataforma produce energía potencial que se debe almacenar en los resortes del soporte. A medida que se quita cada saco, la plataforma *se eleva* un poco puesto que una parte de la energía potencial en los resortes se transformará en un incremento de la energía potencial gravitacional de los sacos restantes. Este dispositivo es útil para quitar los sacos sin tener que inclinarse para descargarlos.



Función potencial. En el caso general, si una partícula se somete tanto a fuerzas gravitacionales como elásticas, la energía potencial de la partícula se expresa como una *función potencial*, la cual es la suma algebraica

$$V = V_g + V_e \tag{14-15}$$

La medición de V depende de la ubicación de la partícula con respecto a un plano, seleccionado de acuerdo con las ecuaciones 14-13 y 14-14.

La *diferencia* de esta función mide el trabajo realizado por una fuerza conservadora al mover una partícula de un punto a otro, es decir,

$$U_{1-2} = V_1 - V_2 \tag{14-16}$$

Por ejemplo, la función potencial de una partícula de peso W suspendida de un resorte puede expresarse en función de su posición, s, medida con respecto a un plano de referencia localizado en la longitud no alargada del resorte, figura 14-19. Tenemos

$$\begin{aligned} V &= V_g + V_e \\ &= -Ws + \tfrac{1}{2}ks^2 \end{aligned}$$

Si la partícula se mueve de s_1 a un posición más baja s_2, entonces al aplicar la ecuación 14-16 se ve que el trabajo de $\mathbf{W}$ y $\mathbf{F}_s$ es

$$\begin{aligned} U_{1-2} = V_1 - V_2 &= \left(-Ws_1 + \tfrac{1}{2}ks_1^2\right) - \left(-Ws_2 + \tfrac{1}{2}ks_2^2\right) \\ &= W(s_2 - s_1) - \left(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2\right) \end{aligned}$$

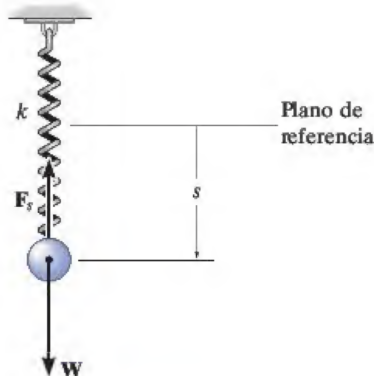


Fig. 14-19

Cuando el desplazamiento a lo largo de la trayectoria es infinitesimal, es decir del punto (x, y, z) al $(x + dx, y + dy, z + dz)$, la ecuación 14-16 se escribe

$$\begin{aligned} dU &= V(x, y, z) - V(x + dx, y + dy, z + dz) \\ &= -dV(x, y, z) \end{aligned} \tag{14-17}$$

Si representamos tanto la fuerza como su desplazamiento como vectores cartesianos, entonces el trabajo también puede expresarse como

$$\begin{aligned} dU &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \end{aligned}$$

Al sustituir este resultado en la ecuación 14-17 y expresar la diferencial $dV(x, y, z)$ en función de sus derivadas parciales se tiene

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right)$$

Como los cambios de x, y y z son independientes entre sí, esta ecuación se satisface siempre que

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{14-18}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)V \end{aligned}$$

o

$$\mathbf{F} = -\nabla V \tag{14-19}$$

donde ∇ (del) representa el operador vectorial $\nabla = (\partial/\partial x)\mathbf{i} + (\partial/\partial y)\mathbf{j} + (\partial/\partial z)\mathbf{k}$.

La ecuación 14-19 relaciona una fuerza $\mathbf{F}$ con su función potencial V por lo que constituye un criterio matemático para comprobar que $\mathbf{F}$ es conservadora. Por ejemplo, la función de potencial gravitacional de un peso situado a una distancia y por encima de un plano de referencia es $V_g = Wy$. Para comprobar que $\mathbf{W}$ es conservador, es necesario demostrar que satisface la ecuación 14-18 (o la 14-19), en cuyo caso

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \qquad F_y = -\frac{\partial}{\partial y}(Wy) = -W$$

El signo negativo indica que $\mathbf{W}$ actúa hacia abajo, opuesto a la distancia y positiva, la cual es hacia arriba.

14.6 Conservación de la energía

Cuando en una partícula actúa un sistema *tanto* de fuerzas conservadoras como no conservadoras, la parte del trabajo realizado por las *fuerzas conservadoras* puede escribirse en función de la diferencia de sus energías potenciales por medio de la ecuación 14-16, es decir, $(\Sigma U_{1-2})_{\text{cons.}} = V_1 - V_2$. Por consiguiente, el principio de trabajo y energía se escribe como

$$T_1 + V_1 + (\Sigma U_{1-2})_{\text{no cons.}} = T_2 + V_2 \qquad (14\text{-}20)$$

Aquí $(\Sigma U_{1-2})_{\text{no cons.}}$ representa el trabajo de las fuerzas conservadoras que actúan en la partícula. Si *sólo las fuerzas conservadoras* realizan trabajo, entonces tenemos

$$\boxed{T_1 + V_1 = T_2 + V_2} \qquad (14\text{-}21)$$

Esta ecuación se conoce como la *conservación de la energía mecánica* o simplemente como la *conservación de la energía*. Expresa que durante el movimiento la suma de las energías potencial y cinética de la partícula permanece *constante*. Para que esto ocurra, la energía cinética debe transformarse en energía potencial, y viceversa. Por ejemplo, si se deja caer una bola de peso **W** desde una altura h sobre el suelo (plano de referencia), figura 14-20, su energía potencial es máxima antes de dejarla caer, momento en el cual su energía cinética es cero. La energía mecánica total de la bola en su posición inicial es por tanto

$$E = T_1 + V_1 = 0 + Wh = Wh$$

Cuando la bola ha caído una distancia $h/2$, su velocidad se determina con $v^2 = v_0^2 + 2a_c(y - y_0)$, la cual resulta $v = \sqrt{2g(h/2)} = \sqrt{gh}$. La energía de la bola a la mitad de la altura , por consiguiente,

$$E = T_2 + V_2 = \frac{1}{2}\frac{W}{g}(\sqrt{gh})^2 + W\left(\frac{h}{2}\right) = Wh$$

Exactamente antes de que la bola choque con el suelo, su energía potencial es cero y su velocidad es $v = \sqrt{2gh}$. Aquí, de nuevo, la energía total de la bola es

$$E = T_3 + V_3 = \frac{1}{2}\frac{W}{g}(\sqrt{2gh})^2 + 0 = Wh$$

Observe que cuando la bola entra en contacto con el suelo, se deforma un poco y siempre que el suelo sea suficientemente duro, la bola rebotará en la superficie, y alcanzará una nueva altura h', la cual será *menor* que la altura h desde la cual se soltó por primera vez. Si ignoramos la fricción del aire, la diferencia de altura explica la pérdida de energía, $E_l = W(h - h')$, la cual ocurre durante la colisión. Porciones de esta pérdida producen ruido, una deformación localizada en la bola y en el suelo, y calor.

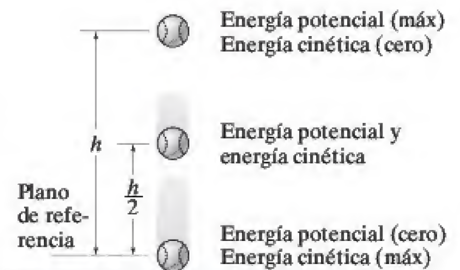


Fig. 14-20

Sistema de partículas. Si un sistema de partículas se *somete sólo a fuerzas conservadoras*, entonces puede escribirse una ecuación similar a la ecuación 14-21 para las partículas. Al aplicar las ideas del planteamiento precedente, la ecuación 14-8 ($\Sigma T_1 + \Sigma U_{1-2} = \Sigma T_2$) se escribe

$$\Sigma T_1 + \Sigma V_1 = \Sigma T_2 + \Sigma V_2 \tag{14-22}$$

Aquí, la suma de las energías cinética y potencial iniciales del sistema es igual a la suma de las energías cinética y potencial finales del sistema. En otras palabras, $\Sigma T + \Sigma V = \text{const.}$

Procedimiento para el análisis

La ecuación de la conservación de la energía puede utilizarse para resolver problemas que implican *velocidad*, *desplazamiento* y *sistemas de fuerzas conservadoras*. En general es *más fácil de aplicar* que el principio del trabajo y energía porque esta ecuación requiere especificar las energía cinética y potencial de la partícula en sólo *dos puntos* a lo largo de la trayectoria, en lugar de determinar el trabajo cuando la partícula experimenta un *desplazamiento*. Para su aplicación se sugiere el siguiente procedimiento.

Energía potencial.

- Trace dos diagramas que muestren la partícula localizada en su punto inicial y final a lo largo de la trayectoria.
- Si la partícula se somete a un desplazamiento vertical, establezca el plano de referencia horizontal fijo con respecto al cual se va a medir la energía potencial gravitacional V_g de la partícula.
- Los datos relacionados con la elevación y de la partícula con respecto al plano de referencia y con el alargamiento o compresión s de cualesquier resorte de conexión pueden determinarse por la geometría asociada con los dos diagramas.
- Recuerde que $V_g = Wy$, donde y es positiva hacia arriba del plano de referencia y negativa hacia abajo; asimismo para un resorte, $V_e = \frac{1}{2}ks^2$, la cual es *positiva siempre*.

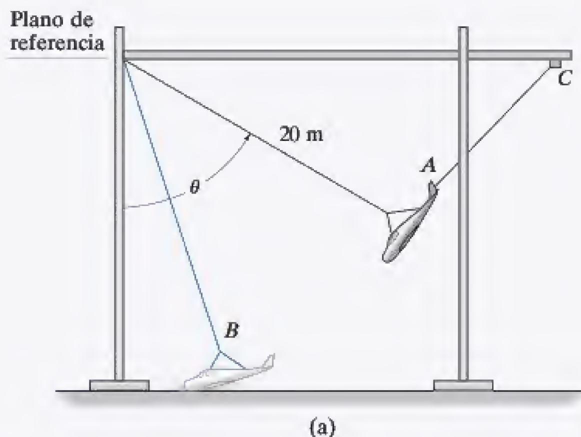
Conservación de la energía.

- Aplique la ecuación $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$.
- Cuando determine la energía cinética, $T = \frac{1}{2}mv^2$, recuerde que la rapidez v de la partícula debe medirse con respecto a un marco de referencia inercial.

EJEMPLO 14.9

El puente grúa mostrado en la fotografía se utiliza para probar la respuesta de un avión al estrellarse. Como se muestra en la figura 14-21*a*, el avión, cuya masa es de 8 Mg, es izado hacia atrás hasta que $\theta = 60°$ y luego se suelta el cable AC cuando el avión está en reposo. Determine la rapidez del avión justo antes de estrellarse en el suelo, $\theta = 15°$. Además, ¿cuál es la tensión máxima desarrollada en el cable de soporte durante el movimiento? Ignore el tamaño del avión y el efecto de elevación provocado por las alas durante el movimiento.





(a)

SOLUCIÓN

Como la fuerza del cable *no* realiza *trabajo* en el avión, debe obtenerse con la ecuación de movimiento. En primer lugar, sin embargo, debemos determinar la rapidez del avión en B.

Energía potencial. Por conveniencia, el plano de referencia se estableció en el parte superior del puente grúa, figura 14-21*a*.

Conservación de la energía.

$$T_A + V_A = T_B + V_B$$

$$0 - 8000 \text{ kg } (9.81 \text{ m/s}^2)(20 \cos 60° \text{ m}) =$$

$$\tfrac{1}{2}(8000 \text{ kg})v_B^2 - 8000 \text{ kg } (9.81 \text{ m/s}^2)(20 \cos 15° \text{ m})$$

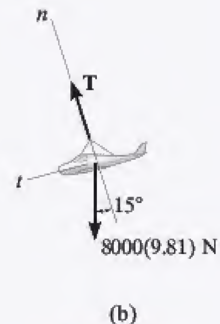
$$v_B = 13.52 \text{ m/s} = 13.5 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Ecuación de movimiento. De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre, cuando el avión está en B, figura 14-21*b*, tenemos

$$+\nwarrow \quad \Sigma F_n = ma_n;$$

$$T - (8000(9.81) \text{ N}) \cos 15° = (8000 \text{ kg})\frac{(13.52 \text{ m/s})^2}{20 \text{ m}}$$

$$T = 149 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

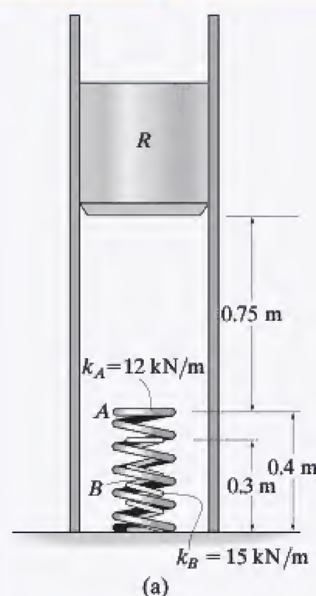


(b)

Fig. 14-21

14

EJEMPLO 14.10



El martinete R mostrado en la figura 14-22*a* tiene una masa de 100 kg y se suelta desde el punto de reposo a 0.75 m de la parte superior de un resorte A, que tiene una rigidez de $k_A = 12$ kN/m. Si un segundo resorte B cuya rigidez es de $k_B = 15$ kN/m se "coloca dentro del otro" en A, determine el desplazamiento máximo de A necesario para detener el movimiento hacia abajo del martinete. La longitud no alargada de cada resorte se indica en la figura. Ignore la masa de los resortes.

SOLUCIÓN

Energía potencial. *Supondremos* que el martinete comprime *ambos* resortes en el instante en que se detiene. El plano de referencia está localizado a través del centro de gravedad del martinete en su posición inicial, figura 14-22*b*. Cuando la energía cinética se reduce a cero ($v_2 = 0$), A se comprime una distancia s_A y B se comprime $s_B = s_A - 0.1$ m.

Conservación de la energía.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + 0 = 0 + \left\{\tfrac{1}{2}k_A s_A^2 + \tfrac{1}{2}k_B(s_A - 0.1)^2 - Wh\right\}$$

$$0 + 0 = 0 + \left\{\tfrac{1}{2}(12\,000 \text{ N/m})s_A^2 + \tfrac{1}{2}(15\,000 \text{ N/m})(s_A - 0.1 \text{ m})^2 - 981 \text{ N } (0.75 \text{ m} + s_A)\right\}$$

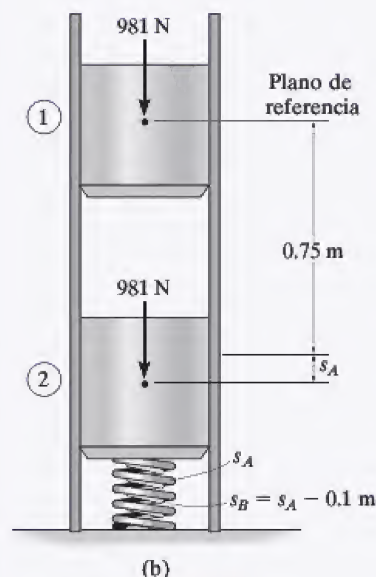


Fig. 14-22

Al reordenar los términos,

$$13\,500 s_A^2 - 2481 s_A - 660.75 = 0$$

Si utilizamos la fórmula cuadrática y resolvemos la raíz positiva, tenemos

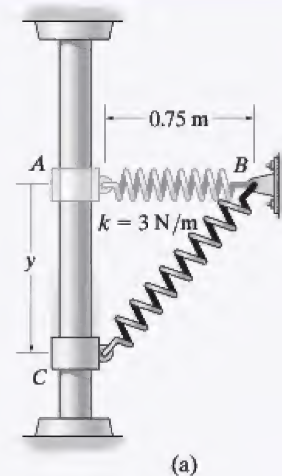
$$s_A = 0.331 \text{ m} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Como $s_B = 0.331$ m $- 0.1$ m $= 0.231$ m, la cual es positiva, la suposición de que *ambos* resortes son comprimidos por el martinete es correcta.

NOTA: la segunda raíz, $s_A = -0.148$ m, no representa la situación física. Como s positiva se mide hacia abajo, el signo negativo indica que el resorte A tendría que ser "extendido" en una cantidad de 0.148 m para detener el martinete.

EJEMPLO 14.11

En el poste vertical se inserta un collarín liso de 2 kg como se muestra en la figura 14-23*a*. Si el resorte no está alargado cuando el collarín está en la posición A, determine la rapidez a la cual se mueve cuando $y = 1$ m, si (a) se suelta del punto de reposo en A y (b) se suelta en A con una velocidad *hacia arriba* $v_A = 2$ m/s.



(a)

SOLUCIÓN

Parte (a) Energía potencial. Por conveniencia, el plano de referencia se sitúa a través de AB, figura 14-23*b*. Cuando el collarín está en C, la energía potencial gravitacional es $-(mg)y$, puesto que el collarín está *debajo* del plano de referencia y la energía potencial elástica es $\frac{1}{2}ks_{CB}^2$. En este caso $s_{CB} = 0.5$ m, la cual representa el *alargamiento* del resorte como se muestra en la figura.

Conservación de la energía.

$$T_A + V_A = T_C + V_C$$

$$0 + 0 = \tfrac{1}{2}mv_C^2 + \left\{\tfrac{1}{2}ks_{CB}^2 - mgy\right\}$$

$$0 + 0 = \left\{\tfrac{1}{2}(2\text{ kg})v_C^2\right\} + \left\{\tfrac{1}{2}(3\text{ N/m})(0.5\text{ m})^2 - 2(9.81)\text{ N }(1\text{ m})\right\}$$

$$v_C = 4.39\text{ m/s}\downarrow \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Este problema también puede resolverse con la ecuación de movimiento o el principio de trabajo y energía. Observe que para *ambos* métodos deben tomarse en cuenta la variación de la magnitud y la dirección de la fuerza del resorte (vea el ejemplo 13.4). Aquí, sin embargo, la solución anterior es claramente ventajosa puesto que los cálculos dependen *sólo* de los datos calculados en los puntos inicial y final de la trayectoria.

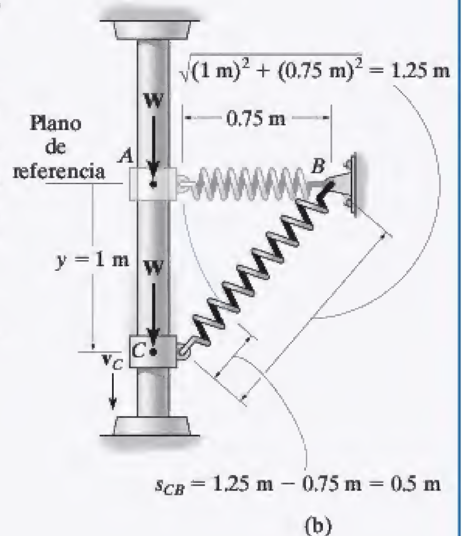
Parte (b) Conservación de la energía. Si $v_A = 2$ m/s, al utilizar los datos de la figura 14-23*b*, tenemos

$$T_A + V_A = T_C + V_C$$

$$\tfrac{1}{2}mv_A^2 + 0 = \tfrac{1}{2}mv_C^2 + \left\{\tfrac{1}{2}ks_{CB}^2 - mgy\right\}$$

$$\tfrac{1}{2}(2\text{ kg})(2\text{ m/s})^2 + 0 = \tfrac{1}{2}(2\text{ kg})v_C^2 + \left\{\tfrac{1}{2}(3\text{ N/m})(0.5\text{ m})^2 - 2(9.81)\text{ N }(1\text{ m})\right\}$$

$$v_C = 4.82\text{ m/s}\downarrow \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$



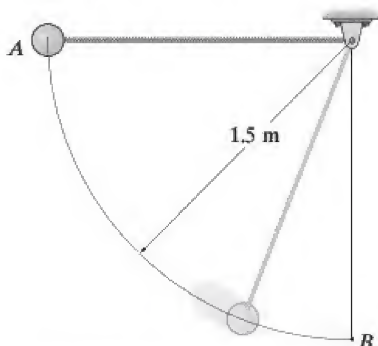
(b)

Fig. 14-23

NOTA: la energía cinética del collarín depende sólo de la *magnitud* de la velocidad, y por consiguiente no importa si el collarín sube o baja a 2 m/s cuando se suelta en A.

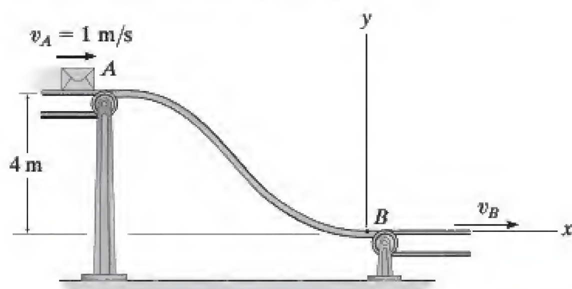
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F14-13. El péndulo de 2 kg se suelta del punto de reposo cuando está en A. Determine la rapidez y la tensión en la cuerda cuando pasa por su posición más baja B.



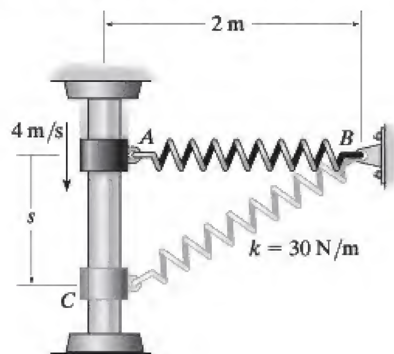
F14-13

F14-14. El paquete de 2 kg deja la banda transportadora en A con una rapidez de $v_A = 1$ m/s y se desliza hacia la parte inferior de la rampa. Determine la rapidez requerida de la banda transportadora en B de modo que el paquete puede ser entregado sin que resbale en la banda. Además, determine la reacción normal de la parte curva que la rampa ejerce en el paquete en B si $\rho_B = 2$ m.



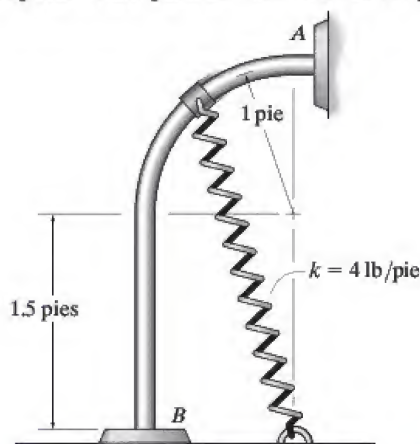
F14-14

F14-15. Al collarín de 2 kg se le imprime una velocidad de 4 m/s hacia abajo cuando está en A. Si la longitud no alargada del resorte es de 1 m y su rigidez es $k = 30$ N/m, determine la rapidez del collarín en $s = 1$ m.



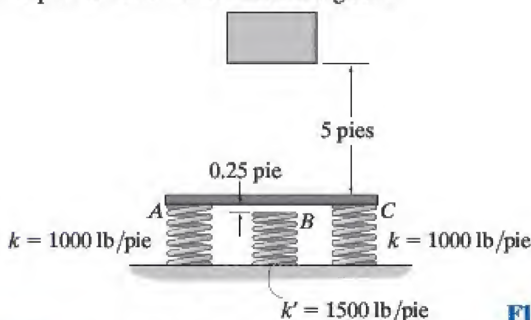
F14-15

F14-16. El collarín de 5 lb se suelta del punto de reposo en A y se desliza a lo largo de la guía libre de fricción. Determine la rapidez del collarín cuando choca con el tope B. La longitud no alargada del resorte es de 0.5 pie.



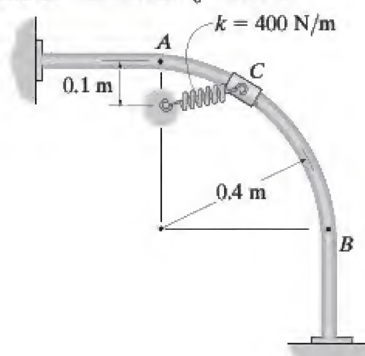
F14-16

F14-17. El bloque de 75 lb se suelta del punto de reposo a 5 pies sobre la placa. Determine la compresión de cada resorte cuando el bloque se detiene momentáneamente después de golpear la placa. Ignore la masa de ésta. En un principio los resortes no están alargados.



F14-17

F14-18. El collarín C de 4 kg tiene una velocidad de $v_A = 2$ m/s cuando está en A. Si la barra guía es lisa, determine la rapidez del collarín cuando está en B. La longitud no alargada del resorte es $l_0 = 0.2$ m.



F14-18

PROBLEMAS

***14-72.** Resuelva el problema 14-12 con la ecuación de la conservación de la energía.

•14-73. Resuelva el problema 14-7 con la ecuación de la conservación de la energía.

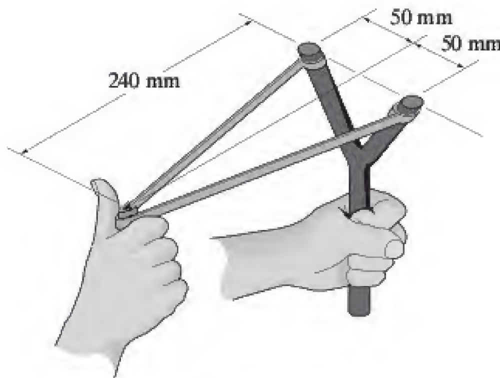
14-74. Resuelva el problema 14-8 con la ecuación de la conservación de la energía.

14-75. Resuelva el problema 14-18 con la ecuación de la conservación de la energía.

***14-76.** Resuelva el problema 14-22 con la ecuación de la conservación de la energía.

•14-77. Cada una de las dos bandas elásticas de la resortera tiene una longitud no alargada de 200 mm. Si se jalan hacia atrás hasta la posición mostrada y se sueltan del punto de reposo, determine la rapidez de la posta de 25 g justo después de que las bandas regresan a su longitud no alargada. Ignore la masa de las bandas elásticas. La rigidez k de cada una de las bandas es de 50 N/m.

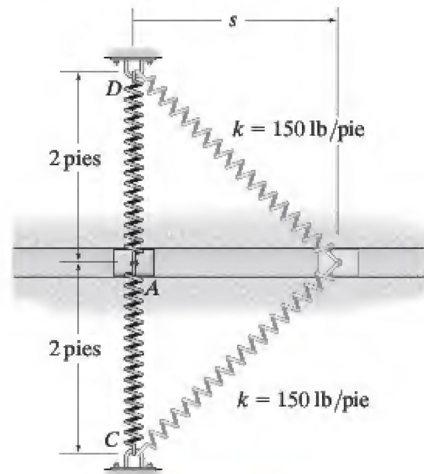
14-78. Cada una de las dos bandas elásticas de la resortera tiene una longitud no alargada de 200 mm. Si se jalan hacia atrás hasta la posición mostrada y se sueltan desde el punto de reposo, determine la altura máxima que alcanza la posta de 25 g si se lanza verticalmente. Ignore la masa de las bandas elásticas y el cambio de elevación de la posta mientras está sostenida por las bandas. La rigidez k de cada una de las bandas es de 50 N/m.



Probs. 14-77/78

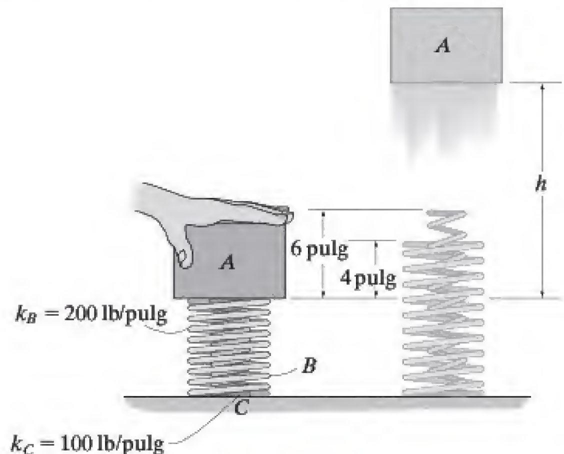
14-79. El bloque A pesa 1.5 lb y se desliza en la ranura horizontal lisa. Si se lleva el bloque a $s = 1.5$ pies y se suelta del reposo, determine su rapidez en el instante $s = 0$. La rigidez de los dos resortes es $k = 150$ lb/pie y su longitud no alargada es de 0.5 pie.

***14-80.** El bloque A pesa 2 lb y se desliza en la ranura horizontal lisa. Cuando $s = 0$ al bloque se le imprime una velocidad inicial de 60 pies/s hacia la derecha. Determine el desplazamiento horizontal máximo s del bloque. Cada uno de los dos resortes tiene una rigidez $k = 150$ lb/pie y una longitud no alargada de 0.5 pie.



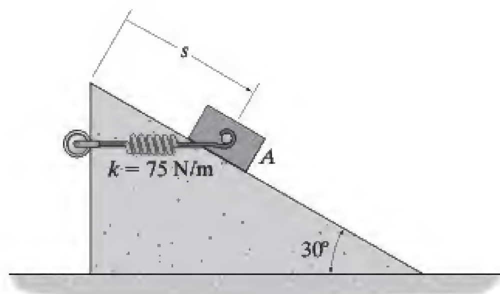
Probs. 14-79/80

•14-81. El bloque A de 30 lb se coloca sobre los dos resortes, uno dentro del otro, B y C y luego presionado hacia abajo hasta la posición mostrada. Si luego se le suelta, determine la altura máxima h a la cual se elevará.



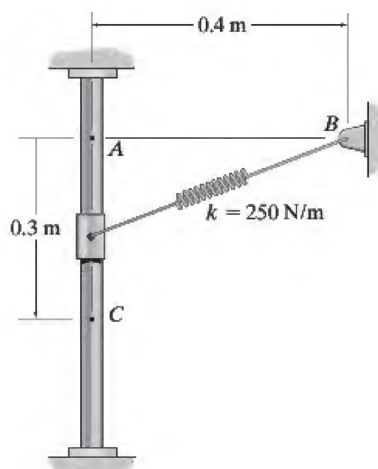
Prob. 14-81

14-82. El resorte no está alargado cuando $s = 1$ m y el bloque de 15 kg se suelta del reposo en esta posición. Determine la rapidez del bloque cuando $s = 3$ m. El resorte permanece horizontal durante el movimiento y las superficies de contacto entre el bloque y el plano inclinado son lisas.



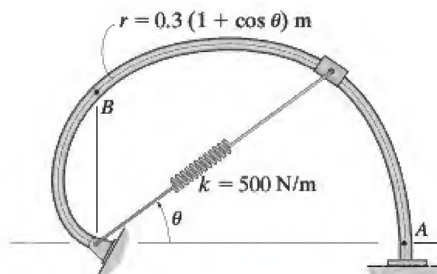
Prob. 14-82

14-83. La guía vertical es lisa y el collarín de 5 kg se suelta del reposo en A. Determine la rapidez del collarín cuando está en la posición C. La longitud no alargada del resorte es de 300 mm.



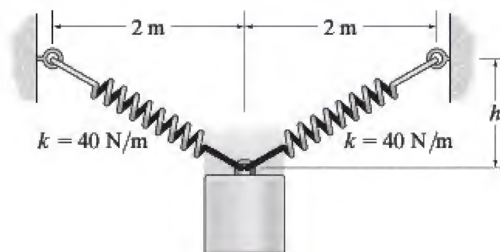
Prob. 14-83

***14-84.** El collarín de 5 kg se desliza a lo largo de la barra lisa. Si el collarín se suelta desde el punto de reposo en A, determine su rapidez cuando pasa por el punto B. El resorte tiene una longitud no alargada de 200 mm.



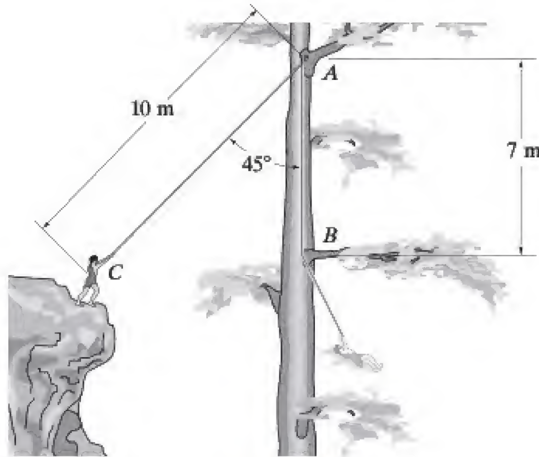
Prob. 14-84

•**14-85.** El cilindro tiene una masa de 20 kg y se suelta del reposo cuando $h = 0$. Determine su rapidez cuando $h = 3$ m. Cada uno de los resortes tiene una longitud no alargada de 2 m.



Prob. 14-85

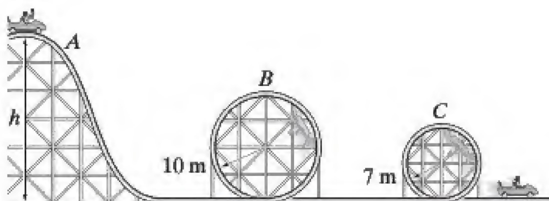
14-86. Tarzán tiene una masa de 100 kg y se lanza desde el punto de reposo del risco sujeto firmemente de una enredadera, la cual mide 10 m desde la rama de soporte A hasta su centro de masa. Determine su rapidez justo después de que la enredadera golpea la rama B. También, ¿cuál es la fuerza con la que debe sujetarse de la enredadera justo antes y justo después de que ésta se pone en contacto con la rama B?



Prob. 14-86

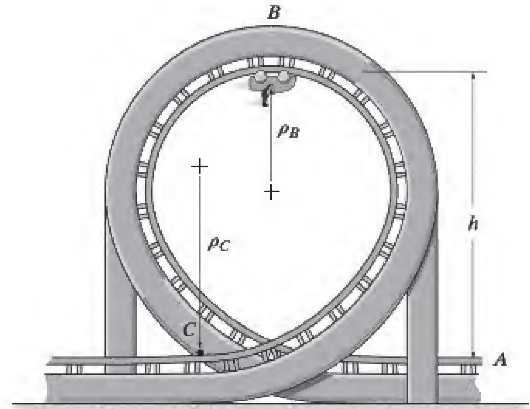
14-87. La masa del carro de la montaña rusa incluido su pasajero es de 800 kg y comienza a moverse desde la cima de la cuesta A con una rapidez $v_A = 3$ m/s. Determine la altura mínima h de la cuesta de modo que el carro complete los dos rizos sin que pierda el contacto con la vía. Ignore la fricción, la masa de las ruedas y el tamaño del carro. ¿Cuál es la reacción normal en el carro cuando está en B y en C?

***14-88.** La masa del carro de la montaña rusa incluido su pasajero es de 800 kg. Si arranca del reposo en la cima de la cuesta A, determine la altura mínima h de la cuesta de modo que el carro complete los dos rizos sin que pierda el contacto con la vía. Ignore la fricción, la masa de las ruedas y el tamaño del carro. ¿Cuál es la reacción normal en el carro cuando está en B y en C?



Probs. 14-87/88

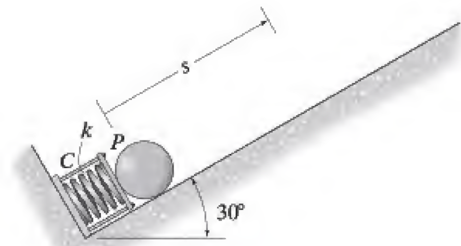
•14-89. La masa del carro de la montaña rusa incluido su pasajero es m. Determine la velocidad mínima que debe tener cuando entra en el rizo por A de modo que pueda completarlo y no pierda el contacto con la vía. Además, determine la fuerza normal que los rieles ejercen en el carro cuando está a punto de salir del rizo en C. El radio de curvatura de la vía en B es ρ_B y en C es ρ_C. Ignore el tamaño del carro. Los puntos A y C están a la misma altura.



Prob. 14-89

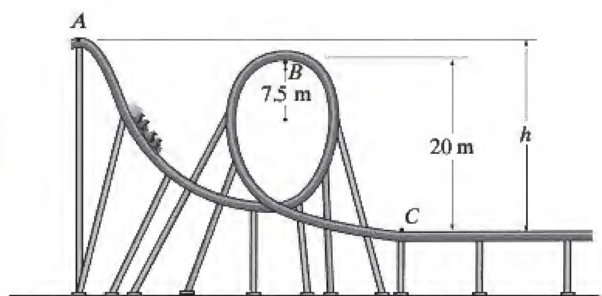
14-90. El dispositivo de resorte dispara la bola de 0.5 lb. La rigidez del dispositivo es de $k = 10$ lb/pulg, y las cuatro cuerdas C y la placa P lo mantienen comprimido 2 pulg, cuando no hay carga sobre la placa. Ésta se empuja 3 pulg hacia atrás a partir de su posición inicial. Si luego se suelta del punto de reposo, determine la rapidez de la bola cuando llega a la posición $s = 30$ pulg, sobre el plano inclinado liso.

14-91. El dispositivo de resorte dispara la bola de 0.5 lb. Determine la rigidez mínima k requerida para dispararla a una distancia máxima $s = 30$ pulg hacia arriba del plano después de que el resorte se comprime 3 pulg y la bola se dispara desde el punto de reposo. Las cuatro cuerdas C y la placa P mantienen el resorte comprimido 2 pulg cuando no hay carga en la placa.



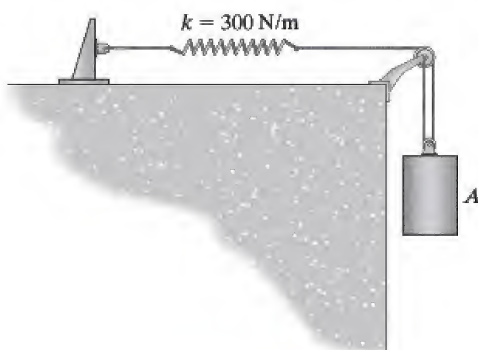
Probs. 14-90/91

***14-92.** El carro de la montaña rusa que tiene una masa m arranca del punto de reposo en el punto A. Si la vía tiene que diseñarse de modo que el carro no pierda el contacto con ella en B, determine la altura requerida h. Además, determine la rapidez del carro cuando llega al punto C. Ignore la fricción.



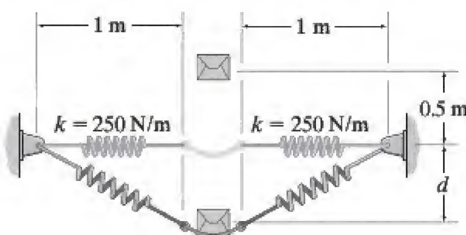
Prob. 14-92

•14-93. Cuando el cilindro de 50 kg se suelta del punto de reposo, el resorte se sujeta a una tensión de 60 N. Determine la rapidez del cilindro después de que ha caído 200 mm. ¿Qué tan lejos ha caído cuando se detiene momentáneamente?



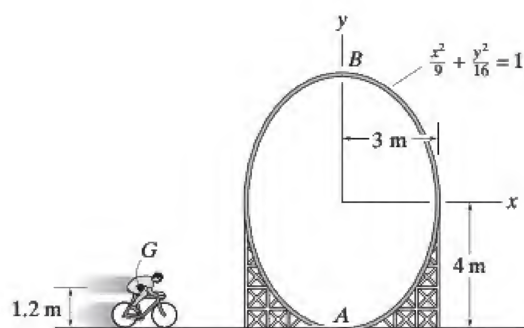
Prob. 14-93

14-94. Una paila de masa insignificante está sujeta a dos resortes idénticos de rigidez $k = 250$ N/m. Si se deja caer una caja de 10 kg desde una altura de 0.5 m por encima de la paila, determine el desplazamiento vertical máximo d. Inicialmente cada resorte tiene una tensión de 50 N.



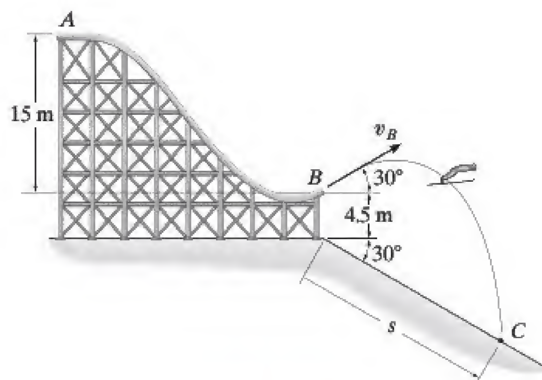
Prob. 14-94

14-95. El ciclista intenta completar el rizo elipsoidal sin que se caiga del rizo. Determine la rapidez que debe mantener en A justo antes de entrar al rizo para completar la maniobra. La bicicleta y el ciclista tienen una masa total de 85 kg y un centro de masa en G. Ignore la masa de las ruedas.



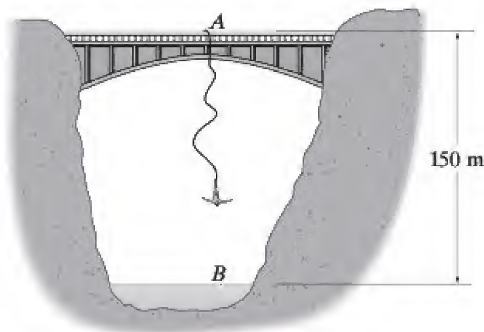
Prob. 14-95

***14-96.** El esquiador de 65 kg inicia su salto desde el punto de reposo en A. Determine su rapidez en B y la distancia s donde aterriza en C. Ignore la fricción.



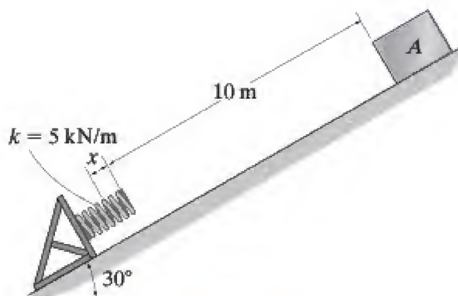
Prob. 14-96

•**14-97.** Un hombre de 75 kg realiza un salto elástico desde A con una rapidez inicial de caída de 1.5 m/s. Determine la longitud no alargada de la banda elástica a la cual está sujeto para que se detenga momentáneamente justo sobre la superficie del agua. La rigidez de la banda elástica es $k = 3$ kN/m. Ignore la estatura del hombre.



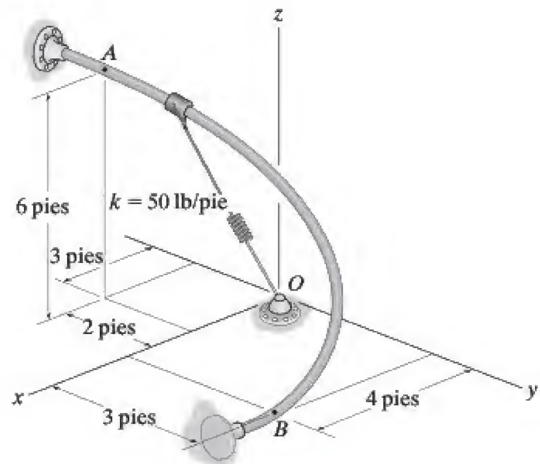
Prob. 14-97

14-98. El bloque A de 10 kg se suelta del punto de reposo y se desliza hacia abajo del plano liso. Determine la compresión x del resorte cuando el bloque se detiene momentáneamente.



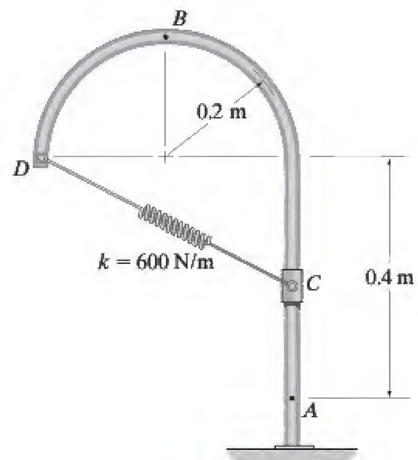
Prob. 14-98

14-99. El collarín liso de 20 lb está sujeto al resorte cuya longitud sin alargar es de 4 pies. Si se suelta desde el punto de reposo en la posición A, determine la rapidez con que llega al punto B.



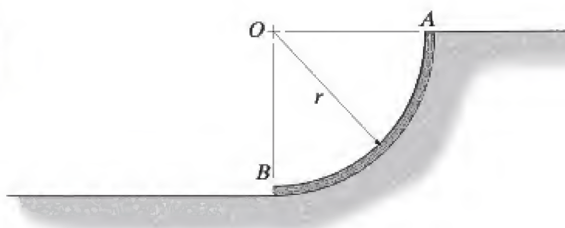
Prob. 14-99

***14-100.** El collarín de 2 kg se suelta desde el punto de reposo en A y se desliza a lo largo de la guía vertical lisa. Determine su rapidez cuando llega a la posición B. Además, determine la fuerza normal ejercida en el collarín en esta posición. La longitud sin alargar del resorte es de 200 mm.



Prob. 14-100

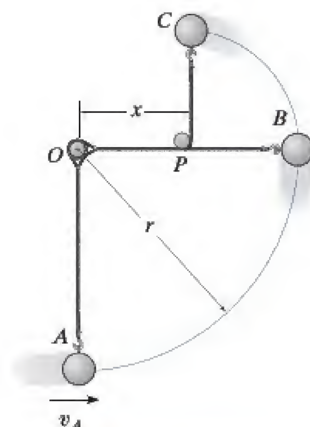
•**14-101.** Un tubo con perfil de un cuarto de círculo AB de radio medio r contiene una cadena lisa cuya masa por unidad de longitud es m_0. Si la cadena se suelta del punto de reposo desde la posición mostrada, determine su rapidez cuando sale por completo del tubo.



Prob. 14-101

14-102. A la bola de masa m se le imprime una rapidez de $v_A = \sqrt{3gr}$ en la posición A. Cuando llega a B, la cuerda golpea la clavija P, tras de lo cual la bola describe una trayectoria circular más pequeña. Determine la posición x de P de modo que la bola alcance el punto C.

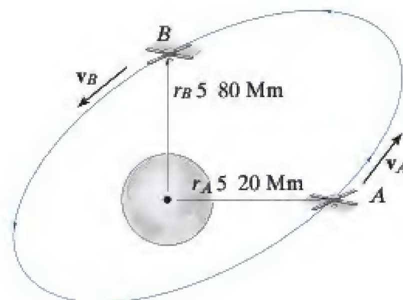
14-103. A la bola de masa m se le imprime una rapidez de $v_A = \sqrt{5gr}$ en la posición A. Cuando llega a B, la cuerda golpea la clavija P, tras de lo cual la bola describe una trayectoria circular más pequeña. Si $x = \frac{2}{3}r$, determine la rapidez de la bola y la tensión en la cuerda cuando alcanza su punto más alto C.



Probs. 14-102/103

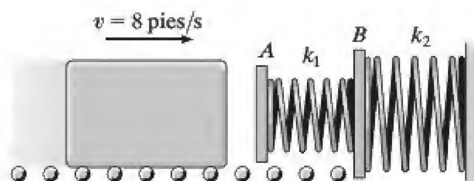
***14-104.** Si la masa de la tierra es M_e, demuestre que la energía potencial gravitacional de un cuerpo de masa m situada a una distancia r del centro de la Tierra es $V_g = -GM_em/r$. Recuerde que la fuerza gravitacional que actúa entre la Tierra y el cuerpo es $F = G(M_em/r^2)$, ecuación 13-1. Para el cálculo, localice el plano de referencia a una distancia "infinita" de la Tierra. También, demuestre que **F** es una fuerza conservadora.

•**14-105.** Un satélite de 60 kg vuela libremente a lo largo de una órbita elíptica de modo que en A, donde $r_A = 20$ Mm, su rapidez es $v_A = 40$ Mm/h. ¿Cuál es la velocidad del satélite cuando llega al punto B, donde $r_B = 80$ Mm? *Sugerencia:* vea el problema 14-104, donde $M_e = 5.976(10^{24})$ kg y $G = 66.73(10^{-12})$ m^3/(kg·s^2).



Prob. 14-105

14-106. El parachoques de doble resorte se utiliza para detener el lingote de acero de 1500 lb en el tren de laminar. Determine el desplazamiento máximo de la placa A si el lingote choca con la placa a 8 pies/s. Ignore la masa de los resortes y las placas A y B. Considere $k_1 = 3000$ lb/pie, $k_2 = 45\,000$ lb/pie.



Prob. 14-106

PROBLEMAS CONCEPTUALES

P14-1. La montaña rusa se detiene momentáneamente en A. Determine la fuerza normal aproximada que ejerce en la vía en B. También determine su aceleración aproximada en este punto. Use datos numéricos y tome medidas a escala en la fotografía con una altura conocida en A.



P14-1

P14-2. A medida que la gran rueda gira, el operador puede aplicar un mecanismo de frenado que fija los carros en la rueda, lo que permite entonces que éstos giren junto con la rueda. Suponga que los pasajeros no tienen puesto el cinturón de seguridad, y determine la rapidez mínima de la rueda (carros) de modo que ningún pasajero se caiga. ¿Cuándo deberá el operador soltar el freno de modo que los carros alcancen su velocidad máxima al girar libremente en la rueda? Estime la fuerza normal máxima que el asiento ejerce en el pasajero cuando se alcanza esta velocidad. Use valores numéricos para explicar su respuesta.



P14-2

P14-3. El muchacho jala hacia atrás el lanzador de globos llenos de agua, por lo que se estiran las cuatro cuerdas elásticas. Estime la altura máxima y la distancia máxima que alcanza el globo si se lanza desde la posición mostrada. Use valores numéricos y cualesquier medidas necesarias desde la fotografía. Suponga que se conocen la longitud no alargada y la rigidez de cada cuerda.



P14-3

P14-4. La muchacha está momentáneamente en reposo en la posición mostrada. Si la longitud no alargada y rigidez de cada una de las dos cuerdas elásticas se conocen, determine aproximadamente qué distancia baja la muchacha antes de que vuelva a estar de manera momentánea en reposo. Use valores numéricos y tome cualesquier mediciones necesarias a partir de la fotografía.



P14-4

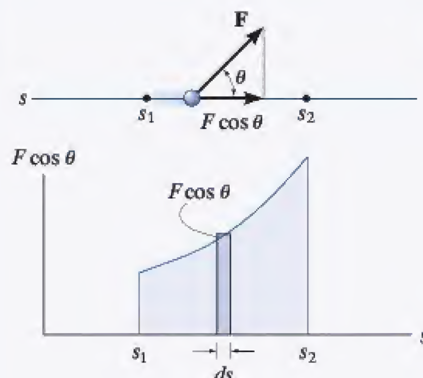
14

REPASO DEL CAPÍTULO

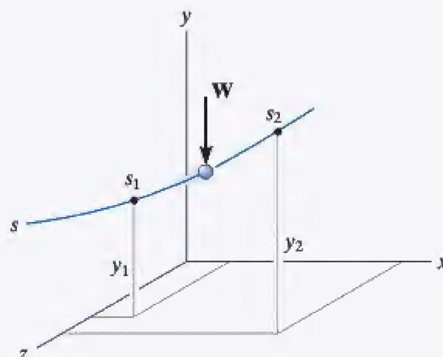
Trabajo de una fuerza

Una fuerza realiza trabajo cuando se desplaza a lo largo de su línea de acción. Si la fuerza varía con el desplazamiento, entonces el trabajo es $U = \int F \cos\theta \, ds$.

Gráficamente, ésta representa el área bajo el diagrama $F-s$.

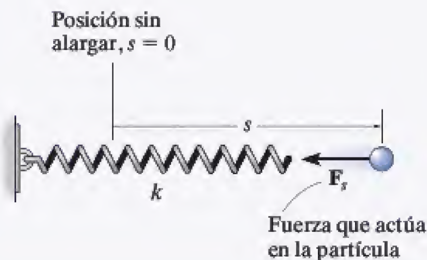


Si la fuerza es constante, entonces para un desplazamiento Δs en la dirección de la fuerza $U = F_c \Delta s$. Un ejemplo típico de este caso es el trabajo de un peso $U = -W\Delta y$. Aquí, Δy es el desplazamiento vertical.



El trabajo realizado por una fuerza de resorte, $F = ks$, depende del alargamiento o compresión s del resorte.

$$U = \tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2$$



Principio de trabajo y energía

Si la ecuación de movimiento en la dirección tangencial, $\Sigma F_t = ma_t$ se combina con la ecuación cinemática, $a_t ds = v\,dv$, obtenemos el principio de trabajo y energía. Esta ecuación establece que la energía cinética inicial T, más el trabajo realizado ΣU_{1-2} es igual a la energía cinética final.

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

El principio de trabajo y energía es útil para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y desplazamiento. Para su aplicación, debe trazarse el diagrama de cuerpo libre de la partícula para identificar las fuerzas que realizan trabajo.		
Potencia y eficiencia Potencia es la cantidad de trabajo realizada en la unidad de tiempo. Para su aplicación, deben especificarse la fuerza **F** que crea la potencia y su velocidad **v**. La eficiencia representa la relación de la potencia de salida a la potencia de entrada. Debido a la fuerza de fricción siempre es menor que uno.	$P = \frac{dU}{dt}$ $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ $\epsilon = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}}$	

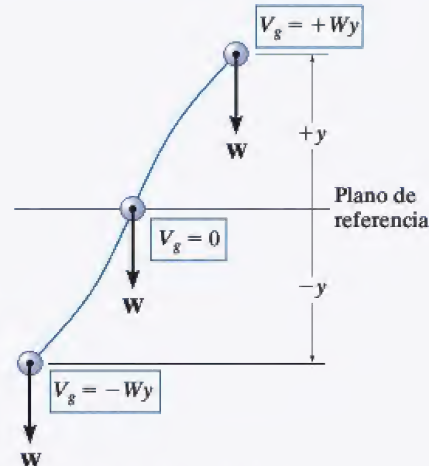
Conservación de la energía

Una fuerza conservadora realiza trabajo que es independiente de su trayectoria. Dos ejemplos son el peso de una partícula y la fuerza del resorte.

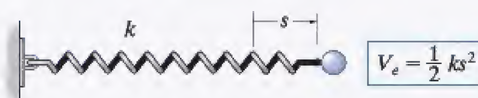
La fricción es una fuerza no conservadora, puesto que el trabajo depende de la longitud de la trayectoria. Cuanto más larga es la trayectoria, más trabajo se realiza.

El trabajo realizado por una fuerza conservadora depende de su posición con respecto a un plano de referencia. Cuando este trabajo se refiere a un plano de referencia, se llama energía potencial. Para un peso es $V_g = \pm Wy$ y para un resorte es $V_e = +\frac{1}{2}kx^2$.

La energía mecánica se compone de energía cinética T y energías potenciales gravitacional y elástica V. De acuerdo con la conservación de la energía, esta suma es constante y tiene el mismo valor en cualquier posición de la trayectoria. Si sólo fuerzas gravitacionales y de resortes provocan el movimiento de la partícula, entonces puede usarse la ecuación de la conservación de la energía para resolver problemas que implican estas fuerzas conservadoras, desplazamiento y velocidad.



Energía potencial gravitacional



Energía potencial elástica

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$



Se requieren principios de impulso y cantidad de movimiento para predecir el movimiento de esta pelota de golf.

Cinética de una partícula: impulso y cantidad de movimiento

15

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Desarrollar el principio de impulso y cantidad de movimiento lineal para una partícula y aplicarlo para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo.
- Estudiar la conservación de cantidad de movimiento lineal para partículas.
- Analizar la mecánica del impacto.
- Presentar el concepto de impulso y cantidad de movimiento angular.
- Resolver problemas que implican corrientes de fluidos constantes y propulsión con masa variable.

15.1 Principio de impulso y cantidad de movimiento lineal

En esta sección integraremos la ecuación de movimiento con respecto al tiempo para obtener el principio de impulso y cantidad de movimiento. La ecuación resultante es útil para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo.

Con cinemática, la ecuación de movimiento de una partícula de masa m puede escribirse como

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{15-1}$$

donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{v}$ se miden a partir de un marco de referencia inercial. Al reordenar los términos e integrarlos entre los límites $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ cuando $t = t_1$ y $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$ cuando $t = t_2$, tenemos

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = m \int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} d\mathbf{v}$$



La herramienta de impulso se utiliza para reparar la abolladura de la defensa. Para ello primero se inserta su extremo en un orificio perforado en la defensa, luego se sujeta la herramienta y se mueve a tirones hacia arriba hasta que se detiene con el anillo de retención. El impulso desarrollado se transfiere a lo largo de la herramienta y de repente saca la abolladura.

15

o

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 \qquad (15\text{-}2)$$

Esta ecuación se conoce como *principio de impulso y cantidad de movimiento lineal*. Por la derivación se ve que es simplemente una integración con respecto al tiempo de la ecuación de movimiento. Proporciona un *medio directo* de obtener la velocidad final $\mathbf{v}_2$ de la partícula después de un lapso de tiempo especificado cuando la velocidad inicial de la partícula se conoce y las fuerzas que actúan en ella son o constantes o pueden expresarse como una función de tiempo. Por comparación, si $\mathbf{v}_2$ se determinará por medio de la ecuación de movimiento, se requeriría un proceso de dos pasos; es decir, aplicar $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para obtener $\mathbf{a}$ y luego integrar $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ para obtener $\mathbf{v}_2$.

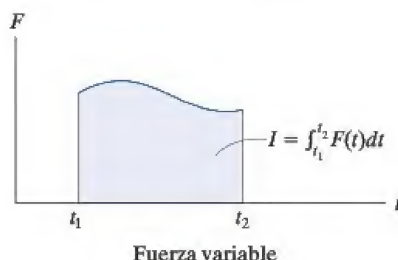
Cantidad de movimiento lineal. Cada uno de los dos vectores de la forma $\mathbf{L} = m\mathbf{v}$ en la ecuación 15-2, se conoce como la cantidad de movimiento lineal de la partícula. Como m es un escalar positivo, el vector de cantidad de movimiento lineal tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$, y su magnitud mv tiene unidades de masa-velocidad, por ejemplo, kg · m/s, o slug · pies/s.

Impulso lineal. La integral $\mathbf{I} = \int \mathbf{F}\, dt$ en la ecuación 15-2 se conoce como *impulso lineal*. El término es una cantidad vectorial que mide el efecto de una fuerza durante el tiempo en que la fuerza actúa. Como el tiempo es un escalar positivo, el impulso actúa en el misma dirección que la fuerza, y su magnitud tiene unidades de fuerza-tiempo, por ejemplo, N · s o lb · s.*

Si la fuerza se expresa como una función del tiempo, el impulso se determina mediante la evaluación directa de la integral. En particular, si la fuerza es constante en cuanto a magnitud y dirección, el impulso resultante es

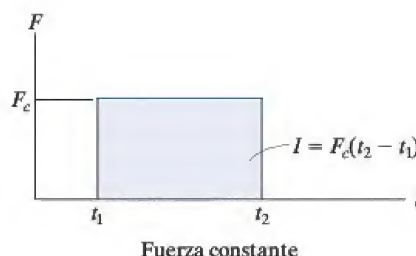
$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_c dt = \mathbf{F}_c(t_2 - t_1).$$

Gráficamente, el área sombreada bajo la curva de fuerza *versus* tiempo representa la magnitud del impulso, figura 15-1. Una fuerza constante crea el área rectangular sombreada que aparece en la figura 15-2.



Fuerza variable

Fig. 15-1



Fuerza constante

Fig. 15-2

*Aunque las unidades de impulso y cantidad de movimiento están definidas de forma diferente, puede demostrarse que la ecuación 15-2 es dimensionalmente homogénea.

Principio de impulso y cantidad de movimiento lineales.

Para solucionar problemas, la ecuación 15-2 se reescribirá como

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m\mathbf{v}_2 \qquad (15\text{-}3)$$

la cual expresa que la cantidad de movimiento inicial de la partícula en el instante t_1 más la suma de todos los impulsos aplicados a la partícula de t_1 a t_2 equivale a la cantidad de movimiento final de la partícula en el instante t_2. Estos tres términos se ilustran gráficamente en los *diagramas de impulso y cantidad de movimiento* mostrados en la figura 15-3. Los dos *diagramas de cantidad de movimiento* son sólo las formas delineadas de la partícula, las cuales indican la dirección y la magnitud de las cantidades de movimiento inicial y final de la partícula, $m\mathbf{v}_1$ y $m\mathbf{v}_2$. Semejante al diagrama de cuerpo libre, el *diagrama de impulso* es una forma delineada de la partícula que muestra todos los impulsos que actúan en ella cuando se encuentra en algún punto intermedio a lo largo de su trayectoria.

Si cada uno de los vectores en la ecuación 15-3 se divide en sus componentes x, y, z, podemos escribir las tres ecuaciones escalares siguientes de impulso y cantidad de movimiento lineales.

$$\begin{aligned} m(v_x)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x\, dt &= m(v_x)_2 \\ m(v_y)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y\, dt &= m(v_y)_2 \\ m(v_z)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_z\, dt &= m(v_z)_2 \end{aligned} \qquad (15\text{-}4)$$

15

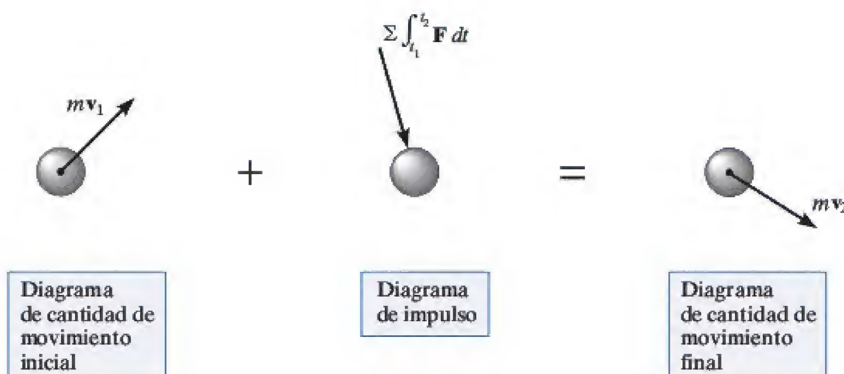


Fig. 15-3

Procedimiento para el análisis

El principio de impulso y cantidad de movimiento lineales se utiliza para resolver problemas que implican *fuerza*, *tiempo* y *velocidad*, puesto que estos términos intervienen en la formulación. Para su aplicación se sugiere el siguiente procedimiento.*

Diagrama de cuerpo libre.

- Establezca el marco de referencia inercial x, y, z y trace el diagrama de cuerpo libre de la partícula que incluya todas las fuerzas que producen impulsos en la partícula.
- Deberá establecer la dirección y sentido de las velocidades inicial y final de la partícula.
- Si un vector es desconocido, suponga que el sentido de sus componentes está en la dirección de la(s) coordenada(s) inercial(es) positiva(s).
- Como un procedimiento alternativo, trace los diagramas de impulso y cantidad de movimiento de la partícula como se planteó en la referencia a la figura 15-3.

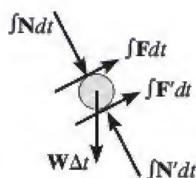
Principio de impulso y cantidad de movimiento.

- De acuerdo con el sistema de coordenadas establecido, aplique el principio de impulso y cantidad de movimiento lineales, $m\mathbf{v}_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2$. Si el movimiento ocurre en el plano $x-y$, las dos ecuaciones de componentes escalares pueden formularse bien al encontrar los componentes vectoriales de $\mathbf{F}$ en el diagrama de cuerpo libre o al utilizar los datos que aparecen en los diagramas de impulso y cantidad de movimiento.
- Tenga en cuenta que todas las fuerzas que actúan en el diagrama de cuerpo libre de la partícula crearán un impulso aun cuando algunas de estas fuerzas no trabajen.
- Las fuerzas que son funciones del tiempo se integran para obtener el impulso. Gráficamente, el impulso es igual al área bajo la curva de fuerza-tiempo.

15

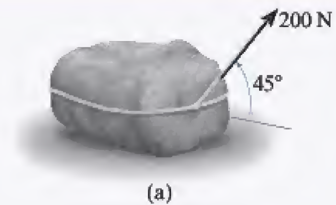
A medida que las ruedas de la máquina de lanzar giran, aplican impulsos de fricción a la pelota y le imprimen una cantidad de movimiento lineal. Estos impulsos se muestran en el diagrama de impulso. Aquí, tanto los impulsos de fricción como los normales varían con el tiempo. Por comparación, el impulso producido por el peso es constante y es muy pequeño dado que el tiempo Δt en que la pelota está en contacto con las ruedas es muy corto.





*Este procedimiento se seguirá cuando se desarrollen las comprobaciones y teoría en el texto.

EJEMPLO 15.1



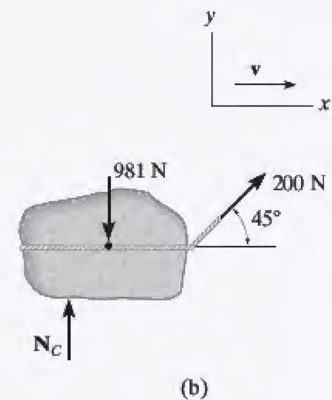
(a)

La piedra de 100 kg que se muestra en la figura 15-4*a* está originalmente en reposo sobre la superficie horizontal lisa. Si se aplica una fuerza de remolque de 200 N, que actúa a un ángulo de 45°, a la piedra durante 10 s, determine la velocidad final y la fuerza normal que la superficie ejerce en la piedra durante este intervalo.

SOLUCIÓN

Este problema se resuelve por el principio de impulso y cantidad de movimiento, puesto que implica fuerza, velocidad y tiempo.

Diagrama de cuerpo libre. Vea la figura 15-4*b*. Como todas las fuerzas que actúan son *constantes*, los impulsos son simplemente el producto de la magnitud de la fuerza por 10 s $[\mathbf{I} = \mathbf{F}_c(t_2 - t_1)]$. Observe el procedimiento alternativo de trazar los diagramas de impulso y cantidad de movimiento de la piedra, figura 15-4*c*.



(b)

Principio de impulso y cantidad de movimiento. Al aplicar las ecuaciones 15-4 se obtiene

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m(v_x)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt = m(v_x)_2$$

$$0 + 200\text{ N}\cos 45°(10\text{ s}) = (100\text{ kg})v_2$$

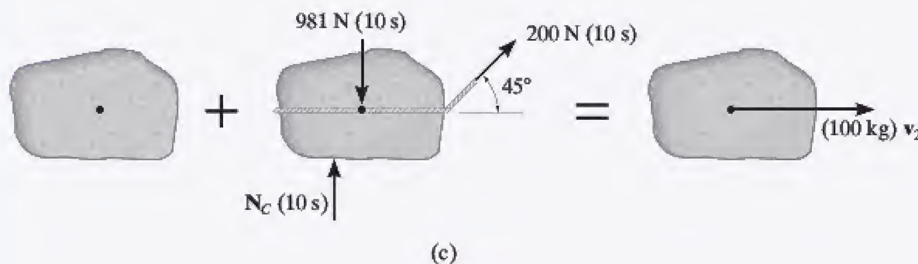
$$v_2 = 14.1\text{ m/s} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$(+\uparrow) \qquad m(v_y)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m(v_y)_2$$

$$0 + N_C(10\text{ s}) - 981\text{ N}(10\text{ s}) + 200\text{ N sen }45°(10\text{ s}) = 0$$

$$N_C = 840\text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

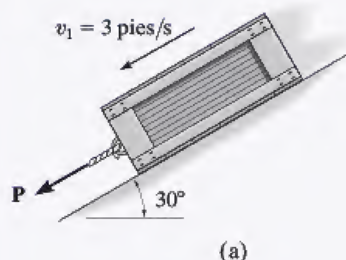
NOTA: como no ocurre movimiento en la dirección y, la ecuación directa de la ecuación de equilibrio $\Sigma F_y = 0$ da el mismo resultado para N_C.



(c)

Fig. 15-4

EJEMPLO 15.2



(a)

En el embalaje de 50 lb de la figura 15-5*a* actúa una fuerza de magnitud variable $P = (20t)$ lb, donde t está en segundos. Determine la velocidad del embalaje 2 s después de que se aplica **P**. La velocidad inicial es $v_1 = 3$ pies/s hacia abajo del plano y el coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y el plano es $\mu_k = 0.3$.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Vea la figura 15-5*b*. Como la magnitud de la fuerza $P = 20t$ varía con el tiempo, el impulso que crea se determina al integrarse a lo largo del intervalo de 2 s.

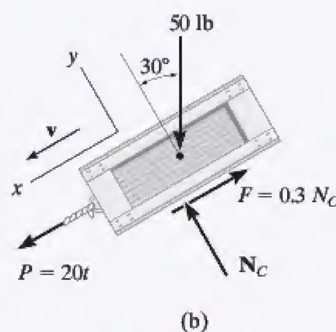
Principio de impulso y cantidad de movimiento. Al aplicar las ecuaciones 15-4 en la dirección x, tenemos

$$(+\swarrow) \qquad m(v_x)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt = m(v_x)_2$$

$$\frac{50\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}(3\text{ pies/s}) + \int_0^{2\text{ s}} 20t\,dt - 0.3N_C(2\text{ s}) + (50\text{ lb})\operatorname{sen} 30°(2\text{ s}) = \frac{50\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}v_2$$

$$4.658 + 40 - 0.6N_C + 50 = 1.553v_2$$

La ecuación de equilibrio puede aplicarse en la dirección y. ¿Por qué?



(b)

Fig. 15-5

$$+\nwarrow\Sigma F_y = 0; \qquad N_C - 50\cos 30°\text{ lb} = 0$$

Al resolver,

$$N_C = 43.30\text{ lb}$$

$$v_2 = 44.2\text{ pies/s}\swarrow \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

NOTA: también podemos resolver este problema con la ecuación de movimiento. A partir de la figura 15-5*b*,

$$+\swarrow\Sigma F_x = ma_x;\quad 20t - 0.3(43.30) + 50\operatorname{sen} 30° = \frac{50}{32.2}a$$

$$a = 12.88t + 7.734$$

Con cinemática

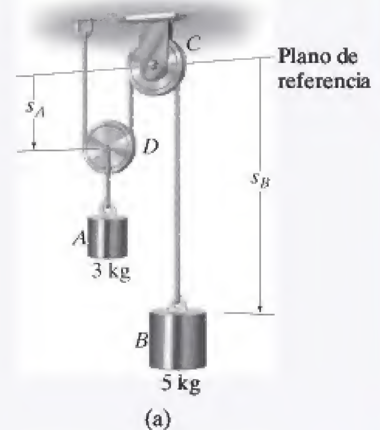
$$+\swarrow dv = a\,dt; \qquad \int_{3\text{ pies/s}}^{v} dv = \int_0^{2\,s}(12.88t + 7.734)dt$$

$$v = 44.2\text{ pies/s} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Por comparación, la aplicación del principio de impulso y cantidad de movimiento elimina la necesidad de utilizar cinemática ($a = dv/dt$) y por tanto el resultado es un método más fácil de solución.

EJEMPLO 15.3

Los bloques A y B de la figura 15-6*a* tienen una masa de 3 kg y 5 kg, respectivamente. Si el sistema se pone en movimiento a partir del punto de reposo, determine la velocidad del bloque B en 6 s. Ignore la masa de las poleas y la cuerda.



(a)

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Vea la figura 15-6*b*. Como el peso de cada bloque es constante, las tensiones en las cuerdas también lo serán. Además, como la masa de la polea D se ignora, la tensión en la cuerda $T_A = 2T_B$. Observe que se supone que los bloques se mueven hacia abajo en las direcciones de las coordenadas positivas s_A y s_B.

Principio de impulso y cantidad de movimiento.

Bloque A:

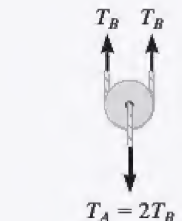
$$(+\downarrow) \qquad m(v_A)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m(v_A)_2$$

$$0 - 2T_B(6\text{ s}) + 3(9.81)\text{ N}(6\text{ s}) = (3\text{ kg})(v_A)_2 \qquad (1)$$

Bloque B:

$$(+\downarrow) \qquad m(v_B)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m(v_B)_2$$

$$0 + 5(9.81)\text{ N}(6\text{ s}) - T_B(6\text{ s}) = (5\text{ kg})(v_B)_2 \qquad (2)$$

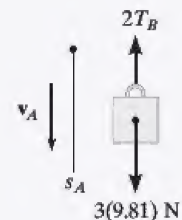


Cinemática. Como los bloques están sometidos a un movimiento dependiente, la velocidad de A puede relacionarse con la de B por medio del análisis de cinemática analizado en la sección 12.9. Se establece un plano de referencia horizontal a través del punto fijo en C, figura 15-6*a* y las coordenadas de posición, s_A y s_B, se relacionan con la longitud total constante l de los segmentos verticales de la cuerda por medio de la ecuación

$$2s_A + s_B = l$$

Al considerar la derivada con respecto al tiempo se obtiene

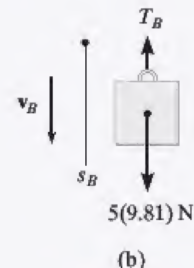
$$2v_A = -v_B \qquad (3)$$



Como lo indica el signo negativo, cuando B se mueve hacia abajo A lo hace hacia arriba. Al sustituir este resultado en la ecuación 1, y resolver las ecuaciones 1 y 2 se obtiene

$$(v_B)_2 = 35.8\text{ m/s}\downarrow \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$T_B = 19.2\text{ N}$$



(b)

Fig. 15-6

NOTA: dese cuenta que la dirección *positiva* (hacia abajo) de $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ es *consistente* en las figuras 15-6*a* y 15-6*b* y en las ecuaciones 1 a 3. Esto es importante puesto que lo que buscamos es una solución de ecuaciones simultáneas.

15

15.2 Principio de impulso y cantidad de movimiento lineales para un sistema de partículas

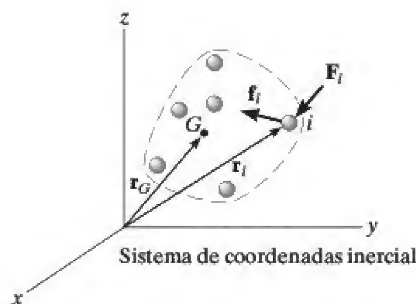


Fig. 15-7

El principio de impulso y cantidad de movimiento lineales para un sistema de partículas que se mueven con respecto a una referencia inercial, figura 15-7, se obtiene con la ecuación de movimiento aplicada a todas las partículas del sistema, es decir,

$$\Sigma \mathbf{F}_i = \Sigma m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \tag{15-5}$$

El término del lado izquierdo representa sólo la suma de las *fuerzas externas* que actúan en las partículas. Recuerde que las fuerzas internas $\mathbf{f}_i$ que actúan entre las partículas no aparecen con esta suma, puesto que de acuerdo con la tercera ley de Newton ocurren en pares colineales iguales pero opuestos y por consiguiente se cancelan. Al multiplicar ambos lados de la ecuación 15-5 por dt e integrar entre los límites $t = t_1$, $\mathbf{v}_i = (\mathbf{v}_i)_1$ y $t = t_2$, $\mathbf{v}_i = (\mathbf{v}_i)_2$ se obtiene

$$\Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i \, dt = \Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_2 \tag{15-6}$$

Esta ecuación establece que los momentos lineales iniciales del sistema más los impulsos de todas las *fuerzas externas* que actúan en el sistema de t_1 a t_2 son iguales a los momentos lineales finales del sistema.

Como la ubicación del centro de masa G del sistema se determina a partir de $m\mathbf{r}_G = \Sigma m_i \mathbf{r}_i$, donde $m = \Sigma m_i$ es la masa total de todas las partículas, figura 15-7 y si luego se considera la derivada con respecto al tiempo, tenemos

$$m\mathbf{v}_G = \Sigma m_i \mathbf{v}_i$$

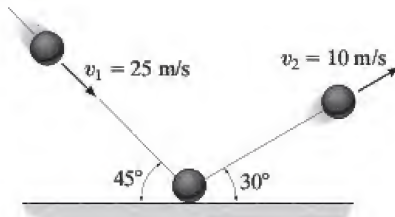
la cual establece que la cantidad de movimiento lineal total del sistema de partículas equivale a la cantidad de movimiento lineal de una partícula aglomerada "ficticia" de masa $m = \Sigma m_i$ que se mueve a la velocidad del centro de masa del sistema. Al sustituir en la ecuación 15-6 se obtiene

$$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i \, dt = m(\mathbf{v}_G)_2 \tag{15-7}$$

Aquí, la cantidad de movimiento lineal inicial de la partícula aglomerada, más los impulsos externos que actúan en el sistema de partículas de t_1 a t_2, es igual a la cantidad de movimiento lineal final de la partícula aglomerada. Por consiguiente, la ecuación anterior justifica la aplicación del principio de impulso y cantidad de movimiento lineales a un sistema de partículas que componen un cuerpo rígido.

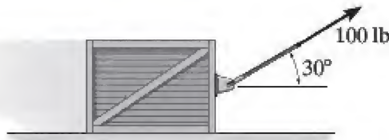
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F15-1. La pelota de 0.5 kg choca con el suelo áspero y rebota con las velocidades que se muestran. Determine la magnitud del impulso que ejerce el suelo en la pelota. Suponga que ésta no patina cuando choca con el suelo e ignore su tamaño y el impulso producido por su peso.



F15-1

F15-2. Si el coeficiente de fricción cinética entre el embalaje de 150 lb y el suelo es $\mu_k = 0.2$, determine la rapidez del embalaje cuando $t = 4$ s. El embalaje comienza a moverse desde el punto de reposo y lo remolca la fuerza de 100 lb.



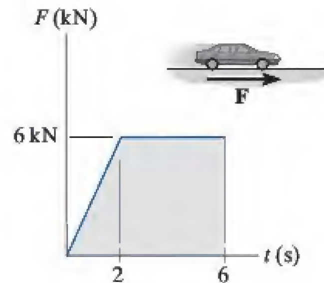
F15-2

F15-3. El motor ejerce una fuerza $F = (20t^2)$ N en el cable, donde t está en segundos. Determine la rapidez del embalaje de 25 kg cuando $t = 4$ s. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el embalaje y el plano son $\mu_s = 0.3$ y $\mu_k = 0.25$, respectivamente.



F15-3

F15-4. Las ruedas del automóvil de 1.5 Mg generan la fuerza de tracción **F** descrita por la gráfica. Si el automóvil arranca desde el punto de reposo, determine su rapidez cuando $t = 6$ s.



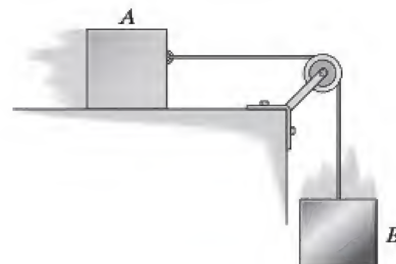
F15-4

F15-5. El vehículo de tracción en las cuatro ruedas (vehículo utilitario deportivo) de 2.5 Mg jala el remolque de 1.5 Mg. La fuerza de tracción desarrollada en las ruedas es $F_D = 9$ kN. Determine la rapidez del vehículo en 20 s, a partir del punto de reposo. Además, determine la tensión desarrollada en el acoplamiento entre el vehículo utilitario deportivo y el remolque. Ignore la masa de las ruedas.



F15-5

F15-6. El bloque de 10 lb A alcanza una velocidad de 1 pie/s en 5 segundos, a partir del punto de reposo. Determine la tensión en la cuerda y el coeficiente de fricción cinética entre el bloque A y el plano horizontal. Ignore el peso de la polea. El bloque B pesa 8 lb.



F15-6

PROBLEMAS

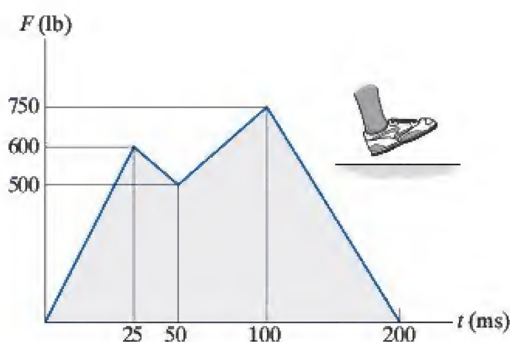
•**15-1.** A un bloque de 5 lb se le imparte una velocidad inicial de 10 pies/s hacia arriba por una pendiente lisa de 45°. Determine el tiempo durante el cual se mueve hacia arriba antes de detenerse.

15-2. El "jump jet" de 12 Mg es capaz de despegar verticalmente desde la cubierta de un buque. Si sus turborreactores ejercen una fuerza vertical constante de 150 kN en el avión, determine su velocidad y qué tan alto sube en $t = 6$ s, a partir del punto de reposo. Ignore la pérdida de combustible durante el despegue.



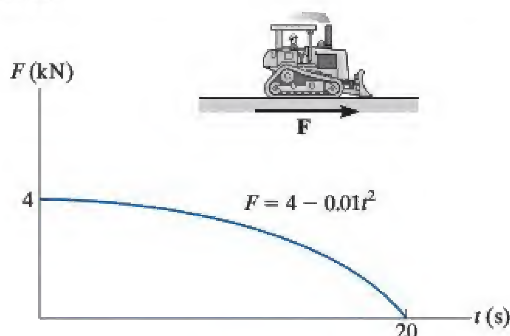
Prob. 15-2

15-3. La gráfica muestra la fuerza de reacción vertical de la interacción zapato-suelo como una función del tiempo. El primer pico actúa en el talón, el segundo en la punta del pie. Determine el impulso total que actúa en el zapato durante la interacción.



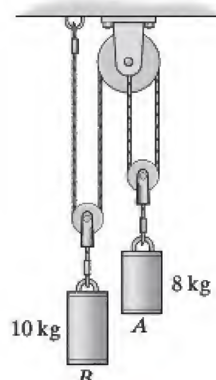
Prob. 15-3

*__15-4.__ El tractor nivelador de 28 Mg originalmente está en reposo. Determine su rapidez cuando $t = 4$ s si la tracción horizontal **F** varía con el tiempo como se muestra en la gráfica.



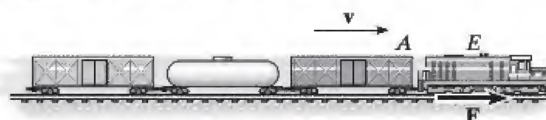
Prob. 15-4

•**15-5.** Si al cilindro A se le imparte una rapidez inicial hacia abajo de 2 m/s, determine la rapidez de cada cilindro cuando $t = 3$ s. Ignore la masa de las poleas.



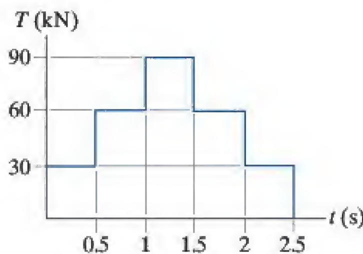
Prob. 15-5

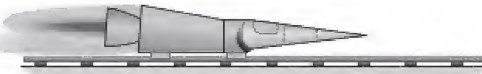
15-6. Un tren se compone de una máquina de 50 Mg y tres vagones cada uno de 30 Mg de masa. Se requieren 80 s para que el tren incremente su rapidez de manera uniforme a 40 km/h, a partir del punto de reposo; determine la fuerza T desarrollada en el acoplamiento entre la máquina E y el primer vagón A. Las ruedas de la máquina generan una fuerza de tracción de fricción resultante **F** la cual mueve el tren hacia delante, mientras las ruedas de los vagones ruedan libremente. Además, determine la fuerza F que actúa en las ruedas de la máquina.



Prob. 15-6

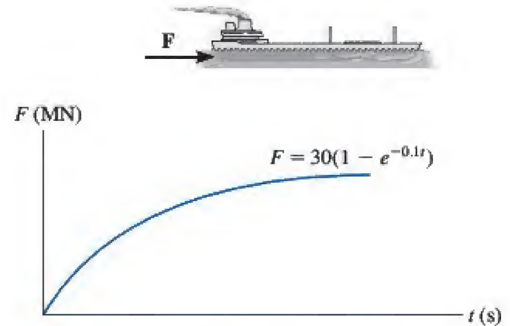
15-7. Determine la rapidez máxima alcanzada por el trineo de cohete de 1.5 Mg si los cohetes proporcionan el empuje que se muestra en la gráfica. Inicialmente, el trineo está en reposo. Ignore la fricción y la pérdida de masa debido al consumo de combustible.





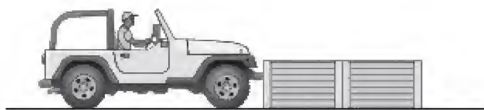
Prob. 15-7

•**15-9.** El buque tanque tiene una masa de 130 Gg. Si originalmente está en reposo, determine su rapidez cuando $t = 10$ s. El empuje horizontal provisto por su hélice varía con el tiempo como se muestra en la gráfica. Ignore el efecto de la resistencia del agua.



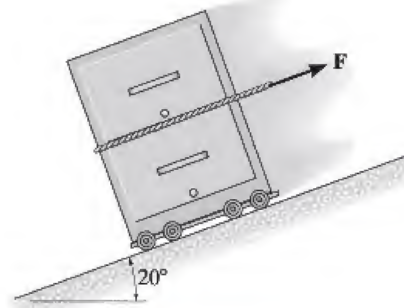
Prob. 15-9

***15-8.** El jeep de tracción en las cuatro ruedas de 1.5 Mg se utiliza para empujar dos embalajes idénticos, cada uno de 500 kg de masa. Si el coeficiente de fricción estática entre las llantas y el suelo es $\mu_s = 0.6$, determine la rapidez máxima posible que el jeep puede alcanzar en 5 s, sin que las llantas patinen. El coeficiente de fricción cinética entre los embalajes y el suelo es $\mu_k = 0.3$.



Prob. 15-8

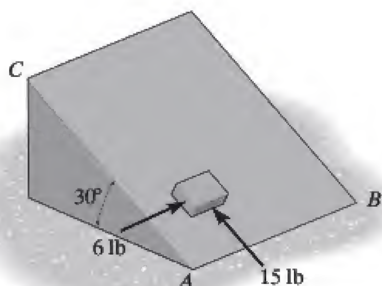
15-10. El gabinete de 20 lb se somete a la fuerza $F = (3 + 2t)$ lb, donde t está en segundos. Si el gabinete inicialmente se mueve hacia abajo del plano con una rapidez de 6 pies/s, determine cuánto tiempo le lleva a la fuerza detener el gabinete. **F** siempre actúa paralela al plano.



Prob. 15-10

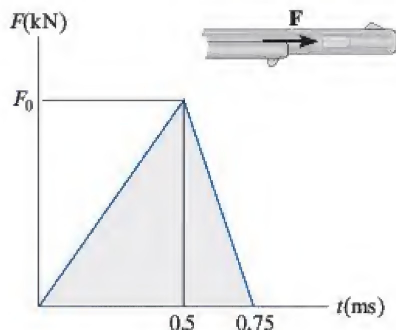
15

15-11. El pequeño bloque de 20 lb está colocado sobre el plano inclinado y sometido a fuerzas de 6 lb y 15 lb que actúan paralelas a los bordes AB y AC, respectivamente. Si en un principio el bloque está en reposo, determine su rapidez cuando $t = 3$ s. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es $\mu_k = 0.2$.



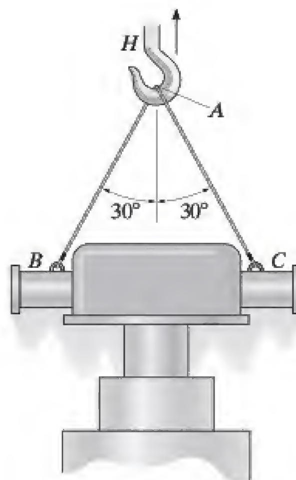
Prob. 15-11

***15-12.** Si se supone que la fuerza que actúa en una bala de 2 g, cuando pasa horizontalmente a través del cañón de un rifle, varía con el tiempo como se muestra, determine la fuerza neta máxima F_0 aplicada a la bala al dispararla. La velocidad de salida es de 500 m/s cuando $t = 0.75$ ms. Ignore la fricción entre la bala y el cañón del rifle.



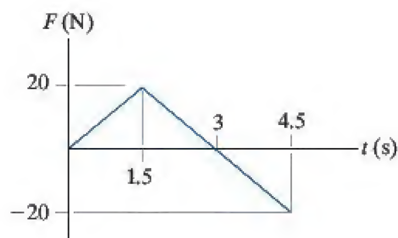
Prob. 15-12

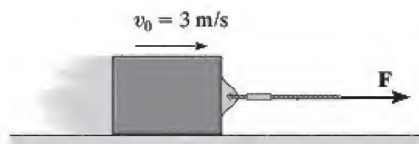
•15-13. El ensamble del elemento de combustible de un reactor nuclear pesa 600 lb. Suspendido en posición vertical de H e inicialmente en reposo, se le imparte una velocidad hacia arriba de 5 pies/s en 0.3 s. Determine la tensión promedio en los cables AB y AC durante este intervalo.



Prob. 15-13

15-14. El bloque liso de 10 kg se desplaza a la derecha con una velocidad de $v_0 = 3$ m/s cuando se le aplica una fuerza **F**. Si la fuerza varía como se muestra en la gráfica, determine la velocidad del bloque cuando $t = 4.5$ s.

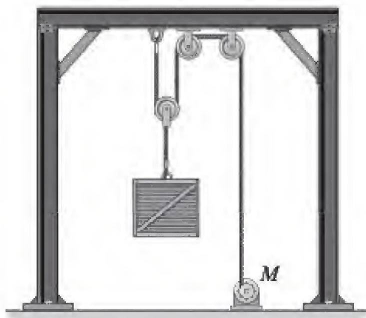




Prob. 15-14

15-15. El motor M levanta el embalaje de 100 kg. Si la velocidad del embalaje se incrementa de manera uniforme de 1.5 m/s a 4.5 m/s en 5 s, determine la tensión desarrollada en el cable durante el movimiento.

***15-16.** El motor M levanta el embalaje de 100 kg. El motor ejerce una fuerza en el cable de $T = (200t^{1/2} + 150)$ N, donde t está en segundos. Si el embalaje comienza a elevarse del punto de reposo en el suelo, determine su rapidez cuando $t = 5$ s.



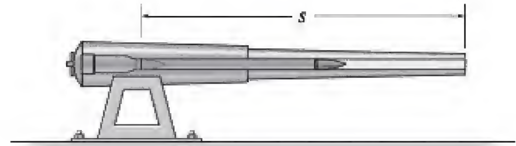
Probs. 15-15/16

•**15-17.** La ballena jorobada de 5.5 Mg está varada en la playa debido a cambios en la marea. En un esfuerzo por rescatarla, se utiliza un remolcador de 12 Mg para liberarla mediante una cuerda inextensible atada a su cola. Para vencer la fuerza de fricción de la arena en la ballena, el remolcador retrocede hasta que la cuerda se afloja y luego avanza a 3 m/s. Si luego el remolcador apaga los motores, determine la fuerza de fricción promedio **F** en la ballena si ocurre un deslizamiento durante 1.5 s antes de que el remolcador se detenga después de que la cuerda se tensa. Además, ¿cuál es la fuerza promedio en la cuerda durante el remolcado?



Prob. 15-17

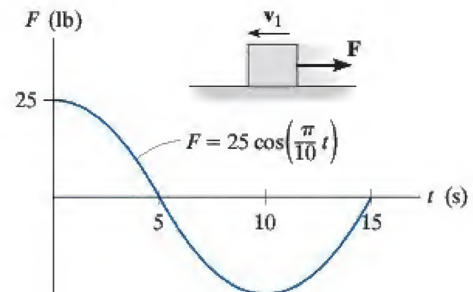
15-18. La fuerza que actúa en el proyectil de masa m al desplazarse horizontalmente a través del cañón es $F = C$ sen $(\pi t/t')$. Determine la velocidad del proyectil cuando $t = t'$. Si el proyectil llega al final del cañón en este instante, determine la longitud s.



Prob. 15-18

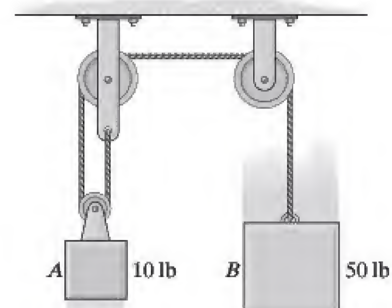
15

15-19. Al principio, un bloque de 30 lb se mueve a lo largo de una superficie horizontal lisa con una rapidez $v_1 =$ 6 pies/s hacia la izquierda. Si en él actúa una fuerza **F**, la cual varía como se muestra, determine la velocidad del bloque en 15 s.



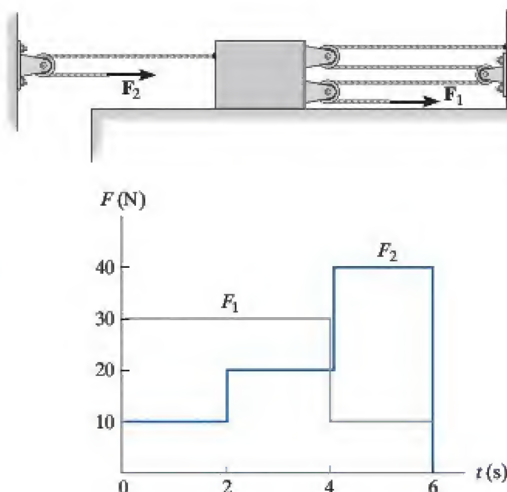
Prob. 15-19

***15-20.** Determine la velocidad de cada bloque 2 s después de que los bloques se sueltan del punto de reposo. Ignore la masa de las poleas y la cuerda.



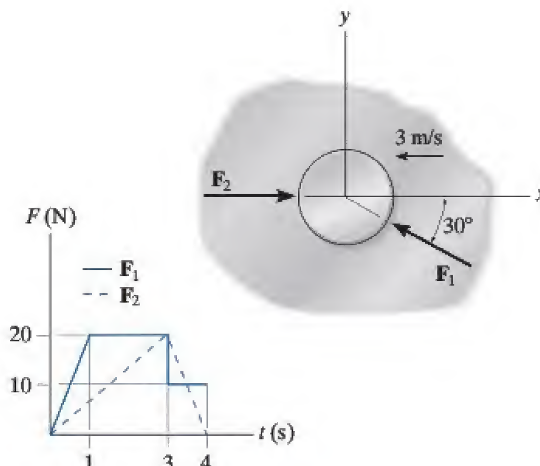
Prob. 15-20

•**15-21.** El bloque corredizo de 40 kg se mueve a la derecha a 1.5 m/s cuando las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ actúan en él. Si estas fuerzas varían como se muestra en la gráfica, determine la rapidez del bloque cuando $t = 6$ s. Ignore la fricción y la masa de las poleas y cuerdas.



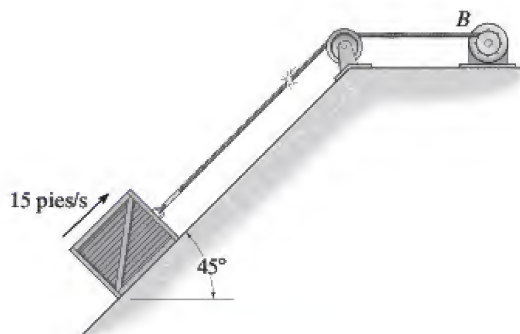
Prob. 15-21

15-23. Las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ varían como se muestra en la gráfica. El disco liso de 5 kg se mueve hacia la izquierda a 3 m/s cuando $t = 0$. Determine la magnitud y dirección de su velocidad cuando $t = 4$ s.



Prob. 15-23

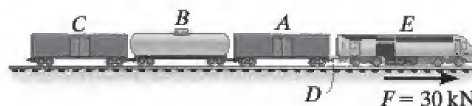
15-22. En el instante en que el cable se rompe, el embalaje de 200 lb se desplaza hacia arriba a 15 pies/s. Determine su rapidez 2 s después. El coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y el plano es $\mu_k = 0.20$.



Prob. 15-22

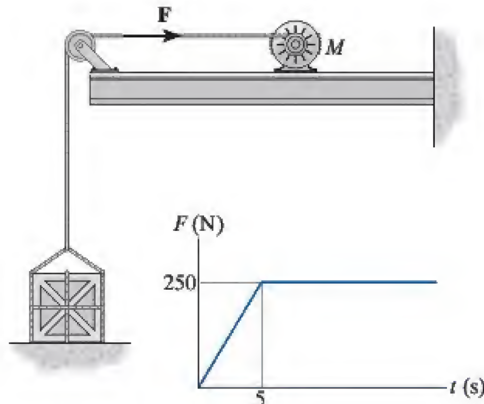
****15-24.** En una partícula de 0.5 kg actúa una fuerza $\mathbf{F} = \{2t^2\mathbf{i} - (3t + 3)\mathbf{j} + (10 - t^2)\mathbf{k}\}$ N, donde t está en segundos. Si la velocidad inicial de la partícula es $\mathbf{v}_0 = \{5\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 20\mathbf{k}\}$ m/s, determine la magnitud de su velocidad cuando $t = 3$ s.

•**15-25.** El tren se compone de una máquina E de 30 Mg y de los carros A, B y C, cuya masa es de 15 Mg, 10 Mg y 8 Mg, respectivamente. Si las vías proporcionan una fuerza de tracción de $F = 30$ kN en las ruedas de la máquina, determine la rapidez del tren cuando $t = 30$ s, a partir del punto de reposo. Además, determine la fuerza de acoplamiento horizontal en D entre la máquina E y el carro A. Ignore la resistencia al rodamiento.



Prob. 15-25

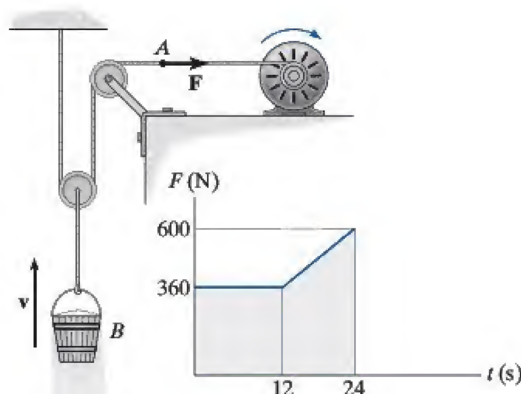
15-26. El motor M jala el cable con una fuerza **F**, cuya magnitud varía como se muestra en la gráfica. Si el embalaje de 20 kg originalmente está descansando en el suelo de modo que la tensión en el cable es cero en el instante en que se echa a andar el motor, determine la rapidez del embalaje cuando $t = 6$ s. *Sugerencia:* primero determine el tiempo necesario para empezar a alzar el embalaje.



Prob. 15-26

15-27. El malacate genera una fuerza de tensión horizontal **F** en su cable A el cual varía como se muestra en la gráfica. Determine la rapidez de la cubeta de 70 kg cuando $t = 18$ s. Originalmente la cubeta se mueve hacia arriba a $v_1 = 3$ m/s.

***15-28.** El malacate genera una fuerza de tensión horizontal **F** en su cable A el cual varía como se muestra en la gráfica. Determine la rapidez de la cubeta de 80 kg cuando $t = 24$ s. Originalmente la cubeta comienza a moverse desde el punto de reposo.



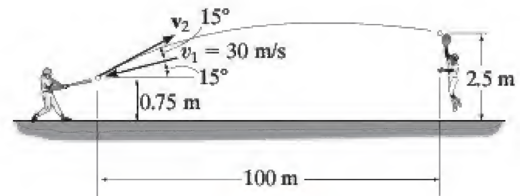
Probs. 15-27/28

•15-29. La pelota de golf de 0.1 lb recibe el golpe del palo y entonces vuela a lo largo de la trayectoria mostrada. Determine la fuerza impulsora promedio que el palo imparte a la pelota si aquél se mantiene en contacto con ésta durante 0.5 ms.



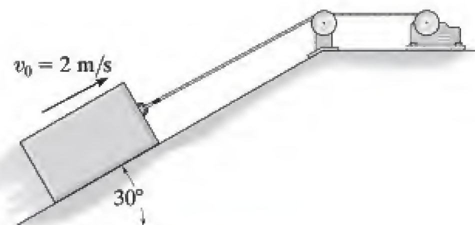
Prob. 15-29

15-30. La pelota de béisbol de 0.15 kg tiene una rapidez $v = 30$ m/s justo antes de que el bate la golpee. Entonces vuela a lo largo de la trayectoria mostrada antes de que el jardinero la atrape. Determine la magnitud de la fuerza impulsora promedio impartida a la pelota si está en contacto con el bate durante 0.75 ms.



Prob. 15-30

15-31. La combinación de motor y cable que se muestra en la figura sube el bloque de 50 kg por el plano inclinado. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es $\mu_k = 0.4$. Si el bloque inicialmente se mueve hacia arriba por el plano a $v_0 = 2$ m/s y en este instante ($t = 0$) el motor desarrolla una tensión en la cuerda de $T = (300 + 120\sqrt{t})$ N, donde t está en segundos, determine la velocidad del bloque cuando $t = 2$ s.



Prob. 15-31

15





El martillo de la fotografía superior aplica una fuerza impulsora a la estaca. Durante este tiempo de contacto extremadamente corto, el peso de la estaca puede considerarse no impulsor y siempre que ésta se hinque en suelo blando, el impulso de éste al actuar en la estaca también puede considerarse no impulsor. En contraste, si se utiliza la estaca en un rompepavimentos, entonces dos fuerzas impulsoras actúan en la estaca, una en su extremo superior, producida por el rompepavimentos, y la otra en su parte inferior debido a la rigidez del concreto.

15

15.3 Conservación de la cantidad de movimiento lineal de un sistema de partículas

Cuando la suma de los *impulsos externos* que actúan en un sistema de partículas es *cero*, la ecuación 15-6 se reduce a una forma simplificada, a saber,

$$\Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_1 = \Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_2 \tag{15-8}$$

Esta ecuación se conoce como la *conservación de la cantidad de movimiento lineal*. Establece que la cantidad de movimiento lineal total de un sistema de partículas permanece constante durante el lapso de tiempo t_1 a t_2. Si sustituimos $m\mathbf{v}_G = \Sigma m_i \mathbf{v}_i$ en la ecuación 15-8, también podemos escribir

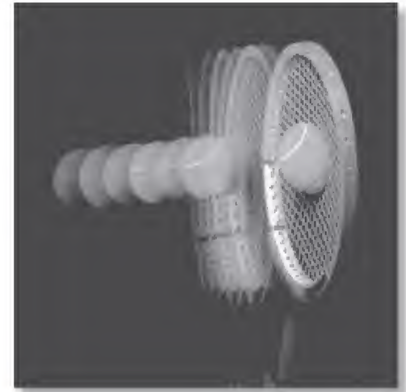
$$(\mathbf{v}_G)_1 = (\mathbf{v}_G)_2 \tag{15-9}$$

la cual indica que la velocidad $\mathbf{v}_G$ del centro de masa del sistema de partículas no cambia si no se aplican impulsos externos al sistema.

La conservación de la cantidad de movimiento lineal se suele aplicar cuando las partículas chocan o interactúan. Para su aplicación, deberá estudiarse con cuidado el diagrama de cuerpo libre de *todo* el sistema de partículas para identificar las fuerzas que crean o impulsos internos o externos para determinar así en qué dirección(es) se conserva la cantidad de movimiento lineal. Como se estableció antes, los *impulsos internos* del sistema siempre se eliminan, puesto que se presentan en pares colineales iguales pero opuestos. Si el lapso de tiempo durante el cual se estudia el movimiento es *muy corto*, algunos de los impulsos externos también pueden ser ignorados o considerados aproximadamente iguales a cero. Las fuerzas que producen estos impulsos insignificantes se llaman *fuerzas no impulsoras*. Por comparación, las fuerzas que son muy grandes y que actúan durante un lapso de tiempo muy corto producen un cambio significativo de la cantidad de movimiento y se llaman *fuerzas impulsoras*. Desde luego, no se pueden omitir en el análisis del impulso-cantidad de movimiento.

Por lo común, las fuerzas impulsoras ocurren a causa de la explosión o el choque de un cuerpo con otro, en tanto que las fuerzas no impulsoras pueden incluir el peso de un cuerpo, la fuerza impartida por un resorte levemente deformado de rigidez en cierto modo pequeña, o en cuanto a eso, cualquier fuerza que sea muy pequeña comparada con otras fuerzas (impulsoras) más grandes. Cuando se hace esta distinción entre fuerzas impulsoras y no impulsoras, es importante darse cuenta que ésta sólo aplica durante el tiempo t_1 a t_2. Como ilustración, considere el efecto de golpear una pelota de tenis con una raqueta, como se muestra en la fotografía. Durante el *muy corto* tiempo de interacción, la fuerza de la raqueta en la pelota es impulsora puesto que cambia drásticamente su cantidad de movimiento. Por comparación, el peso de

la pelota tendrá un efecto insignificante en el cambio de la cantidad de movimiento, y por consiguiente es no impulsora. Por consiguiente, puede ser omitida en el análisis de impulso-cantidad de movimiento durante este tiempo. Si se considera un análisis de impulso-cantidad de movimiento durante el tiempo de vuelo mucho más largo después de la interacción raqueta-pelota, entonces el impulso del peso de la pelota es importante, puesto que, junto con la resistencia del aire, hace que cambie la cantidad de movimiento de la pelota.



Procedimiento para el análisis

En general, el principio de impulso y cantidad de movimiento lineales o el de la conservación de la cantidad de movimiento lineal se aplica a un *sistema de partículas* para determinar las velocidades finales de las partículas *justo después* del periodo de tiempo considerado. Al aplicar este principio a todo el sistema, los impulsos internos que actúan dentro del sistema, los cuales pueden ser desconocidos, se *eliminan* del análisis. Para su aplicación se sugiere seguir el siguiente procedimiento.

Diagrama de cuerpo libre.

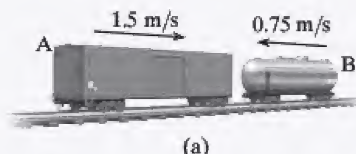
- Establezca el marco de referencia inercial x, y, z y trace el diagrama de cuerpo libre de cada partícula del sistema para identificar las fuerzas internas y externas.
- La conservación de la cantidad de movimiento lineal se aplica al sistema en una dirección donde no hay fuerzas externas o donde las fuerzas pueden ser consideradas no impulsoras.
- Establezca la dirección y sentido de las velocidades inicial y final de las partículas. Si se desconoce el sentido, suponga que es a lo largo de un eje de coordenadas inercial positivo.
- Como un procedimiento alternativo, trace los diagramas de impulso y cantidad de movimiento de cada una de las partículas del sistema.

Ecuaciones de cantidad de movimiento.

- Aplique el principio de impulso y cantidad de movimiento lineales, o el de la conservación de la cantidad de movimiento lineal en las direcciones apropiadas.
- Si es necesario determinar el *impulso interno* $\int F\,dt$ que actúa en sólo una partícula de un sistema, entonces debe *aislarse* la partícula (diagrama de cuerpo libre) y debe aplicarse *a esta partícula* el principio de impulso y cantidad de movimiento lineales.
- Después de que se calcula el impulso y siempre que se conozca el tiempo Δt durante el cual actúa el impulso, entonces la *fuerza impulsora promedio* F_{prom} se determina por $F_{\text{prom}} = \int F\,dt/\Delta t$.

EJEMPLO 15.4

El vagón cerrado A de 15 Mg rueda libremente a 1.5 m/s por la vía horizontal hasta que se encuentra con un carro tanque B de 12 Mg que rueda a 0.75 m/s hacia él, como se muestra en la figura 15-8*a*. Si los dos chocan y se acoplan, determine (a) la rapidez de ambos justo después del acoplamiento y (b) la fuerza promedio entre ellos si el acoplamiento ocurre en 0.8 s.

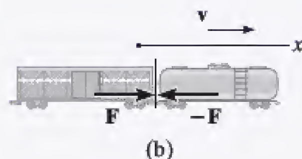


(a)

15

SOLUCIÓN

Parte (a) Diagrama de cuerpo libre.* En este caso consideramos a los *dos*, carro y vagón, como un solo sistema, figura 15-8*b*. Por inspección, la cantidad de movimiento se conserva en la dirección x puesto que la fuerza de acoplamiento $\mathbf{F}$ es *interna* al sistema y por consiguiente se anula. Se supone que los dos, al acoplarse, se mueven a $\mathbf{v}_2$ en la dirección x positiva.



(b)

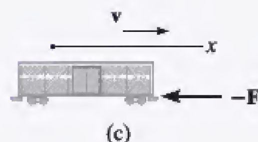
Conservación de la cantidad de movimiento lineal.

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = (m_A + m_B)v_2$$

$$(15\,000\text{ kg})(1.5\text{ m/s}) - 12\,000\text{ kg}(0.75\text{ m/s}) = (27\,000\text{ kg})v_2$$

$$v_2 = 0.5\text{ m/s} \rightarrow \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Parte (b). La fuerza de acoplamiento (impulsora) promedio, $\mathbf{F}_{prom}$ se determina al aplicar el principio de cantidad de movimiento lineal a *cualquiera* de los dos.



(c)

Fig. 15-8

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 15-8*c*, al aislar el vagón cerrado la fuerza de acoplamiento es externa a él.

Principio de impulso y cantidad de movimiento. Como $\int F\,dt = F_{prom}\Delta t = F_{prom}(0.8\text{ s})$, tenemos

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_A)_1 + \Sigma\int F\,dt = m_A v_2$$

$$(15\,000\text{ kg})(1.5\text{ m/s}) - F_{prom}(0.8\text{ s}) = (15\,000\text{ kg})(0.5\text{ m/s})$$

$$F_{prom} = 18.8\text{ kN} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

NOTA: la solución fue posible en este caso puesto que la velocidad final del vagón cerrado se obtuvo en la parte (a). Trate de resolver F_{prom} por el principio de impulso y cantidad de movimiento para el carro tanque.

*En el diagrama de cuerpo libre se muestran sólo las fuerzas horizontales.

EJEMPLO 15.5

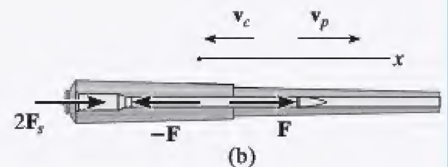
El cañón de 1200 lb de la figura 15-9*a* dispara un proyectil de 8 lb con una velocidad de salida de 1500 pies/s con respecto al suelo. Si el disparo ocurre en 0.03 s, determine (a) la velocidad de retroceso del cañón justo después del disparo y (b) la fuerza impulsora promedio que actúa en el proyectil. El soporte del cañón está fijo en el suelo y el retroceso horizontal del cañón es absorbido por dos resortes.



(a)

SOLUCIÓN

Parte (a) Diagrama de cuerpo libre.* Como se muestra en la figura 15-9*b*, consideraremos el proyectil y el cañón como un solo sistema, puesto que las fuerzas impulsoras, **F**, entre el cañón y el proyectil son *internas* al sistema y por consiguiente se eliminarán del análisis. Además, durante el tiempo $\Delta t = 0.03$ s, cada uno de los dos resortes de retroceso conectados al soporte ejerce una *fuerza no impulsora* $\mathbf{F}_s$ en el cañón. Esto se debe a que Δt es muy corto, de modo que durante este tiempo el cañón sólo recorre una distancia s muy corta. En consecuencia, $F_s = ks \approx 0$, donde k es la rigidez del resorte. Entonces se concluye que la cantidad de movimiento del sistema se conserva en la *dirección horizontal*.



(b)

Conservación de la cantidad de movimiento.

$$(\xrightarrow{+}) \qquad m_c(v_c)_1 + m_p(v_p)_1 = -m_c(v_c)_2 + m_p(v_p)_2$$

$$0 + 0 = -\left(\frac{1200 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(v_c)_2 + \left(\frac{8 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(1500 \text{ pies/s})$$

$$(v_c)_2 = 10 \text{ pies/s} \leftarrow \qquad \textit{Resp.}$$

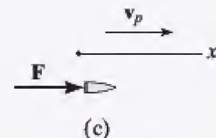
Parte (b). La fuerza impulsora promedio ejercida por el cañón en el proyectil se determina por el principio de impulso y cantidad de movimiento lineales al proyectil (o al cañón). ¿Por qué?

Principio de impulso y cantidad de movimiento. De acuerdo con la figura 15-9*c*, $\int F\,dt = F_{\text{prom}}\Delta t = F_{\text{prom}}(0.03)$, tenemos

$$(\xrightarrow{+}) \qquad m(v_p)_1 + \Sigma\int F\,dt = m(v_p)_2$$

$$0 + F_{\text{prom}}(0.03 \text{ s}) = \left(\frac{8 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(1500 \text{ pies/s})$$

$$F_{\text{prom}} = 12.4(10^3) \text{ lb} = 12.4 \text{ kip} \qquad \textit{Resp.}$$



(c)

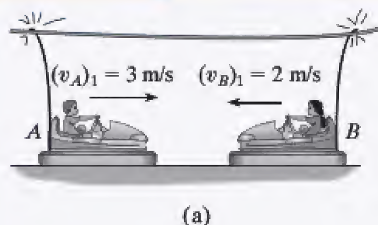
Fig. 15-9

NOTA: si el cañón está firmemente sujeto a su soporte (sin resortes), la fuerza de reacción del soporte en el cañón debe considerarse como un impulso externo al sistema, puesto que el soporte no permite que el cañón se mueva.

*En el diagrama de cuerpo libre se muestran sólo las fuerzas horizontales.

15

EJEMPLO 15.6



(a)

Cada uno de los carros chocones A y B en la figura 15-10a tiene una masa de 150 kg y se mueven libremente a las velocidades que se muestran antes de que choquen de frente. Si no se pierde energía durante la colisión, determine sus velocidades después de la colisión.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Los carros se considerarán como un solo sistema. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 15-10b.

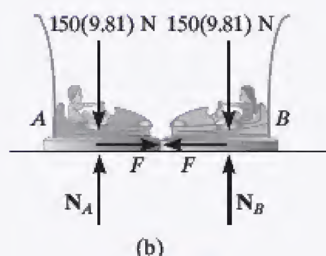
15

Conservación de la cantidad de movimiento.

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2$$

$$(150\text{ kg})(3\text{ m/s}) + (150\text{ kg})(-2\text{ m/s}) = (150\text{ kg})(v_A)_2 + (150\text{ kg})(v_B)_2$$

$$(v_A)_2 = 1 - (v_B)_2 \qquad (1)$$



(b)

Fig. 15-10

Conservación de la energía. Como no se pierde energía, el teorema de la conservación de la energía resulta

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$\frac{1}{2}m_A(v_A)_1^2 + \frac{1}{2}m_B(v_B)_1^2 + 0 = \frac{1}{2}m_A(v_A)_2^2 + \frac{1}{2}m_B(v_B)_2^2 + 0$$

$$\frac{1}{2}(150\text{ kg})(3\text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(150\text{ kg})(2\text{ m/s})^2 + 0 = \frac{1}{2}(150\text{ kg})(v_A)_2^2 + \frac{1}{2}(150\text{ kg})(v_B)_2^2 + 0$$

$$(v_A)_2^2 + (v_B)_2^2 = 13 \qquad (2)$$

Si sustituimos la ecuación (1) en la (2) y simplificamos, obtenemos

$$(v_B)_2^2 - (v_B)_2 - 6 = 0$$

Al resolver las dos raíces,

$$(v_B)_2 = 3\text{ m/s} \qquad \text{y} \qquad (v_B)_2 = -2\text{ m/s}$$

Como $(v_B)_2 = -2$ m/s se refiere a la velocidad de B justo *antes* de la colisión, entonces la velocidad de B justo después de la colisión debe ser

$$(v_B)_2 = 3\text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

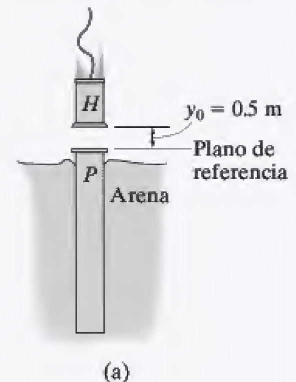
Al sustituir este resultado en la ecuación (1), obtenemos

$$(v_A)_2 = 1 - 3\text{ m/s} = -2\text{ m/s} = 2\text{ m/s} \leftarrow \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 15.7

En la figura 15-11*a* se muestra un pilote rígido de 800 kg que se hinca en el suelo por medio de un martinete de 300 kg. Éste cae desde el punto de reposo a una altura $y_0 = 0.5$ m y golpea la parte superior del pilote. Determine el impulso que el pilote ejerce en el martinete si el pilote está rodeado por completo de arena suelta de modo que después del golpe el martinete *no* rebota del pilote.





(a)

SOLUCIÓN

Conservación de la energía. La velocidad a que el martinete golpea el pilote se determina con la ecuación de la conservación de la energía aplicada al martinete. Con el plano de referencia en el extremo superior del pilote, figura 15-11*a*, tenemos

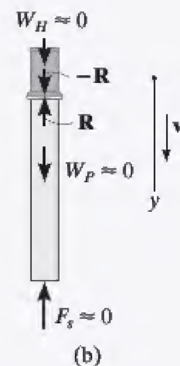
$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$

$$\frac{1}{2}m_H(v_H)_0^2 + W_H y_0 = \frac{1}{2}m_H(v_H)_1^2 + W_H y_1$$

$$0 + 300(9.81)\text{ N}(0.5\text{ m}) = \frac{1}{2}(300\text{ kg})(v_H)_1^2 + 0$$

$$(v_H)_1 = 3.132\text{ m/s}$$

Diagrama de cuerpo libre. Por los aspectos físicos del problema, el diagrama de cuerpo libre del martinete y el pilote, figura 15-11*b*, indica que durante el *corto tiempo* desde *justo antes* hasta *justo después* del *choque*, los pesos del martinete y el pilote y la fuerza de resistencia $\mathbf{F}_s$ de la arena son *no impulsores*. La fuerza impulsora **R** es interna al sistema y por consiguiente se cancela. Por consiguiente, la cantidad de movimiento se conserva en la dirección vertical durante este corto tiempo.



(b)

Conservación de la cantidad de movimiento. Como el martinete no rebota del pilote justo después de la colisión, entonces $(v_H)_2 = (v_P)_2 = v_2$.

$$(+\downarrow) \qquad m_H(v_H)_1 + m_P(v_P)_1 = m_H v_2 + m_P v_2$$

$$(300\text{ kg})(3.132\text{ m/s}) + 0 = (300\text{ kg})v_2 + (800\text{ kg})v_2$$

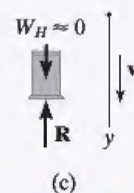
$$v_2 = 0.8542\text{ m/s}$$

Principio de impulso y cantidad de movimiento. Ahora puede determinarse el impulso que el pilote imparte al martinete, puesto que $\mathbf{v}_2$ es conocida. Por el diagrama de cuerpo libre del martinete, figura 15-11*c*, tenemos

$$(+\downarrow) \qquad m_H(v_H)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m_H v_2$$

$$(300\text{ kg})(3.132\text{ m/s}) - \int R\,dt = (300\text{ kg})(0.8542\text{ m/s})$$

$$\int R\,dt = 683\text{ N}\cdot\text{s} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$



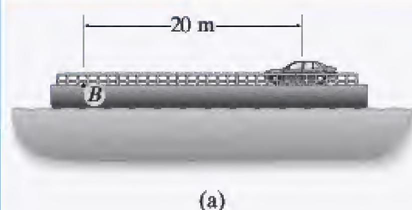
(c)

Fig. 15-11

NOTA: el impulso igual pero opuesto actúa sobre el pilote. Trate de determinarlo al aplicar al pilote el principio del impulso y cantidad de movimiento.

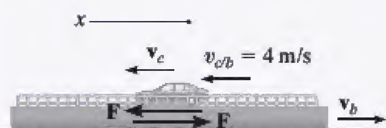
15

EJEMPLO 15.8



(a)

El automóvil de 1.5 Mg de la figura 15-12*a* se desplaza en la barcaza de 10 Mg hacia la izquierda a una rapidez constante de 4 m/s, medida con respecto a la barcaza. Ignore la resistencia del agua y determine la velocidad de la barcaza y su desplazamiento cuando el automóvil llegue al punto *B*. Inicialmente, el automóvil y la barcaza están en reposo con respecto al agua.



(b)

Fig. 15-12

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Si el automóvil y la barcaza se consideran como un solo sistema, la fuerza de tracción entre el automóvil y la barcaza se vuelve interna al sistema y por tanto la cantidad de movimiento se conservará a lo largo del eje *x*, figura 15-12*b*.

Conservación de la cantidad de movimiento. Cuando se escribe la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento es importante que las velocidades se midan con respecto al mismo sistema de coordenadas inercial, que aquí se supone fijo. También supondremos que a medida que el automóvil se desplaza hacia la izquierda la barcaza lo hace hacia la derecha, como se muestra en la figura 15-12*b*.

Al aplicar la conservación de la cantidad de movimiento lineal al sistema de automóvil y barcaza,

$$(\overset{+}{\leftarrow}) \qquad 0 + 0 = m_c v_c - m_b v_b$$

$$0 = (1.5(10^3)\text{ kg})v_c - (10(10^3)\text{ kg})v_b$$

$$1.5v_c - 10v_b = 0 \qquad (1)$$

Cinemática. Como la velocidad del automóvil con respecto a la barcaza se conoce, entonces la velocidad del automóvil y de la barcaza también puede relacionarse con la ecuación de velocidad relativa.

$$(\overset{+}{\leftarrow}) \qquad \mathbf{v}_c = \mathbf{v}_b + \mathbf{v}_{c/b}$$

$$v_c = -v_b + 4\text{ m/s} \qquad (2)$$

Al resolver las ecuaciones (1) y (2),

$$v_b = 0.5217\text{ m/s} = 0.522\text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

$$v_c = 3.478\text{ m/s} \leftarrow$$

El automóvil recorre $s_{c/b} = 20$ m sobre la barcaza a una velocidad relativa constante de 4 m/s. Por tanto, el tiempo para que el automóvil llegue al punto *B* es

$$s_{c/b} = v_{c/b}\, t$$

$$20\text{ m} = (4\text{ m/s})\, t$$

$$t = 5\text{ s}$$

El desplazamiento de la barcaza es, por consiguiente,

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad s_b = v_b t = 0.5217\text{ m/s}(5\text{ s}) = 2.61\text{ m} \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

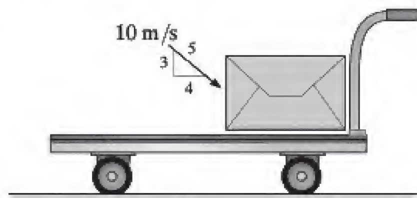
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F15-7. Los carros de carga *A* y *B* tienen una masa de 20 Mg y 15 Mg, respectivamente. Determine la velocidad de *A* después de la colisión si los carros chocan y rebotan, de tal suerte que *B* se desplaza hacia la derecha a una rapidez de 2 m/s. Si *A* y *B* están en contacto durante 0.5 s, determine la fuerza impulsora promedio que actúa entre ellos.



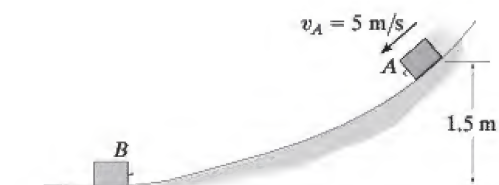
F15-7

F15-8. La carretilla y el paquete tienen una masa de 20 kg y 5 kg, respectivamente. Si la superficie de la carretilla es lisa e inicialmente está en reposo, mientras la velocidad del paquete es la que se muestra, determine la velocidad final común de la carretilla y el paquete después del impacto.



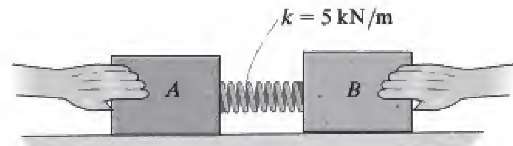
F15-8

F15-9. La rapidez inicial del bloque *A* de 5 kg es de 5 m/s cuando se desliza hacia abajo de la rampa lisa y choca con el bloque estacionario *B* de 8 kg de masa. Si los dos bloques se acoplan después de la colisión, determine su velocidad común inmediatamente después de la colisión.



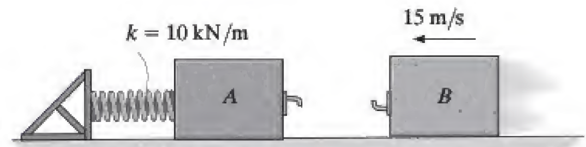
F15-9

F15-10. El resorte está fijo al bloque *A* y el bloque *B* se comprime contra el resorte. Si éste se comprime $s = 200$ mm y luego se sueltan los bloques, determine su velocidad en el instante en que el bloque *B* pierde el contacto con el resorte. Las masas de los bloques *A* y *B* son de 10 kg y 15 kg, respectivamente.



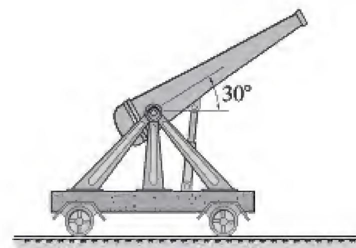
F15-10

F15-11. La masa de los bloques *A* y *B* es de 15 kg y 10 kg, respectivamente. Si *A* está estacionario y *B* tiene una velocidad de 15 m/s justo antes de la colisión, y los bloques se acoplan entre sí después del impacto, determine la compresión máxima del resorte.



F15-11

F15-12. El cañón y su pedestal sin un proyectil tienen una masa de 250 kg. Si se dispara un proyectil de 20 kg con el cañón a una velocidad de 400 m/s, medida *con respecto* al cañón, determine la rapidez del proyectil cuando sale del cañón. Ignore la resistencia al rodamiento.

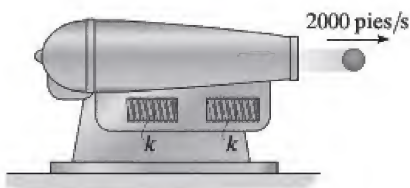


F15-12

15

PROBLEMAS

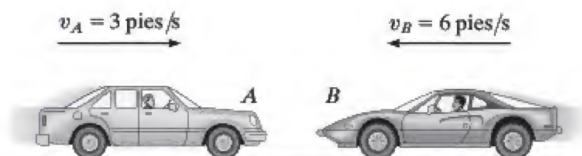
***15-32.** El cañón de 500 lb dispara horizontalmente una bala de 10 lb como se muestra. Si la velocidad de salida de la bala es de 2000 pies/s, medida con respecto al suelo, determine la velocidad de retroceso del cañón justo antes de disparar. Si el cañón descansa sobre una base lisa y tiene que detenerse después de que ha retrocedido una distancia de 6 pulg, determine la rigidez requerida k de los dos resortes idénticos, cada uno de los cuales, en principio, no está alargado.



Prob. 15-32

15-33. Un carro de ferrocarril de 15 Mg de masa rueda libremente a 1.5 m/s sobre una vía horizontal. Al mismo tiempo, otro carro de 12 Mg de masa hace lo mismo a 0.75 m/s en la dirección opuesta. Si los carros se encuentran y acoplan entre sí, determine la rapidez de ambos carros justo después del acoplamiento. Determine la diferencia entre la energía cinética total antes y después del acoplamiento, y explique cuantitativamente lo que le sucedió a esta energía.

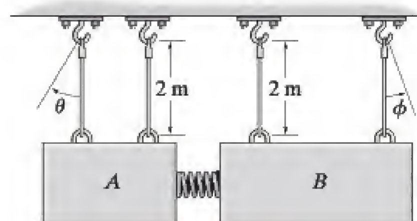
15-34. El automóvil A pesa 4500 lb y viaja hacia la derecha a 3 pies/s. Mientras tanto, un automóvil B de 3000 lb lo hace a 6 pies/s hacia la izquierda. Si los automóviles chocan de frente y se enganchan, determine su velocidad común justo después del choque. Suponga que durante la colisión no se aplican los frenos.



Probs. 15-33/34

15-35. La masa de cada uno de los bloques A y B es de 5 kg y cuelgan de cuerdas paralelas. Un resorte de rigidez $k = 60$ N/m, está sujeto a B y se comprime 0.3 m contra A como se muestra. Determine los ángulos máximos θ y ϕ de las cuerdas después de que los bloques se sueltan del punto de reposo y el resorte regresa a su longitud no alargada.

***15-36.** La masa del bloque A es de 4 kg y la del bloque B es de 6 kg. Un resorte de rigidez $k = 40$ N/m, está sujeto a B y se comprime 0.3 m contra A como se muestra. Determine los ángulos máximos θ y ϕ de las cuerdas después de que los bloques se sueltan del reposo y el resorte regresa a su longitud no alargada.



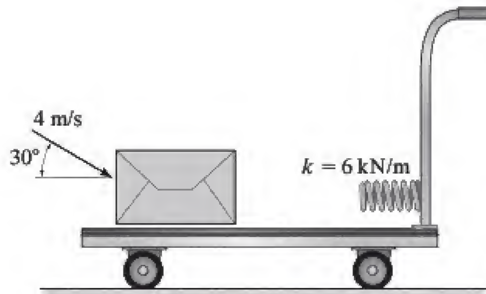
Probs. 15-35/36

•15-37. El malacate en la parte trasera del jeep A se echa a andar y tira de la cuerda a 2 m/s con respecto al jeep. Si tanto el automóvil B de 1.25 Mg como el jeep A de 2.5 Mg ruedan libremente, determine sus velocidades en el momento en que se encuentran. Si la cuerda es de 5 m de largo, ¿qué tanto tiempo se llevará esto?



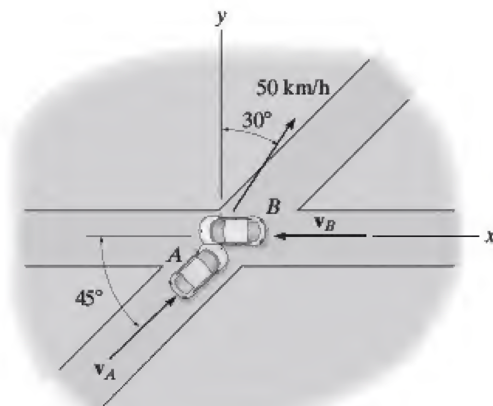
Prob. 15-37

15-38. El paquete de 40 kg se lanza con una rapidez de 4 m/s sobre la carretilla de 20 kg de masa. Si se desliza sobre la superficie lisa y choca con el resorte, determine la velocidad de la carretilla en el momento en que el paquete comprime por completo el resorte. ¿Cuál es la compresión máxima del resorte? Ignore la resistencia al rodamiento de la carretilla.



Prob. 15-38

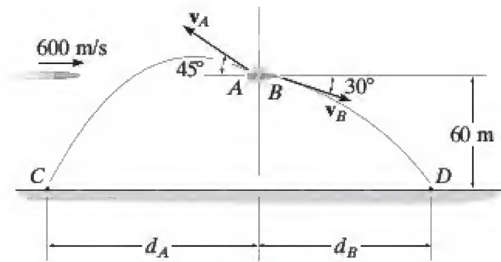
15-39. Dos automóviles A y B, tienen una masa de 2 Mg y 1.5 Mg, respectivamente. Determine las magnitudes de $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ si los automóviles chocan y permanecen en contacto mientras se desplazan con una velocidad común de 50 km/h en la dirección mostrada.



Prob. 15-39

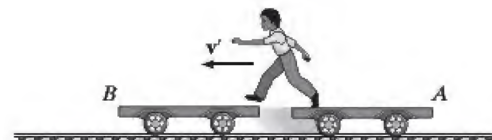
***15-40.** Un proyectil de 4 kg viaja con una velocidad horizontal de 600 m/s antes de que explote y se rompa en dos fragmentos A y B de 1.5 kg y 2.5 kg de masa, respectivamente. Si los fragmentos viajan a lo largo de las trayectorias parabólicas mostradas, determine la magnitud de la velocidad de cada fragmento justo después de la explosión y la distancia horizontal d_A donde el segmento A choca con el suelo en C.

•15-41. Un proyectil de 4 kg viaja con una velocidad horizontal de 600 m/s antes de que explote y se rompa en dos fragmentos A y B de 1.5 kg y 2.5 kg de masa, respectivamente. Si los fragmentos viajan a lo largo de las trayectorias parabólicas mostradas, determine la magnitud de la velocidad de cada fragmento justo después de la explosión y la distancia horizontal d_B donde el segmento B choca con el suelo en D.



Probs. 15-40/41

15-42. El muchacho de 75 kg salta de la carretilla A con una velocidad horizontal de $v' = 3$ m/s medida con respecto a la carretilla. Determine la velocidad de la carretilla A justo después del salto. Si luego cae en la carretilla B con la misma velocidad que cuando dejó la carretilla A, determine la velocidad de la carretilla B justo después de que cae en ella. La masa de las carretillas A y B es de 50 kg y originalmente están en reposo.

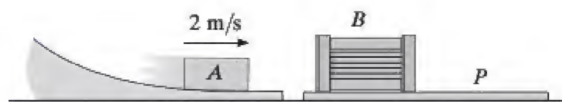


Prob. 15-42

15-43. El bloque A tiene una masa de 2 kg y se desliza hacia el extremo abierto de la caja B con una velocidad de 2 m/s. Si la masa de la caja B es de 3 kg y descansa sobre la placa P cuya masa es de 3 kg, determine la distancia que la placa se mueve después de que deja de deslizarse sobre el piso. Además, ¿cuánto tiempo transcurre después del impacto antes de que cese todo movimiento? El coeficiente de fricción cinética entre la caja y la placa es $\mu_k = 0.2$ y entre la placa y el piso $\mu'_k = 0.4$. Además, el coeficiente de fricción estática entre la placa y el piso es $\mu'_s = 0.5$.

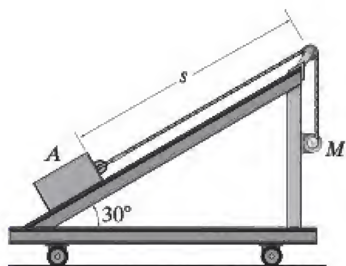
***15-44.** El bloque A tiene una masa de 2 kg y se desliza hacia el extremo abierto de la caja B con una velocidad de 2 m/s. Si la masa de la caja B es de 3 kg y descansa sobre la placa P cuya masa es de 3 kg, determine la distancia que la placa se mueve después de que deja de deslizarse sobre el piso. Además, ¿cuánto tiempo transcurre después del impacto antes de que cese todo movimiento? El coeficiente de fricción cinética entre la caja y la placa es $\mu_k = 0.2$ y entre la placa y el piso $\mu'_k = 0.1$. Además, el coeficiente de fricción estática entre la placa y el piso es $\mu'_s = 0.12$.

15



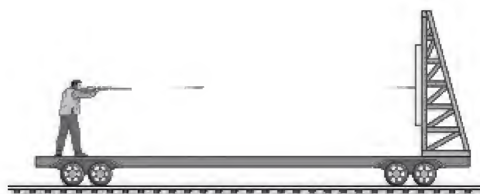
Probs. 15-43/44

•**15-45.** El bloque A de 20 kg es remolcado hacia arriba de la rampa de la carretilla de 40 kg por un motor M montado en un costado de ésta. Si el motor enrolla el cable con una velocidad constante de 5 m/s, medida con respecto a la carretilla, determine qué tan lejos se moverá la carretilla cuando el bloque haya recorrido una distancia $s = 2$ m hacia arriba de la rampa. Tanto el bloque como la carretilla están en reposo cuando $s = 0$. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la rampa es $\mu_k = 0.2$. Ignore la resistencia al rodamiento.



Prob. 15-45

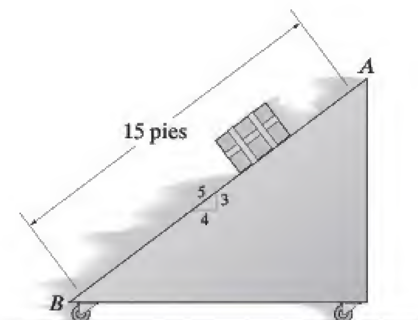
15-46. Si el hombre de 150 lb dispara la bala de 0.2 lb con una velocidad de salida horizontal de 3000 pies/s, medida con respecto al furgón de 600 lb, determine la velocidad de éste justo después del disparo. ¿Cuál es la velocidad del furgón cuando la bala se incrusta en el blanco? Durante el disparo, el hombre permanece en la misma posición en el furgón. Ignore la resistencia al rodamiento del furgón.



Prob. 15-46

15-47. La rampa de rodamiento libre pesa 120 lb. El embalaje cuyo peso es de 80 lb se desliza desde el punto de reposo en A, 15 pies cuesta abajo hasta B. Determine la rapidez de la rampa cuando el embalaje llega a B. Suponga que la rampa es lisa e ignore la masa de las ruedas.

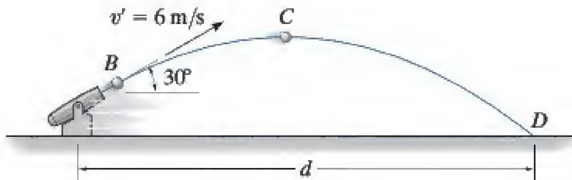
***15-48.** La rampa de rodamiento libre pesa 120 lb. Si el embalaje de 80 lb se suelta desde el punto de reposo en A, determine la distancia que la rampa se mueve cuando el embalaje se desliza 15 pies cuesta abajo por la rampa hasta B.



Probs. 15-47/48

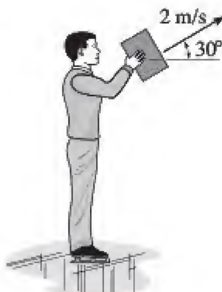
•**15-49.** El cañón de 5 kg accionado por resorte descansa sobre la superficie lisa. Si dispara una bala de 1 kg de masa con una velocidad de $v' = 6$ m/s con respecto al cañón en la dirección mostrada. Si el cañón originalmente está en reposo, determine la distancia horizontal d a que está la bala a partir de la posición inicial del cañón en el instante en que la bala choca con el suelo en D. Ignore el tamaño del cañón.

15-50. El cañón de 5 kg accionado por resorte descansa sobre la superficie lisa. Si dispara una bala de 1 kg de masa con una velocidad de $v' = 6$ m/s con respecto al cañón en la dirección mostrada. Si el cañón originalmente está en reposo, determine la distancia de la bala desde la posición inicial del cañón en el instante en que la bala alcanza su altura máxima C. Ignore el tamaño del cañón.



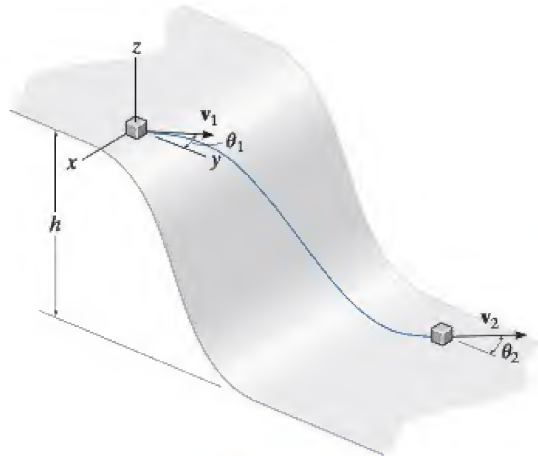
Probs. 15-49/50

15-51. Un hombre que trae puestos patines de hielo lanza un bloque de 8 kg con una velocidad inicial de 2 m/s, medida con respecto a sí mismo, en la dirección mostrada. Si originalmente está en reposo y completa el lanzamiento en 1.5 s mientras mantiene sus piernas rígidas, determine la velocidad horizontal del hombre justo después de que suelta el bloque. ¿Cuál es la reacción vertical de sus patines sobre el hielo durante el lanzamiento? El hombre tiene una masa de 70 kg. Ignore la fricción y el movimiento de sus brazos.



Prob. 15-51

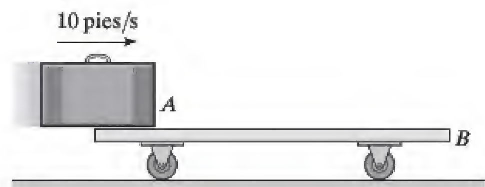
***15-52.** El bloque de masa m se desplaza a v_1 en la dirección θ_1 mostrada en la parte alta de la pendiente lisa. Determine su rapidez v_2 y su dirección θ_2 cuando llega abajo.



Prob. 15-52

•**15-53.** La carretilla B de 20 lb está apoyada en rodillos de tamaño insignificante. Si se lanza horizontalmente una maleta A de 10 lb sobre la carretilla a 10 pies/s cuando está en reposo, determine el tiempo durante el cual A se desliza con respecto a B y la velocidad final de A y B. El coeficiente de fricción cinética entre A y B es $\mu_k = 0.4$.

15-54. La carretilla B de 20 lb está apoyada en rodillos de tamaño insignificante. Si se lanza horizontalmente una maleta A de 10 lb sobre la carretilla a 10 pies/s cuando está en reposo, determine el tiempo t y la distancia que B recorre en el instante en que A se detiene con respecto a B. El coeficiente de fricción cinética entre A y B es $\mu_k = 0.4$.



Probs. 15-53/54

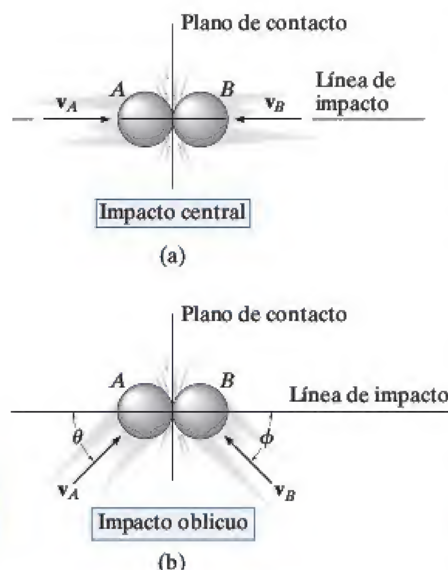


Fig. 15-13

15

15.4 Impacto

El *impacto* ocurre cuando dos cuerpos chocan entre sí durante un periodo muy *corto*, lo que hace que se ejerzan fuerzas (impulsoras) relativamente grandes entre los cuerpos. El golpe de un martillo sobre un clavo, o un palo de golf sobre una bola, son ejemplos comunes de cargas de impacto.

Por lo general, hay dos tipos de impacto. El *impacto central* ocurre cuando la dirección del movimiento de los centros de masa de las dos partículas va a lo largo de una línea que pasa a través de los centros de masa de las partículas. Esta línea se llama *línea de impacto*, la cual es perpendicular al plano de contacto, figura 15-13*a*. Cuando el movimiento de una o de las dos partículas forma un ángulo con la línea de impacto, figura 15-13*b*, se dice que el impacto es un *impacto oblicuo*.

Impacto central. Para ilustrar el método de analizar la mecánica del impacto, considere el caso que implica el impacto central de las partículas A y B que se muestran en la figura 15-14.

- Las partículas tienen los momentos iniciales que se muestran en la figura 15-14*a*. Siempre que $(v_A)_1 > (v_B)_1$, eventualmente ocurrirá la colisión.
- Durante la colisión las partículas deben considerarse como *deformables* o no rígidas. Las partículas experimentarán un *periodo de deformación* de modo que ejercen un impulso de deformación igual y opuesto $\int \mathbf{P}\, dt$ entre sí, figura 15-14*b*.
- Sólo en el instante de *deformación máxima* ambas partículas se desplazarán con una velocidad constante $\mathbf{v}$, puesto que su movimiento relativo es cero, figura 15-14*c*.
- Después de un *periodo de restitución*, las partículas recuperarán su forma original o permanecerán permanentemente deformadas. El *impulso de restitución* $\int \mathbf{R}\, dt$ igual pero opuesto separa las partículas, figura 15-14*d*. En realidad, las propiedades físicas de cualquiera de los dos cuerpos son tales que el impulso de deformación *siempre será mayor* que el de restitución, es decir $\int P\, dt > \int R\, dt$.
- Justo después de la separación las partículas tendrán las cantidades de movimiento mostradas en la figura 15-14*e*, donde $(v_B)_2 > (v_A)_2$.

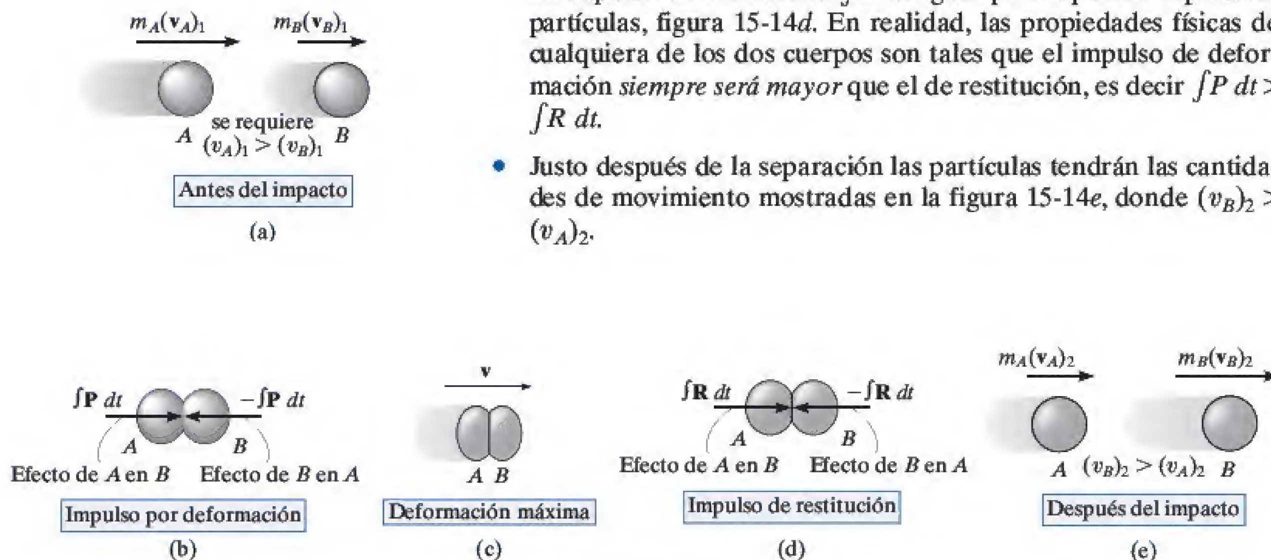


Fig. 15-14

En la mayoría de los problemas las velocidades iniciales de las partículas serán *conocidas*, y será necesario determinar sus velocidades finales $(v_A)_2$ y $(v_B)_2$. A este respecto, la *cantidad de movimiento* del *sistema de partículas* se *conserva* puesto que durante la colisión los impulsos internos de deformación y restitución *se cancelan*. Por consiguiente, al remitirnos a las figuras 15-14*a* y 15-14*e* requerimos

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2 \qquad (15\text{-}10)$$

Para obtener una segunda ecuación necesaria para resolver $(v_A)_2$ y $(v_B)_2$, debemos aplicar el principio de impulso y cantidad de movimiento a *cada partícula*. Por ejemplo, durante la fase de deformación de la partícula A, figuras 15-14*a*, 15-14*b* y 15-14*c*, tenemos

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_A)_1 - \int P\,dt = m_A v$$

Para la fase de restitución, figuras 15-14*c*, 15-14*d* y 15-14*e*,

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m_A v - \int R\,dt = m_A(v_A)_2$$

La relación del impulso de restitución al impulso de deformación se llama *coeficiente de restitución*, e. De acuerdo con las ecuaciones anteriores, este valor para la partícula A es

$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} = \frac{v - (v_A)_2}{(v_A)_1 - v}$$

Asimismo, podemos establecer e si consideramos la partícula B, figura 15-14. Esto resulta en

$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} = \frac{(v_B)_2 - v}{v - (v_B)_1}$$

Si se elimina la incógnita v de las dos ecuaciones anteriores, el coeficiente de restitución puede expresarse en función de las velocidades inicial y final de las partículas como

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1} \qquad (15\text{-}11)$$

15



La calidad de fabricación de una pelota de tenis se mide por la altura de su rebote, la cual puede relacionarse con su coeficiente de restitución. Por medio de la mecánica del impacto oblicuo, los ingenieros pueden diseñar un dispositivo de separación para eliminar las pelotas que están por debajo del estándar de una línea de producción.

15

Siempre que se especifica un valor para e, las ecuaciones 15-10 y 15-11 pueden resolverse simultáneamente para obtener $(v_A)_2$ y $(v_B)_2$. Sin embargo, para ello es importante establecer con cuidado una convención de signos para definir la dirección positiva tanto de $\mathbf{v}_A$ como de $\mathbf{v}_B$ y luego utilizarla *consistentemente* cuando se escriban *ambas* ecuaciones. Como se vio en la aplicación mostrada, e indicada simbólicamente por la flecha entre paréntesis, definimos la dirección positiva hacia la derecha cuando se refiere a los movimientos tanto de A como de B. Por consiguiente, si en la solución de $(v_A)_2$ o $(v_B)_2$ resulta un valor negativo, ello indica que el movimiento es hacia la izquierda.

Coeficiente de restitución. De acuerdo con las figuras 15-14a y 15-14e, se ve que la ecuación 15-11 establece que e es igual a la relación de la velocidad relativa de la separación de las partículas *justo después del impacto*, $(v_B)_2 - (v_A)_2$ a la velocidad relativa de aproximación de las partículas *justo antes del impacto*, $(v_A)_1 - (v_B)_1$. Al medir estas velocidades relativas de manera experimental, se ha visto que e varía apreciablemente con la velocidad de impacto así como también con el tamaño y forma de los cuerpos que chocan. Por eso el coeficiente de restitución es confiable sólo cuando se utiliza con datos que representen con fidelidad las condiciones que se sabía existían cuando se tomaron las mediciones. Por lo general, e tiene un valor entre cero y uno, y debemos estar al tanto del significado físico de estos dos límites.

Impacto elástico (e = 1). Si la colisión entre las dos partículas es *perfectamente elástica*, el impulso de deformación $\left(\int \mathbf{P}\,dt\right)$ es igual y opuesto al impulso de restitución $\left(\int \mathbf{R}\,dt\right)$. Aun cuando en realidad esto nunca puede ser, $e = 1$ en el caso de una colisión elástica.

Impacto plástico (e = 0). Se dice que el impacto es *inelástico o plástico* cuando $e = 0$. En tal caso no hay impulso de restitución $\left(\int \mathbf{R}\,dt = \mathbf{0}\right)$, por lo que después de la colisión ambas partículas se acoplan o *permanecen en contacto* y se mueven con una velocidad común.

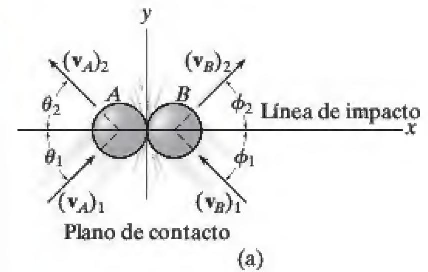
Por la derivación anterior es evidente que no puede utilizarse el principio de trabajo y energía en el análisis de problemas de impacto ya que no es posible saber cómo varían o se desplazan las *fuerzas internas* de deformación y restitución durante la colisión. Sin embargo, al conocer las velocidades de las partículas antes y después de la colisión, la pérdida de energía durante la colisión se calcula como la diferencia de la energía cinética de las partículas. Esta pérdida de energía, $\Sigma U_{1-2} = \Sigma T_2 - \Sigma T_1$ ocurre porque una parte de la energía cinética de la partícula se transforma en energía térmica y porque también genera ruido y una deformación localizada del material cuando ocurre la colisión. En particular, si el impacto es *perfectamente elástico*, no se pierde energía en la colisión; mientras que si es *plástico*, la pérdida de energía durante la colisión es máxima.

Procedimiento para el análisis (Impacto central)

En la mayoría de los casos se tienen que determinar las *velocidades finales* de las dos partículas *justo después* de que se someten a un impacto central directo. Siempre que se conozcan el coeficiente de restitución, la masa y la velocidad inicial de cada partícula *justo antes* del impacto, la solución de este problema se obtiene mediante las dos siguientes ecuaciones:

- La conservación de la cantidad de movimiento es aplicable al sistema de partículas, $\Sigma m v_1 = \Sigma m v_2$.
- El coeficiente de restitución, $e = [(v_B)_2 - (v_A)_2]/[(v_A)_1 - (v_B)_1]$, relaciona las velocidades relativas de las partículas a lo largo de la línea de impacto, justo antes y después de la colisión.

Cuando se aplican estas dos ecuaciones, puede suponerse el sentido de una velocidad desconocida. Si la solución da una magnitud negativa, la velocidad actúa en el sentido opuesto.



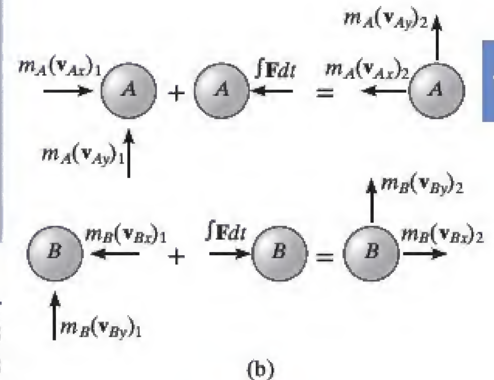


Fig. 15-15

Impacto oblicuo. Cuando entre dos partículas ocurre un impacto oblicuo, éstas se apartan una de otra con velocidades de direcciones y magnitudes desconocidas. Siempre que se conozcan las velocidades iniciales, habrá cuatro incógnitas en el problema. Como se muestra en la figura 15-15*a*, estas incógnitas pueden representarse o como $(v_A)_2$, $(v_B)_2$, θ_2 y ϕ_2, o como los componentes *x* y *y* de las velocidades finales.

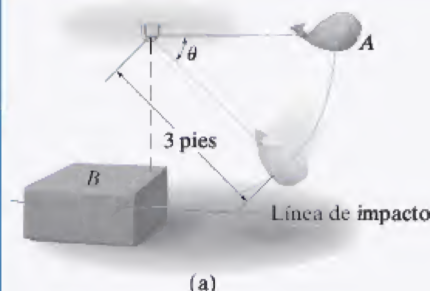
Procedimiento para el análisis (Impacto oblicuo)

Si el eje *y* se establece dentro del plano de contacto y el eje *x* a lo largo de la línea de impacto, las fuerzas impulsoras de deformación y restitución actúan *sólo en la dirección x*, figura 15-15*b*. Al descomponer la velocidad o los vectores de cantidad de movimiento en componentes a lo largo de los ejes *x* y *y*, figura 15-15*b*, entonces es posible escribir cuatro ecuaciones escalares independientes para determinar $(v_{Ax})_2, (v_{Ay})_2, (v_{Bx})_2$ y $(v_{By})_2$.

- La cantidad de movimiento del sistema se conserva *a lo largo de la línea de impacto*, eje *x*, de modo que $\Sigma m(v_x)_1 = \Sigma m(v_x)_2$.
- El coeficiente de restitución $e = [(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2]/[(v_{Ax})_1 - (v_{Bx})_1]$, relaciona los *componentes* de las velocidades relativas de las partículas *a lo largo de la línea de impacto* (eje *x*).
- Si estas dos ecuaciones se resuelven simultáneamente, obtenemos $(v_{Ax})_2$ y $(v_{Bx})_2$.
- La cantidad de movimiento de la partícula *A* se conserva a lo largo del eje *y*, perpendicular a la línea de impacto, puesto que no actúa ningún impulso en la partícula *A* en esta dirección. Por consiguiente $m_A(v_{Ay})_1 = m_A(v_{Ay})_2$ o $(v_{Ay})_1 = (v_{Ay})_2$.
- La cantidad de movimiento de la partícula *B* se conserva a lo largo del eje *y*, perpendicular a la línea de impacto, puesto que no actúa ningún impulso en la partícula *B* en esta dirección. Por consiguiente $(v_{By})_1 = (v_{By})_2$.

La aplicación de estas cuatro ecuaciones se ilustra en el ejemplo 15.11.

EJEMPLO 15.9



(a)

La bolsa A, que pesa 6 lb, se suelta del punto de reposo en la posición $\theta = 0°$, como se muestra en la figura 15-16*a*. Después de que cae a $\theta = 90°$, choca con la caja B que pesa 18 lb. Si el coeficiente de restitución entre la bolsa y la caja es $e = 0.5$, determine las velocidades de la bolsa y la caja justo después del impacto. ¿Cuál es la pérdida de energía durante la colisión?

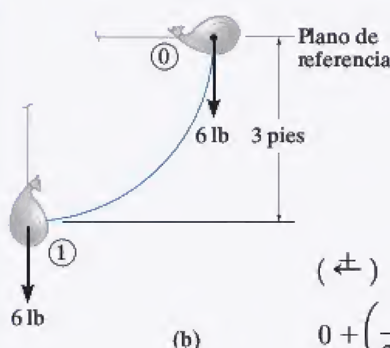
SOLUCIÓN

Este problema implica impacto central. ¿Por qué? Antes de analizar la mecánica del impacto, primero se requiere obtener la velocidad de la bolsa *justo antes* de que choque con la caja.

Conservación de la energía. Con el plano de referencia en $\theta = 0°$, figura 15-16*b*, tenemos

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$

$$0 + 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{6\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}\right)(v_A)_1^2 - 6\text{ lb}(3\text{ pies});\quad (v_A)_1 = 13.90\text{ pies/s}$$



(b)

Conservación de la cantidad de movimiento. Después del impacto supondremos que A y B se desplazan a la izquierda. Si aplicamos la conservación de la cantidad de movimiento al sistema, figura 15-16*c*, tenemos

$$(\overset{+}{\leftarrow})\qquad m_B(v_B)_1 + m_A(v_A)_1 = m_B(v_B)_2 + m_A(v_A)_2$$

$$0 + \left(\frac{6\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}\right)(13.90\text{ pies/s}) = \left(\frac{18\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}\right)(v_B)_2 + \left(\frac{6\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}\right)(v_A)_2$$

$$(v_A)_2 = 13.90 - 3(v_B)_2 \qquad (1)$$

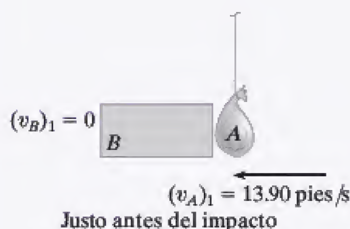
Coeficiente de restitución. Al darnos cuenta de que para que ocurra la separación después de la colisión $(v_B)_2 > (v_A)_2$, figura 15-16*c*, tenemos

$$(\overset{+}{\leftarrow})\qquad e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1};\quad 0.5 = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{13.90\text{ pies/s} - 0}$$

$$(v_A)_2 = (v_B)_2 - 6.950 \qquad (2)$$

Al resolver las ecuaciones 1 y 2 simultáneamente se obtiene

$(v_A)_2 = -1.74\text{ pies/s} = 1.74\text{ pies/s} \rightarrow$ y $(v_B)_2 = 5.21\text{ pies/s} \leftarrow$ ***Resp.***



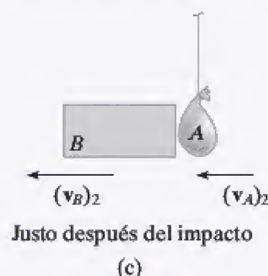
Justo antes del impacto

Pérdida de energía. Al aplicar el principio de trabajo y energía a la bolsa y la caja justo antes y después de la colisión, tenemos

$$\Sigma U_{1-2} = T_2 - T_1;$$

$$\Sigma U_{1-2} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{18\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}\right)(5.21\text{ pies/s})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{6\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}\right)(1.74\text{ pies/s})^2\right] - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{6\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}\right)(13.9\text{ pies/s})^2\right]$$

$$\Sigma U_{1-2} = -10.1\text{ pies}\cdot\text{lb} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$



Justo después del impacto

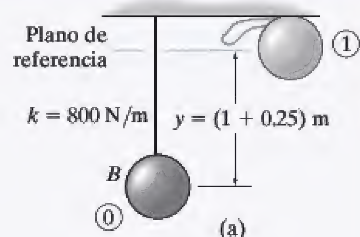
(c)

Fig. 15-16

NOTA: la pérdida de energía ocurre debido a la deformación inelástica durante la colisión.

EJEMPLO 15.10

La bola B de la figura 15-17a tiene una masa de 1.5 kg y cuelga del techo por medio de una cuerda elástica de 1 m de largo. Si la cuerda se *estira* hacia abajo 0.25 m y la bola se suelta del punto de reposo, determine cuánto se alarga la cuerda después de que la bola rebota en el techo. La rigidez de la cuerda es $k = 800$ N/m y el coeficiente de restitución es $e = 0.8$. La bola experimenta un impacto central con el techo.



SOLUCIÓN

Primero debemos obtener la velocidad de la bola *justo antes* de que golpee el techo por medio de métodos de energía y considerar en seguida el impulso y la cantidad de movimiento entre la bola y el techo, y por último utilizar de nuevo métodos de energía para determinar el alargamiento de la cuerda.

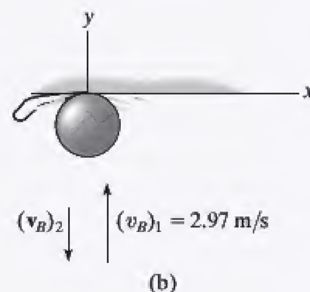
Conservación de la energía. Con el plano de referencia situado como se muestra en la figura 15-17a, y habida cuenta de que inicialmente $y = y_0 = (1 + 0.25)$ m $= 1.25$ m, tenemos

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$

$$\tfrac{1}{2}m(v_B)_0^2 - W_By_0 + \tfrac{1}{2}ks^2 = \tfrac{1}{2}m(v_B)_1^2 + 0$$

$$0 - 1.5(9.81)\text{N}(1.25\text{ m}) + \tfrac{1}{2}(800\text{ N/m})(0.25\text{ m})^2 = \tfrac{1}{2}(1.5\text{ kg})(v_B)_1^2$$

$$(v_B)_1 = 2.968\text{ m/s}\uparrow$$



Ahora se considerará la interacción de la bola con el techo mediante los principios de impacto.* Como una parte desconocida de la masa del techo interviene en el impacto, la conservación de la cantidad de movimiento del sistema bola-techo no se escribirá. La "velocidad" de esta parte del techo es cero ya que se supone que él (o la Tierra) permanece en reposo antes y después del impacto.

Coeficiente de restitución. Figura 15-17b.

$$(+\uparrow)\quad e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1};\qquad 0.8 = \frac{(v_B)_2 - 0}{0 - 2.968\text{ m/s}}$$

$$(v_B)_2 = -2.374\text{ m/s} = 2.374\text{ m/s}\downarrow$$

Conservación de la energía. El alargamiento máximo s_3 en la cuerda se determina al aplicar de nuevo la ecuación de conservación de la energía a la bola justo después de la colisión. Suponga que $y = y_3 = (1 + s_3)$ m, figura 15-17c, entonces

$$T_2 + V_2 = T_3 + V_3$$

$$\tfrac{1}{2}m(v_B)_2^2 + 0 = \tfrac{1}{2}m(v_B)_3^2 - W_By_3 + \tfrac{1}{2}ks_3^2$$

$$\tfrac{1}{2}(1.5\text{ kg})(2.37\text{ m/s})^2 = 0 - 9.81(1.5)\text{ N}(1\text{ m} + s_3) + \tfrac{1}{2}(800\text{ N/m})s_3^2$$

$$400s_3^2 - 14.715s_3 - 18.94 = 0$$

Al resolver esta ecuación cuadrática para la raíz positiva se obtiene

$$s_3 = 0.237\text{ m} = 237\text{ mm}$$ ***Resp.***

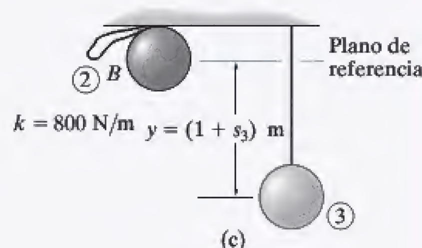
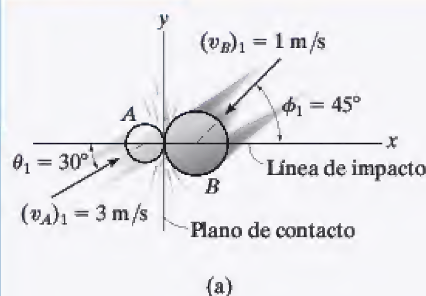


Fig. 15-17

*El peso de la bola se considera como una fuerza no impulsora.

15

EJEMPLO 15.11



(a)

Dos discos lisos A y B de 1 kg y 2 kg de masa, respectivamente, chocan a las velocidades que se muestran en la figura 15-18*a*. Si su coeficiente de restitución es $e = 0.75$, determine los componentes x y y de la velocidad final de cada disco justo después de la colisión.

SOLUCIÓN

Este problema implica *impacto oblicuo*. ¿Por qué? Para resolverlo, establecimos los ejes x y y a lo largo de la línea de impacto y del plano de contacto, respectivamente, figura 15-18*a*.

Al descomponer cada una de las velocidades iniciales en componentes x y y, tenemos

$$(v_{Ax})_1 = 3\cos 30° = 2.598 \text{ m/s} \qquad (v_{Ay})_1 = 3 \operatorname{sen} 30° = 1.50 \text{ m/s}$$

$$(v_{Bx})_1 = -1\cos 45° = -0.7071 \text{ m/s} \quad (v_{By})_1 = -1 \operatorname{sen} 45° = -0.7071 \text{ m/s}$$

Se *supone* que los cuatro componentes de velocidad desconocidos *actúan en las direcciones positivas*, figura 15-18*b*. Como el impacto ocurre en la dirección x (línea de impacto), la conservación de la cantidad de movimiento de *ambos* discos se aplica en esta dirección. ¿Por qué?

(b)

Conservación de la cantidad de movimiento en la dirección "x". Si nos remitimos a los diagramas de cantidad de movimiento, tenemos

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_{Ax})_1 + m_B(v_{Bx})_1 = m_A(v_{Ax})_2 + m_B(v_{Bx})_2$$

$$1 \text{ kg}(2.598 \text{ m/s}) + 2 \text{ kg}(-0.707 \text{ m/s}) = 1 \text{ kg}(v_{Ax})_2 + 2 \text{ kg}(v_{Bx})_2$$

$$(v_{Ax})_2 + 2(v_{Bx})_2 = 1.184 \qquad (1)$$

Coeficiente de restitución (x).

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad e = \frac{(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2}{(v_{Ax})_1 - (v_{Bx})_1}; \quad 0.75 = \frac{(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2}{2.598 \text{ m/s} - (-0.7071 \text{ m/s})}$$

$$(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2 = 2.479 \qquad (2)$$

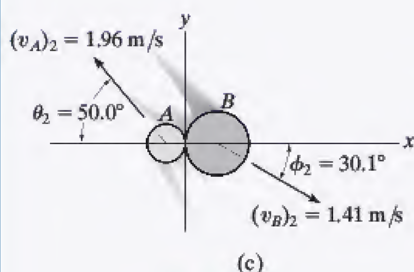
Al resolver las ecuaciones 1 y 2 para $(v_{Ax})_2$ y $(v_{Bx})_2$ se obtiene

$$(v_{Ax})_2 = -1.26 \text{ m/s} = 1.26 \text{ m/s} \leftarrow \qquad (v_{Bx})_2 = 1.22 \text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

Conservación de la cantidad de movimiento en la dirección "y". La cantidad de movimiento de *cada disco* se *conserva* en la dirección y (plano de contacto), puesto que los discos son lisos y por consiguiente en esta dirección *no* actúa ningún impulso externo. De la figura 15-18*b*,

$$(+\uparrow) \quad m_A(v_{Ay})_1 = m_A(v_{Ay})_2; (v_{Ay})_2 = 1.50 \text{ m/s}\uparrow \qquad \textit{Resp.}$$

$$(+\uparrow) \quad m_B(v_{By})_1 = m_B(v_{By})_2; (v_{By})_2 = -0.707 \text{ m/s} = 0.707 \text{ m/s}\downarrow \qquad \textit{Resp.}$$



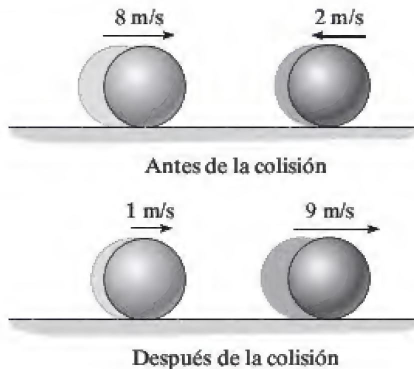
(c)

Fig. 15-18

NOTA: demuestre que cuando se suman los componentes de velocidad verticalmente, se obtienen los resultados mostrados en la figura 15-18*c*.

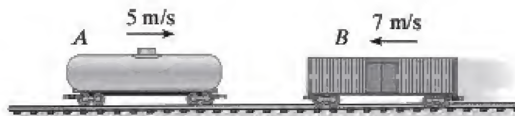
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F15-13. Determine el coeficiente de restitución e entre la bola A y bola B. Se muestran las velocidades de A y B antes y después de la colisión.



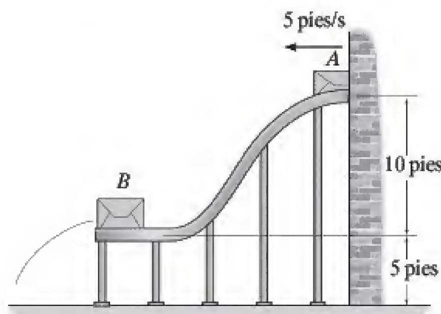
F15-13

F15-14. El carro tanque A de 15 Mg y el vagón de carga B de 25 Mg viajan uno hacia el otro a las velocidades mostradas. Si el coeficiente de restitución entre los parachoques es $e = 0.6$, determine la velocidad de cada carro justo después de la colisión.



F15-14

F15-15. La rapidez del paquete A de 30 lb es de 5 pies/s cuando entra a la rampa lisa. Cuando resbala hacia abajo de la rampa, choca con el paquete B de 80 lb, el cual inicialmente está en reposo. Si el coeficiente de restitución entre A y B es $e = 0.6$, determine la velocidad de B justo después del impacto.



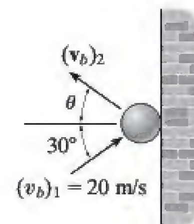
F15-15

F15-16. Los bloques A y B pesan 5 lb y 10 lb, respectivamente. Después de chocar con el bloque B, el A se desliza 2 pulg a la derecha y B 3 pulg a la derecha. Si el coeficiente de fricción cinética entre los bloques y la superficie es $\mu_k = 0.2$, determine el coeficiente de restitución entre los bloques. El bloque B originalmente está en reposo.



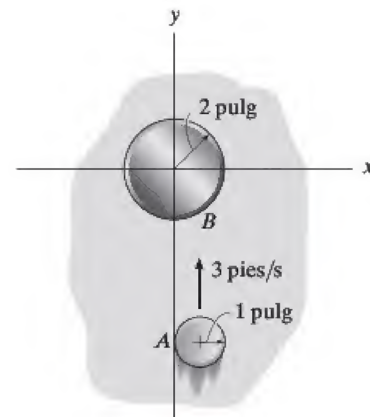
F15-16

F15-17. La bola choca con la pared lisa con una velocidad de $(v_b)_1 = 20$ m/s. Si el coeficiente de restitución entre la bola y la pared es $e = 0.75$, determine la velocidad de la bola justo después del impacto.



F15-17

F15-18. El disco A pesa 2 lb y se desliza sobre el plano horizontal liso a 3 pies/s. El disco B pesa 11 lb e inicialmente está en reposo. Si después del impacto la velocidad de A es de 1 pie/s, paralela al eje positivo x, determine la velocidad del disco B después del impacto.



F15-18

15

PROBLEMAS

15-55. Una bola A de 1 lb viaja horizontalmente a 20 pies/s cuando choca con un bloque B de 10 lb que está en reposo. Si el coeficiente de restitución entre A y B es $e = 0.6$ y el coeficiente de fricción cinética entre el plano y el bloque es $\mu_k = 0.4$, determine el tiempo para que el bloque B deje de deslizarse.

***15-56.** Una bola A de 1 lb viaja horizontalmente a 20 pies/s cuando choca con un bloque B de 10 lb que está en reposo. Si el coeficiente de restitución entre A y B es $e = 0.6$ y el coeficiente de fricción cinética entre el plano y el bloque es $\mu_k = 0.4$, determine la distancia que el bloque B se desliza sobre el plano antes de que deje de deslizarse.

15

•15-57. La masa de cada una de las tres bolas es m. Si la rapidez de A es v justo antes de una colisión directa con B, determine la rapidez de C después de la colisión. El coeficiente de restitución entre cada bola es e. Ignore el tamaño de cada bola.



Prob. 15-57

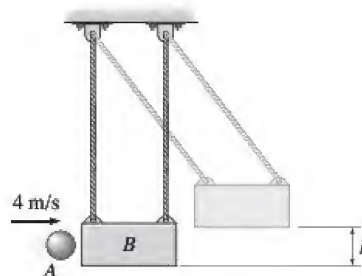
15-58. La maleta A de 15 lb se suelta del reposo en C. Después de deslizarse hacia debajo de la rampa lisa, choca con la maleta B de 10 lb, la cual originalmente está en reposo. Si el coeficiente de restitución entre las maletas es $e = 0.3$ y el coeficiente de fricción cinética entre el suelo DE y cada maleta es $\mu_k = 0.4$, determine (a) la velocidad de A justo antes del impacto, (b) las velocidades de A y B justo después del impacto y (c) la distancia que B se desliza antes de detenerse.



Prob. 15-58

15-59. La bola de 2 kg se lanza al bloque de 20 kg suspendido con una velocidad de 4 m/s. Si el coeficiente de restitución entre la bola y el bloque es $e = 0.8$, determine la altura máxima h a la cual oscilará el bloque antes de detenerse momentáneamente.

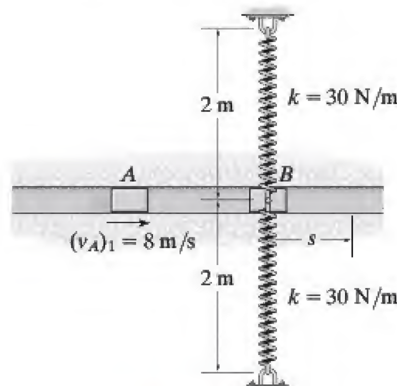
***15-60.** La bola de 2 kg se lanza al bloque de 20 kg suspendido con una velocidad de 4 m/s. Si el tiempo del impacto entre la bola y el bloque es de 0.005 s, determine la fuerza normal promedio ejercida en el bloque durante este tiempo. Considere $e = 0.8$.



Probs. 15-59/60

•15-61. El bloque corredizo B está confinado a moverse dentro de la ranura lisa. Está conectado a dos resortes, cada uno de los cuales tiene una rigidez de $k = 30$ N/m. Originalmente están alargados 0.5 m cuando $s = 0$, como se muestra. Determine la distancia máxima, $s_{máx}$ que el bloque B se mueve después de que el bloque A lo golpea, el cual originalmente se movía a $(v_A)_1 = 8$ m/s. Considere $e = 0.4$ y que la masa de cada bloque es de 1.5 kg.

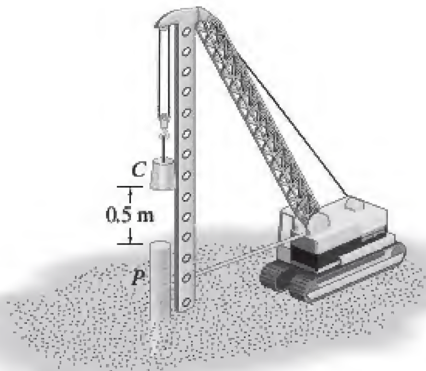
15-62. En el problema 15-61, determine la fuerza neta promedio entre los bloques A y B durante el impacto si éste ocurre en 0.005 s.



Probs. 15-61/62

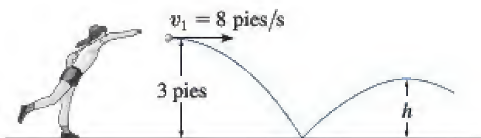
15-63. El pilote P tiene una masa de 800 kg y se hincará en *arena suelta* por medio del martinete C de 300 kg, el cual se deja caer desde una distancia de 0.5 m del extremo superior del pilote. Determine la rapidez inicial del pilote justo después de ser golpeado por el martinete. El coeficiente de restitución entre el martinete y el pilote es $e = 0.1$. Ignore los impulsos provocados por los pesos del pilote y el martinete y el impulso creado por la arena durante el impacto.

***15-64.** El pilote P tiene una masa de 800 kg y se hincará en *arena suelta* por medio del martinete C de 300 kg, el cual se deja caer desde una distancia de 0.5 m del extremo superior del pilote. Determine la profundidad a que el pilote se hincará en la arena después de un golpe, si la arena ofrece una resistencia de fricción contra el pilote de 18 kN. El coeficiente de restitución entre el martinete y el pilote es $e = 0.1$. Ignore los impulsos provocados por los pesos del pilote y el martinete, y el impulso creado por la arena durante el impacto.



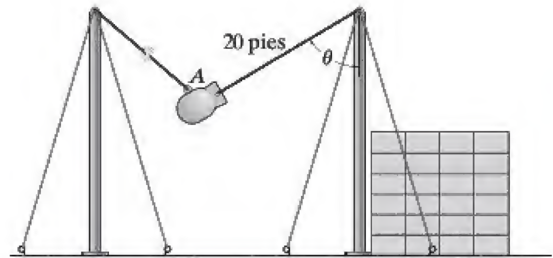
Probs. 15-63/64

•**15-65.** La muchacha lanza la pelota con una velocidad horizontal de $v_1 = 8$ pies/s. Si el coeficiente de restitución entre la pelota y el suelo es $e = 0.8$, determine (a) la velocidad de la pelota justo después de que rebota en el suelo y (b) la altura máxima a la que la pelota se eleva después del primer rebote.



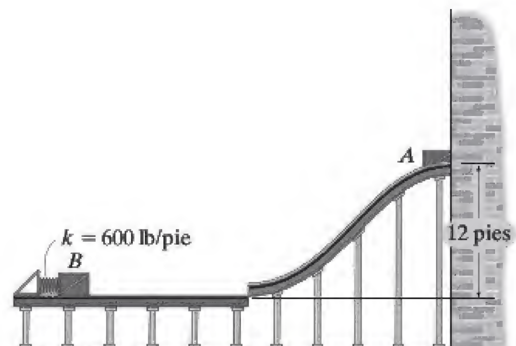
Prob. 15-65

15-66. Durante una prueba de impacto, la pesa de 2000 lb se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 60°$. Oscila hacia abajo y golpea los bloques de concreto, rebota y oscila hacia arriba hasta $\theta = 15°$ antes de detenerse momentáneamente. Determine el coeficiente de restitución entre la pesa y los bloques. Además, determine el impulso transferido entre la pesa y los bloques durante el impacto. Suponga que los bloques no se mueven después del impacto.



Prob. 15-66

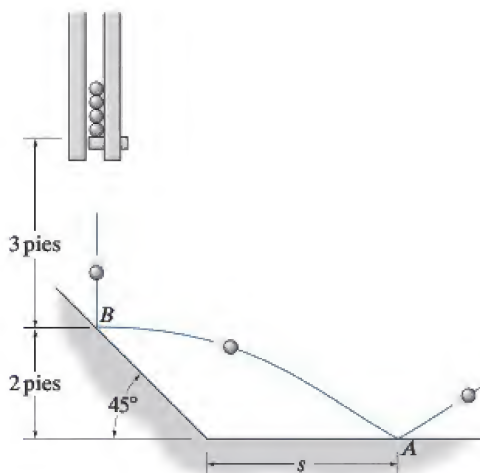
15-67. El embalaje A de 100 lb se suelta desde el punto de reposo sobre la rampa lisa. Después de resbalar cuesta abajo choca con el embalaje B de 200 lb apoyado contra el resorte de rigidez $k = 600$ lb/pie. Si el coeficiente de restitución entre los embalajes es $e = 0.5$, determine sus velocidades justo después del impacto. Además, ¿cuál es la compresión máxima del resorte? El resorte originalmente no está alargado.



Prob. 15-67

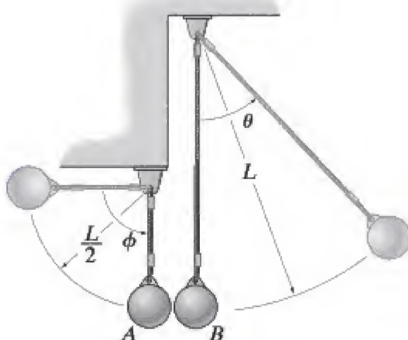
***15-68.** Una pelota tiene una masa m y se deja caer sobre una superficie desde una altura h. Si el coeficiente de restitución entre la pelota y la superficie es e, determine el tiempo que se requiere para que la pelota deje de rebotar.

•15-69. Para probar las propiedades de fabricación de bolas de acero de 2 lb, cada bola se deja caer desde el punto de reposo como se muestra y choca con la superficie lisa inclinada 45°. Si el coeficiente de restitución tiene que ser $e = 0.8$, determine a qué distancia s choca la bola con el plano horizontal en A. ¿A qué rapidez choca la bola con el punto A?



Prob. 15-69

15-70. Dos bolas idénticas A y B de masa m se cuelgan de cuerdas de longitud $L/2$ y L, respectivamente. La bola A se suelta del punto de reposo cuando $\phi = 90°$ y oscila hacia abajo a $\phi = 0°$, donde choca con B. Determine la rapidez de cada bola justo después del impacto y el ángulo máximo θ al que B oscilará. El coeficiente de restitución entre las bolas es e.



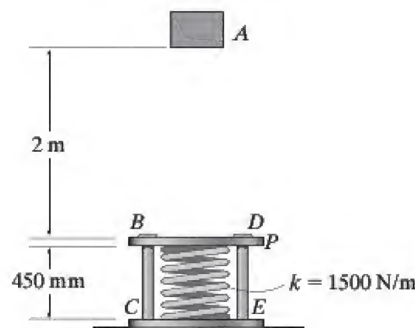
Prob. 15-70

15-71. El camión de 5 Mg y el automóvil de 2 Mg viajan a las velocidades de rodamiento libre que se indican justo antes de que choquen. Después de la colisión el automóvil se desplaza a 15 km/h a la derecha *con respecto al* camión. Determine el coeficiente de restitución entre el camión y el automóvil y la pérdida de energía a causa de la colisión.



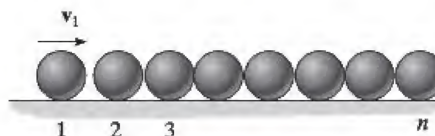
Prob. 15-71

***15-72.** El bloque A de 10 kg se suelta desde el punto de reposo a 2 m por encima de la placa P de 5 kg, la que puede deslizarse libremente a lo largo de las guías verticales lisas BC y DE. Determine la velocidad del bloque y la placa justo después del impacto. El coeficiente de restitución entre el bloque y la placa es $e = 0.75$. Además, determine la compresión máxima del resorte por el impacto. La longitud no alargada del resorte es de 600 mm.



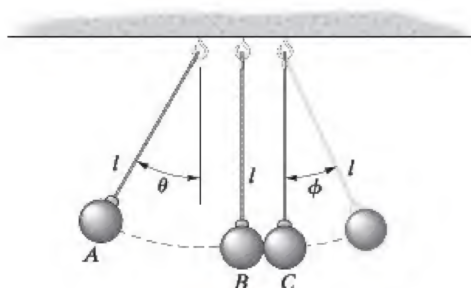
Prob. 15-72

•15-73. Se coloca una fila de n esferas semejantes, cada una de masa m, una junto a la otra como se muestra. Si la esfera 1 tiene una velocidad de v_1, determine la velocidad de la esfera *enésima* justo después de ser golpeada por la esfera $(n - 1)$ adyacente. El coeficiente de restitución entre las esferas es e.



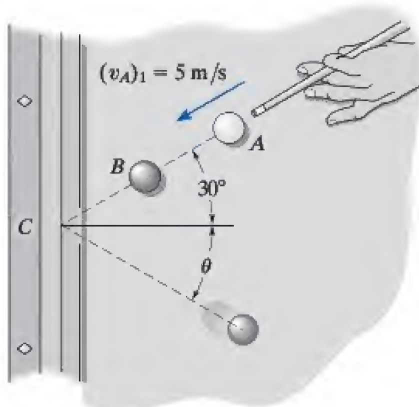
Prob. 15-73

15-74. Cada una de las tres bolas tiene una masa m. Si A se suelta del reposo a un ángulo θ, determine el ángulo ϕ al cual se eleva C después de la colisión. El coeficiente de restitución entre cada bola es e.



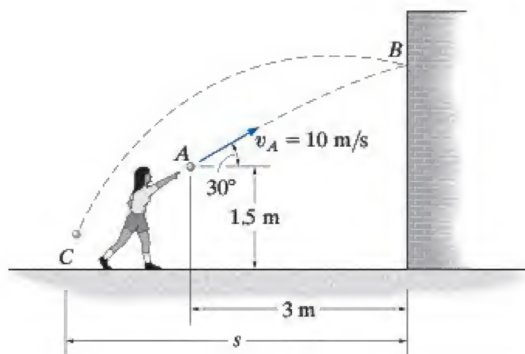
Prob. 15-74

15-75. A la bola blanca A se le confiere una velocidad inicial de $(v_A)_1 = 5$ m/s. Si choca directamente con la bola B ($e = 0.8$), determine la velocidad de B y el ángulo θ justo después de que rebota en la banda en C ($e' = 0.6$). Cada bola tiene una masa de 0.4 kg. Ignore el tamaño de cada bola.



Prob. 15-75

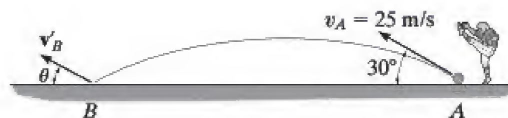
***15-76.** La muchacha lanza la pelota de 0.5 kg hacia la pared con una velocidad inicial $v_A = 10$ m/s. Determine (a) la velocidad a que la pelota choca con la pared en B, (b) a qué velocidad rebota en la pared si el coeficiente de restitución $e = 0.5$, y (c) la distancia s desde la pared hasta donde choca con el suelo en C.



Prob. 15-76

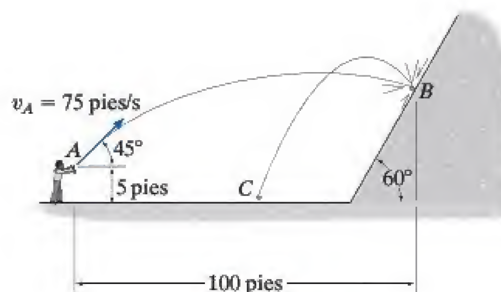
15

•**15-77.** Se patea un balón de 300 g con una velocidad de $v_A = 25$ m/s en el punto A como se muestra. Si el coeficiente de restitución entre el balón y el campo es $e = 0.4$, determine la magnitud y dirección θ de la velocidad del balón al rebotar en B.



Prob. 15-77

15-78. Con una resortera, el muchacho lanza una canica de 0.2 lb hacia el muro de concreto, y le pega en B. Si el coeficiente de restitución entre la canica y el muro es $e = 0.5$, determine la rapidez de la canica después de rebotar en el muro.

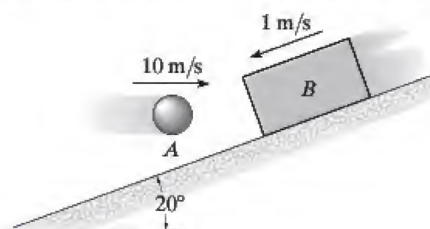


Prob. 15-78

15-79. Se lanza la bola de 2 kg, de modo que viaje horizontalmente a 10 m/s cuando choca con el bloque de 6 kg al deslizarse éste cuesta abajo por el plano inclinado a 1 m/s. Si el coeficiente de restitución entre la bola y el bloque es $e = 0.6$, determine la rapidez de la bola y la del bloque justo después del impacto. Además, ¿qué distancia se desliza B hacia arriba del plano antes de detenerse momentáneamente? El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es $\mu_k = 0.4$.

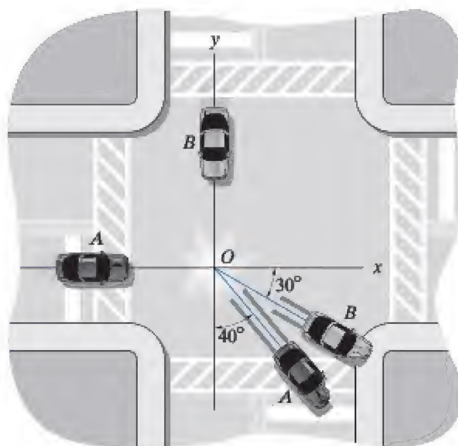
***15-80.** Se lanza la bola de 2 kg de modo que viaje horizontalmente a 10 m/s cuando choca con el bloque de 6 kg al deslizarse éste cuesta abajo por el plano inclinado a 1 m/s. Si el coeficiente de restitución entre la bola y el bloque es $e = 0.6$, y el impacto ocurre en 0.006 s, determine la fuerza impulsora promedio entre la bola y el bloque.

15



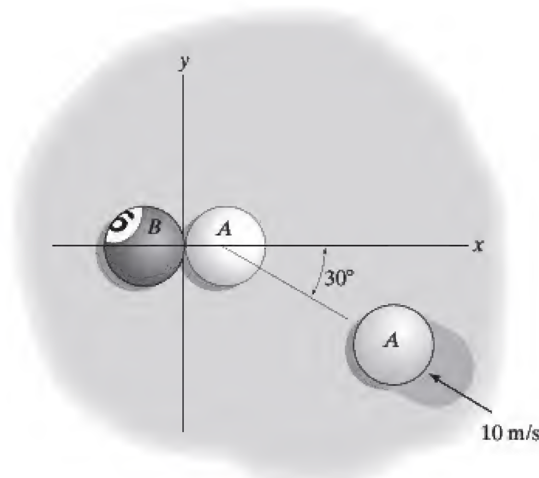
Probs. 15-79/80

•**15-81.** Cada uno de los dos automóviles A y B pesa 4000 lb y chocan en el pavimento helado de una intersección. La dirección del movimiento de cada automóvil después de la colisión se mide con respecto a las huellas en la nieve como se muestra. Si el conductor del automóvil A declara que iba a 44 pies/s (30 mi/h) justo antes de la colisión y que después aplicó los frenos de modo que su automóvil patinó 10 pies antes de detenerse, determine la rapidez aproximada del automóvil B justo antes de la colisión. Suponga que el coeficiente de fricción cinética entre las ruedas del automóvil y el pavimento es $\mu_k = 0.15$. *Nota:* la línea de impacto no se ha definido; sin embargo, esta información no se requiere para la solución.



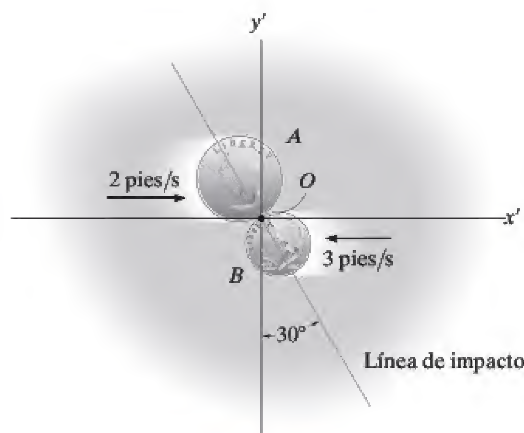
Prob. 15-81

15-82. La bola de "pool" A se desplaza a una velocidad de 10 m/s justo antes de golpear la bola B, la cual está en reposo. Si las masas de A y B son de 200 g y el coeficiente de restitución entre ellas es $e = 0.8$, determine la velocidad de las dos bolas justo después del impacto.



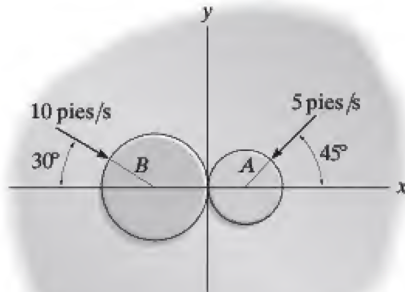
Prob. 15-82

15-83. Las dos monedas A y B tienen las velocidades iniciales que se ilustran justo antes de que choquen en el punto O. Si sus pesos son $W_A = 13.2(10^{-3})$lb y $W_B = 6.60(10^{-3})$lb y la superficie sobre la cual se deslizan es lisa, determine sus velocidades justo después del impacto. El coeficiente de restitución es $e = 0.65$.



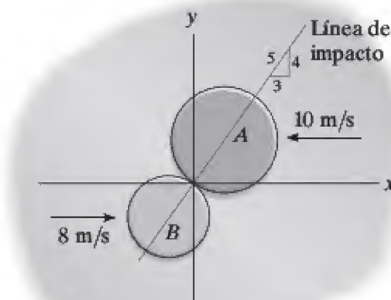
Prob. 15-83

***15-84.** Dos discos A y B pesan 2 lb y 5 lb, respectivamente. Si se deslizan sobre la superficie horizontal plana con las velocidades mostradas, determine sus velocidades justo después del impacto. El coeficiente de restitución entre los discos es $e = 0.6$.



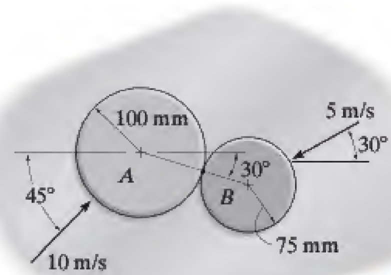
Prob. 15-84

•15-85. Los discos A y B tienen una masa de 15 kg y 10 kg, respectivamente. Si se deslizan sobre un plano horizontal liso con las velocidades que se muestran, determine sus velocidades justo después del impacto. El coeficiente de restitución entre ellos es $e = 0.8$.



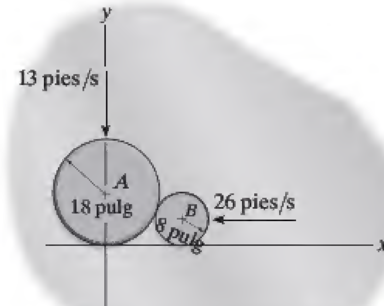
Prob. 15-85

15-86. Los discos A y B tienen una masa de 6 kg y 4 kg, respectivamente. Si se deslizan sobre un plano horizontal liso con las velocidades mostradas, determine sus velocidades justo después del impacto. El coeficiente de restitución entre ellos es $e = 0.6$.



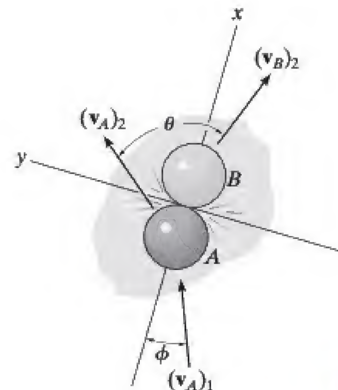
Prob. 15-86

15-87. Los discos A y B pesan 8 lb y 2 lb, respectivamente. Si se deslizan sobre un plano horizontal liso con las velocidades que se muestran, determine sus velocidades justo después del impacto. El coeficiente de restitución entre ellos es $e = 0.5$.



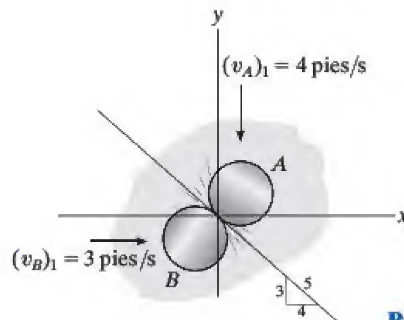
Prob. 15-87

***15-88.** La bola A choca con la bola B con una velocidad inicial de $(\mathbf{v}_A)_1$ como se muestra. Si las dos bolas tienen la misma masa y la colisión es perfectamente elástica, determine el ángulo θ después de la colisión. La bola B originalmente está en reposo. Ignore el tamaño de cada bola.



Prob. 15-88

•15-89. Cada uno de los dos discos A y B pesa 2 lb y las velocidades iniciales que se muestran justo antes de que choquen. Si el coeficiente de restitución es $e = 0.5$, determine sus velocidades justo después del impacto.



Prob. 15-89

15.5 Cantidad de movimiento angular

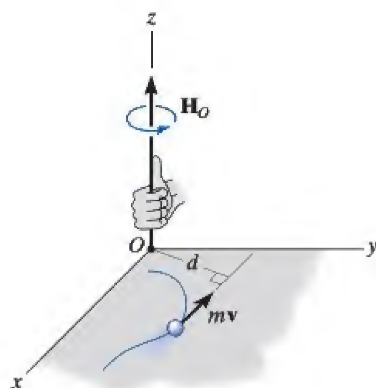


Fig. 15-19

La *cantidad de movimiento angular* de una partícula con respecto a un punto O se define como el "momento" de la cantidad de movimiento lineal de la partícula con respecto a O. Como este concepto es análogo a determinar el momento de una fuerza con respecto a un punto, la cantidad de movimiento angular, $\mathbf{H}_O$, en ocasiones se conoce como el *momento de cantidad de movimiento.*

Formulación escalar. Si una partícula se mueve a lo largo de una curva situada en el plano x–y, figura 15-19, la cantidad de movimiento angular en cualquier instante se determina con respecto al punto O (en realidad el eje z) por medio de una formulación escalar. La *magnitud* de $\mathbf{H}_O$ es

$$(H_O)_z = (d)(mv) \tag{15-12}$$

Aquí, d es el brazo de momento o distancia perpendicular de O a la línea de acción de $m\mathbf{v}$. Unidades comunes para $(H_O)_z$ son $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ o $\text{slug} \cdot \text{pie}^2/\text{s}$. La *dirección* de $\mathbf{H}_O$ se define por medio de la regla de la mano derecha. Como se muestra, la curva de los dedos de la mano derecha indica el sentido de rotación de $m\mathbf{v}$ con respecto a O, de modo que en este caso el pulgar (o $\mathbf{H}_O$) está dirigido perpendicular al plano x–y a lo largo del eje z.

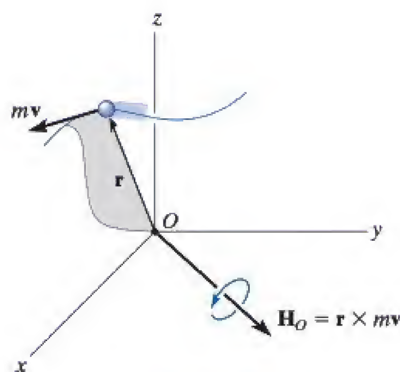


Fig. 15-20

Formulación vectorial. Si la partícula se mueve a lo largo de una curva espacial, figura 15-20, el producto vectorial (o producto cruz) puede utilizarse para determinar la *cantidad de movimiento angular* con respecto a O. En este caso

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \tag{15-13}$$

Aquí, $\mathbf{r}$ denota un vector de posición trazado del punto O a la partícula. Como se muestra en la figura, $\mathbf{H}_O$ es *perpendicular* al plano sombreado que contiene $\mathbf{r}$ y $m\mathbf{v}$.

Para evaluar el producto vectorial, $\mathbf{r}$ y $m\mathbf{v}$ deberán expresarse en función de sus componentes cartesianos, de modo que la cantidad de movimiento angular se determina al evaluar el determinante:

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \tag{15-14}$$

15.6 Relación entre el momento de una fuerza y la cantidad de movimiento angular

Los momentos con respecto al punto O de todas las fuerzas que actúan en la partícula de la figura 15-21*a* pueden relacionarse con su cantidad de movimiento angular al aplicar la ecuación de movimiento. Si la masa de la partícula es constante, podemos escribir

$$\Sigma \mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}$$

Los momentos de las fuerzas con respecto al punto O se obtienen mediante una multiplicación de producto vectorial en ambos lados de esta ecuación por el vector de posición $\mathbf{r}$, el cual se mide con respecto al marco de referencia inercial x, y, z. Tenemos

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}}$$

Según el apéndice B, la derivada de $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ se escribe como

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}}$$

El primer término del lado derecho, $\dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} = m(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}$, puesto que el producto vectorial de un vector por sí mismo es cero. Por consiguiente, la ecuación anterior se escribe

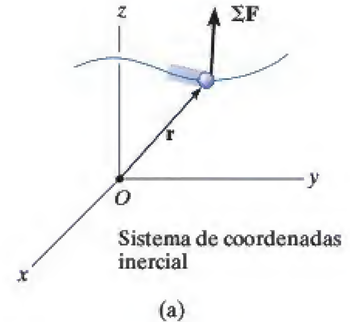
$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \qquad (15\text{-}15)$$

la cual establece que *el momento resultante con respecto al punto O de todas las fuerzas que actúan en la partícula es igual al cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento angular con respecto al punto O*. Este resultado es semejante a la ecuación 15-1, es decir,

$$\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \qquad (15\text{-}16)$$

Aquí $\mathbf{L} = m\mathbf{v}$, de modo que *la fuerza resultante que actúa en la partícula es igual al cambio con respecto de su cantidad de movimiento lineal.*

Por las derivaciones, se ve que las ecuaciones 15-15 y 15-16 en realidad son otra forma de formular la segunda ley del movimiento de Newton. En otras secciones de este libro se demostrará que estas ecuaciones tienen muchas aplicaciones prácticas cuando se amplían y aplican a problemas que incluyen un sistema de partículas o un cuerpo rígido.



(a)

Fig. 15-21

Sistema de partículas. Puede derivarse una ecuación con la misma forma que la ecuación 15-15 para el sistema de partículas que se muestra en la figura 15-21*b*. Las fuerzas que actúan en la partícula iésima arbitraria del sistema son una *fuerza externa* resultante $\mathbf{F}_i$ y una *fuerza interna* resultante $\mathbf{f}_i$. Al expresar los momentos de estas fuerzas con respecto al punto O y con la ecuación 15-15, tenemos

$$(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) = (\dot{\mathbf{H}}_i)_O$$

Aquí $(\dot{\mathbf{H}}_i)_O$ es el cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento angular de la partícula iésima con respecto al punto O. Pueden escribirse ecuaciones similares para cada una de las demás partículas del sistema. Cuando los resultados se suman vectorialmente, el resultado es

$$\Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + \Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) = \Sigma(\dot{\mathbf{H}}_i)_O$$

El segundo término es cero puesto que las fuerzas internas ocurren en pares colineales iguales pero opuestos y, por consiguiente, el momento de cada par con respecto al punto O es cero. Si no se aplica la notación indexada, la ecuación anterior se escribe en forma simplificada como

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{15-17}$$

la cual establece que *la suma de los momentos con respecto al punto O de todas las fuerzas externas que actúan en un sistema de partículas es igual al cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento angular total del sistema con respecto al punto O*. Aunque O se eligió en este caso como el origen de las coordenadas, en realidad puede representar cualquier *punto fijo* en el marco de referencia inercial.

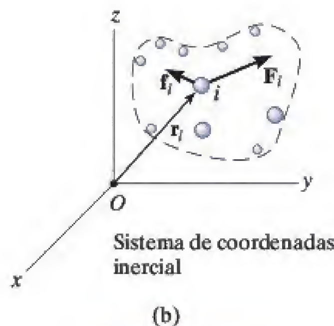


Fig. 15-21 (cont.)

EJEMPLO 15.12

La caja de la figura 15-22*a* tiene una masa *m* y desciende por la rampa circular lisa de modo que cuando está en el ángulo θ su rapidez es v. Determine su cantidad de movimiento angular con respecto al punto *O* en este instante y la tasa de incremento de su rapidez, es decir, a_t.

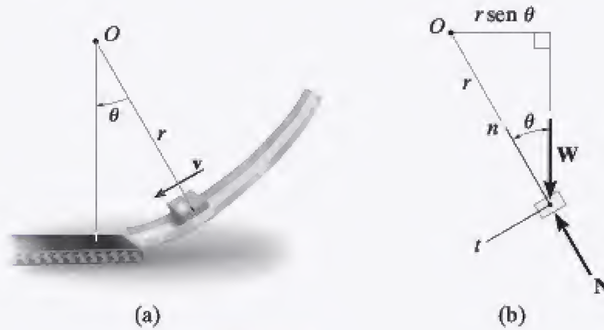


Fig. 15-22

SOLUCIÓN

Como **v** es tangente a la trayectoria, al aplicar la ecuación 15-12 la cantidad de movimiento angular es

$$H_O = rmv \circlearrowright$$ ***Resp.***

La tasa de incremento de su velocidad (dv/dt) se determina con la ecuación 15-15. En el diagrama de cuerpo libre de la caja, figura 15-22*b*, se ve que sólo el peso $W = mg$ contribuye con un momento con respecto al punto *O*. Tenemos

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = \dot{H}_O; \qquad mg(r \operatorname{sen} \theta) = \frac{d}{dt}(rmv)$$

Como *r* y *m* son constantes,

$$mgr \operatorname{sen} \theta = rm\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g \operatorname{sen} \theta$$ ***Resp.***

NOTA: este mismo resultado se obtiene, por supuesto, con la ecuación de movimiento aplicada en la dirección tangencial, figura 15-22*b*, es decir,

$$+\swarrow \Sigma F_t = ma_t; \qquad mg \operatorname{sen} \theta = m\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = g \operatorname{sen} \theta$$ ***Resp.***

15.7 Principio de impulso y cantidad de movimiento angulares

Principio de impulso y cantidad de movimiento angulares. Si la ecuación 15-15 se reescribe en la forma $\Sigma \mathbf{M}_O dt = d\mathbf{H}_O$ y se integra, al suponer que en el instante $t = t_1$, $\mathbf{H}_O = (\mathbf{H}_O)_1$ y en el instante $t = t_2$, $\mathbf{H}_O = (\mathbf{H}_O)_2$, tenemos

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O \, dt = (\mathbf{H}_O)_2 - (\mathbf{H}_O)_1$$

o

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O \, dt = (\mathbf{H}_O)_2 \qquad (15\text{-}18)$$

Esta ecuación se conoce como el *principio de impulso y cantidad de movimiento angulares*. Los momentos angulares inicial y final $(\mathbf{H}_O)_1$ y $(\mathbf{H}_O)_2$ se definen como el momento de la cantidad de movimiento lineal de la partícula ($\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$) en los instantes t_1 y t_2, respectivamente. El segundo término del lado izquierdo $\Sigma \int \mathbf{M}_O \, dt$, se llama *impulso angular*. Se determina al integrar, con respecto al tiempo, los momentos de todas las fuerzas que actúan en la partícula durante el lapso de tiempo t_1 a t_2. Como el momento de una fuerza con respecto al punto O es $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, el impulso angular se expresa en forma vectorial como

$$\text{impulso angular} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O \, dt = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \, dt \qquad (15\text{-}19)$$

Aquí $\mathbf{r}$ es un vector de posición que se extiende desde el punto O hasta cualquier punto de la línea de acción de $\mathbf{F}$.

Asimismo, al utilizar la ecuación 15-18, el principio de impulso y cantidad de movimiento angulares para un sistema de partículas se escribe como

$$\Sigma(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O \, dt = \Sigma(\mathbf{H}_O)_2 \qquad (15\text{-}20)$$

El primero y tercer términos de esta ecuación representan las cantidades de movimiento angular de todas las partículas $[\Sigma \mathbf{H}_O = \Sigma(\mathbf{r}_i \times m\mathbf{v}_i)]$ en los instantes t_1 y t_2. El segundo término es la suma de los impulsos angulares dados a todas las partículas de t_1 a t_2. Recuerde que estos impulsos son creados sólo por los momentos de las fuerzas externas que actúan en el sistema donde, para la partícula iésima, $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$.

Formulación vectorial. Con los principios de impulso y cantidad de movimiento es posible, por consiguiente, escribir dos ecuaciones que definan el movimiento de la partícula; es decir, las ecuaciones 15-3 y las ecuaciones 15-18, reformuladas como

$$
\begin{aligned}
m\mathbf{v}_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt &= m\mathbf{v}_2 \\
(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt &= (\mathbf{H}_O)_2
\end{aligned}
\qquad (15\text{-}21)
$$

Formulación escalar. En general, las ecuaciones anteriores pueden expresarse en su forma de componentes x, y, z, con lo que se obtiene un total de seis ecuaciones escalares. Si la partícula está limitada a moverse en el plano x-y, pueden escribirse tres ecuaciones escalares para expresar el movimiento, es decir,

$$
\begin{aligned}
m(v_x)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x\, dt &= m(v_x)_2 \\
m(v_y)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y\, dt &= m(v_y)_2 \\
(H_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_O\, dt &= (H_O)_2
\end{aligned}
\qquad (15\text{-}22)
$$

Las primeras dos de estas ecuaciones representan el principio de impulso y cantidad de movimiento lineales en las direcciones x y y, las cuales se analizaron en la sección 15.1 y la tercera ecuación representa el principio de impulso y cantidad de movimiento angulares con respecto al eje z.

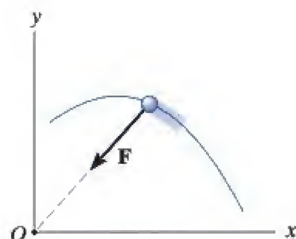


Fig. 15-23

Conservación de la cantidad de movimiento angular. Cuando todos los impulsos angulares que actúan en la partícula son cero durante el tiempo t_1 a t_2, la ecuación 15-18 se reduce a la siguiente forma simplificada:

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2 \tag{15-23}$$

Esta ecuación se conoce como la *conservación de la cantidad de movimiento angular*. Establece que de t_1 a t_2 la cantidad de movimiento angular de la partícula permanece constante. Obviamente, sin ningún impulso externo aplicado a la partícula, tanto la cantidad de movimiento lineal como la cantidad de movimiento angular se conservarán. En algunos casos, sin embargo, la cantidad de movimiento angular de la partícula se conservará, no así la cantidad de movimiento lineal. Un ejemplo de esto ocurre cuando la partícula se somete *sólo* a una *fuerza central* (vea la sección 13.7). Como se muestra en la figura 15-23, la fuerza central impulsora **F** siempre está dirigida hacia el punto O a medida que la partícula se mueve a lo largo de la trayectoria. Por consiguiente, el impulso (momento) angular creado por **F** con respecto al eje z siempre es cero, y por consiguiente la cantidad de movimiento angular de la partícula se conserva con respecto a este eje.

15

De acuerdo con la ecuación 15-20, también podemos escribir la conservación de la cantidad de movimiento angular para un sistema de partículas como

$$\Sigma(\mathbf{H}_O)_1 = \Sigma(\mathbf{H}_O)_2 \tag{15-24}$$

En este caso la suma debe incluir las cantidades de movimiento angular de todas las partículas del sistema.





Siempre que se omita la resistencia del aire, los pasajeros de este juego mecánico se ven sometidos a una conservación de la cantidad de movimiento angular con respecto al eje de rotación. Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, la línea de acción de la fuerza normal **N** del asiento que actúa en el pasajero pasa por el eje y el peso del pasajero **W** es paralelo a él. Por tanto, alrededor del eje z no actúa ningún impulso.

Procedimiento para el análisis

Cuando se aplican los principios de impulso y cantidad de movimiento angulares o la conservación de la cantidad de movimiento angular, se sugiere que se utilice el siguiente procedimiento.

Diagrama de cuerpo libre.

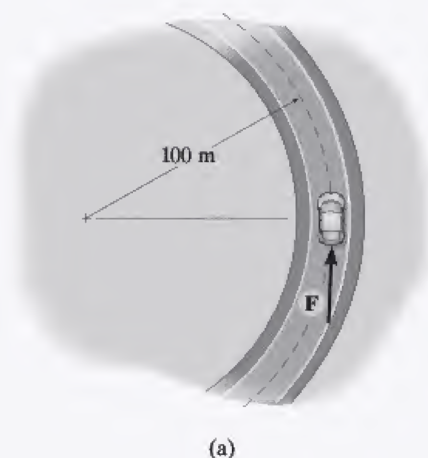
- Trace el diagrama de cuerpo libre de la partícula para determinar cualquier eje con respecto al cual la cantidad de movimiento angular se pueda conservar. Para que esto ocurra, los momentos de todas las fuerzas (o impulsos) deben ser paralelos o pasar a través del eje para crear un momento cero durante todo el periodo t_1 a t_2.
- También deben establecerse la dirección y sentido de las velocidades inicial y final de la partícula.
- Un procedimiento alternativo sería trazar los diagramas de impulso y cantidad de movimiento de la partícula.

Ecuaciones de cantidad de movimiento.

- Aplique el principio de impulso y cantidad de movimiento angulares, $(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{M}_O dt = (\mathbf{H}_O)_2$, o si es apropiado, la conservación de la cantidad de movimiento angular $(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$.

EJEMPLO 15.13

El automóvil de 1.5 Mg se desplaza por la curva como se muestra en la figura 15-24*a*. Si la fuerza de tracción de las ruedas en la carretera es $F = (150t^2)$ N, donde t está en segundos, determine la rapidez del automóvil cuando $t = 5$ s. En un principio el automóvil viaja a una rapidez de 5 m/s. Ignore el tamaño del automóvil.



(a)

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre del automóvil se muestra en la figura 15-24*b*. Si aplicamos el principio de impulso y cantidad de movimiento angulares con respecto al eje z, entonces el impulso angular creado por el peso, la fuerza normal y la fuerza de fricción radial se eliminarán porque actúan paralelas al eje o pasan a través de él.

Principio de impulso y cantidad de movimiento angulares.

$$(H_z)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_z\,dt = (H_z)_2$$

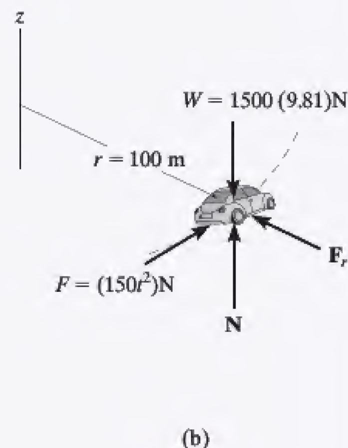
$$rm_c(v_c)_1 + \int_{t_1}^{t_2} rF\,dt = rm_c(v_c)_2$$

$$(100\text{ m})(1500\text{ kg})(5\text{ m/s}) + \int_0^{5\text{ s}} (100\text{ m})[(150t^2)\text{ N}]\,dt$$

$$= (100\text{ m})(1500\text{ kg})(v_c)_2$$

$$750(10^3) + 5000t^3\Big|_0^{5\text{ s}} = 150(10^3)(v_c)_2$$

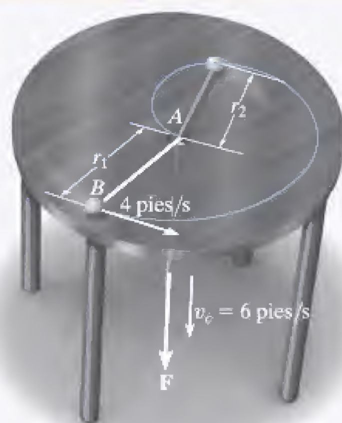
$$(v_c)_2 = 9.17\text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

Fig. 15-24

EJEMPLO 15.14



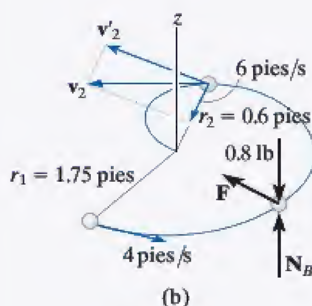
(a)

La bola B de 0.8 lb, que se muestra en la figura 15-25a está sujeta a una cuerda, la cual pasa a través del orificio A en una mesa lisa. Cuando la bola está a $r_1 = 1.75$ pies del orificio, gira alrededor de un círculo de modo que su rapidez es $v_1 = 4$ pies/s. Al aplicar la fuerza **F** la cuerda se jala hacia abajo a través del orificio con una rapidez constante $v_c = 6$ pies/s. Determine (a) la velocidad de la bola en el instante en que está a $r_2 = 0.6$ pies del orificio, y (b) la cantidad de trabajo realizada por **F** al acortarse la distancia radial de r_1 a r_2. Ignore el tamaño de la bola.

SOLUCIÓN

Parte (a) Diagrama de cuerpo libre. Conforme la bola se mueve de r_1 a r_2, figura 15-25b, la fuerza **F** que actúa en la bola siempre pasa a través del eje z y el peso y $\mathbf{N}_B$ son paralelos a ella. De ahí que los momentos, o impulsos angulares creados por estas fuerzas, sean *cero* con respecto a este eje. Por consiguiente, la cantidad de movimiento angular se conserva con respecto al eje z.

Conservación de la cantidad de movimiento angular. La velocidad de la bola $\mathbf{v}_2$ se divide en dos componentes. El componente radial, 6 pies/s, es conocido; sin embargo, produce una cantidad de movimiento angular cero con respecto al eje z. Por tanto,



(b)

Fig. 15-25

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$$

$$r_1 m_B v_1 = r_2 m_B v_2'$$

$$1.75 \text{ pies}\left(\frac{0.8 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right) 4 \text{ pies/s} = 0.6 \text{ pies}\left(\frac{0.8 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right) v_2'$$

$$v_2' = 11.67 \text{ pies/s}$$

La rapidez de la bola es, por consiguiente,

$$v_2 = \sqrt{(11.67 \text{ pies/s})^2 + (6 \text{ pies/s})^2}$$
$$= 13.1 \text{ pies/s}$$

Parte (b). La única fuerza que realiza trabajo en la bola es **F**. (La fuerza normal y el peso no se desplazan verticalmente.) Las energías cinéticas inicial y final de la bola se determinan pues, con el principio del trabajo y energía, por lo que tenemos

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{0.8 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(4 \text{ pies/s})^2 + U_F = \frac{1}{2}\left(\frac{0.8 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(13.1 \text{ pies/s})^2$$

$$U_F = 1.94 \text{ pies} \cdot \text{lb}$$ ***Resp.***

NOTA: la fuerza F no es constante porque el componente normal de aceleración $a_n = v^2/r$, cambia a medida que cambia r.

EJEMPLO 15.15

El disco de 2 kg de la figura 15-26*a* descansa sobre una superficie horizontal lisa y está sujeto a una cuerda elástica cuya rigidez es k_c = 20 N/m, e inicialmente no está alargada. Si al disco se le imparte una velocidad dada $(v_D)_1$ = 1.5 m/s, perpendicular a la cuerda, determine la razón a la cual la cuerda se alarga y la rapidez del disco en el instante en que la cuerda se alarga es 0.2 m.

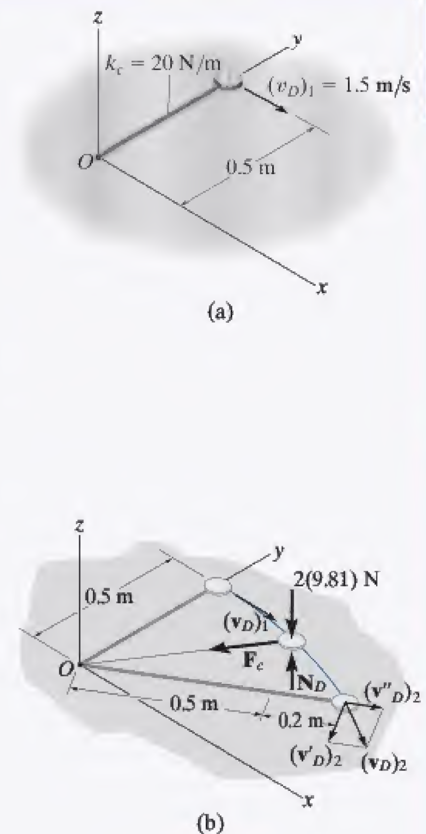


Fig. 15-26

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Después de que se lanza el disco, se desliza a lo largo de la trayectoria que se muestra en la figura 15-26*b*. Por inspección, la cantidad de movimiento angular con respecto al punto *O* (o el eje *z*) se *conserva*, puesto que ninguna de las fuerzas produce un impulso angular con respecto a este eje. Además, cuando la distancia es de 0.7 m, sólo el componente transversal $(\mathbf{v}'_D)_2$ produce cantidad de movimiento angular del disco con respecto a *O*.

Conservación de la cantidad de movimiento angular. El componente $(\mathbf{v}'_D)_2$ se obtiene al aplicar la conservación de la cantidad de movimiento angular con respecto al eje *O* (el eje *z*).

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$$
$$r_1 m_D (v_D)_1 = r_2 m_D (v'_D)_2$$
$$0.5 \text{ m } (2 \text{ kg})(1.5 \text{ m/s}) = 0.7 \text{ m}(2 \text{ kg})(v'_D)_2$$
$$(v'_D)_2 = 1.071 \text{ m/s}$$

Conservación de la energía. La rapidez del disco se obtiene mediante la ecuación de conservación de la energía en el punto donde se lanzó el disco y en el punto donde la cuerda se alargó 0.2 m.

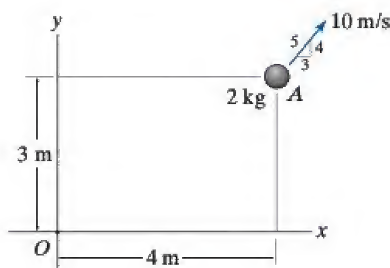
$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$\tfrac{1}{2}m_D(v_D)_1^2 + \tfrac{1}{2}kx_1^2 = \tfrac{1}{2}m_D(v_D)_2^2 + \tfrac{1}{2}kx_2^2$$
$$\tfrac{1}{2}(2 \text{ kg})(1.5 \text{ m/s})^2 + 0 = \tfrac{1}{2}(2 \text{ kg})(v_D)_2^2 + \tfrac{1}{2}(20 \text{ N/m})(0.2 \text{ m})^2$$
$$(v_D)_2 = 1.360 \text{ m/s} = 1.36 \text{ m/s} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Ya determinado $(v_D)_2$ y su componente $(v'_D)_2$, la tasa de alargamiento de la cuerda o el componente radial, $(v''_D)_2$ se determina por el teorema de Pitágoras,

$$(v''_D)_2 = \sqrt{(v_D)_2^2 - (v'_D)_2^2}$$
$$= \sqrt{(1.360 \text{ m/s})^2 - (1.071 \text{ m/s})^2}$$
$$= 0.838 \text{ m/s} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

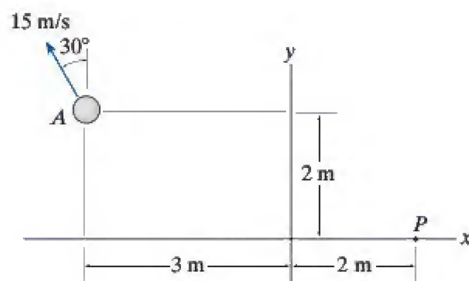
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F15-19. La partícula A de 2 kg tiene la velocidad que se muestra. Determine su cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ con respecto al punto O.



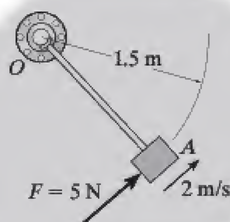
F15-19

F15-20. La partícula A de 2 kg tiene la velocidad que se muestra. Determine su cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_P$ con respecto al punto P.



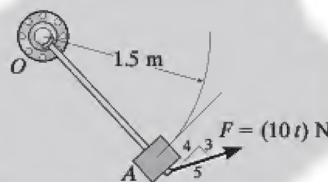
F15-20

F15-21. Inicialmente, el bloque de 5 kg gira con una velocidad constante de 2 m/s alrededor de la trayectoria circular con centro en O sobre el plano horizontal liso. Si se aplica una fuerza tangencial constante $F = 5$ N al bloque, determine su rapidez cuando $t = 3$ s. Ignore el tamaño del bloque.



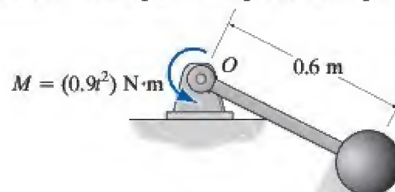
F15-21

F15-22. El bloque de 5 kg gira alrededor de la trayectoria circular con centro en O sobre el plano horizontal liso cuando se somete a la fuerza $F = (10t)$ N, donde t está en segundos. Si el bloque comienza a moverse a partir del punto de reposo, determine su rapidez cuando $t = 4$ s. Ignore el tamaño del bloque. La fuerza mantiene el mismo ángulo constante tangente a la trayectoria.



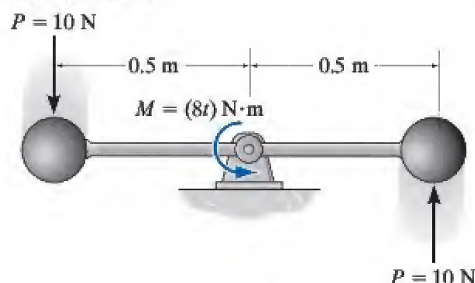
F15-22

F15-23. La esfera de 2 kg está unida a la barra rígida ligera, la cual gira en el *plano horizontal* con centro en O. Si el sistema se somete a un momento de par $M = (0.9t^2)$ N · m, donde t está en segundos, determine la rapidez de la esfera en el instante $t = 5$ s a partir del punto de reposo.



F15-23

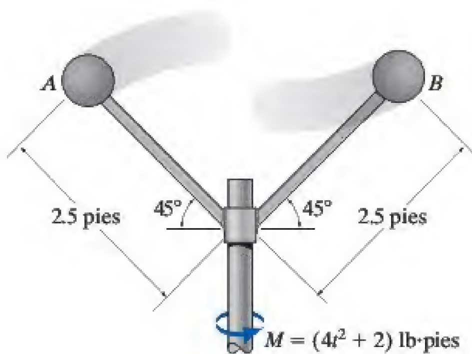
F15-24. Dos esferas idénticas de 10 kg están unidas a la barra rígida ligera, la cual gira en el *plano horizontal* con centro en O. Si las esferas se someten a fuerzas tangenciales $P = 10$ N y la barra se somete a un momento de par $M = (8t)$ N · m, donde t está en segundos, determine la rapidez de las esferas en el instante $t = 4$ s. El sistema comienza a moverse a partir del punto de reposo. Ignore el tamaño de las esferas.



F15-24

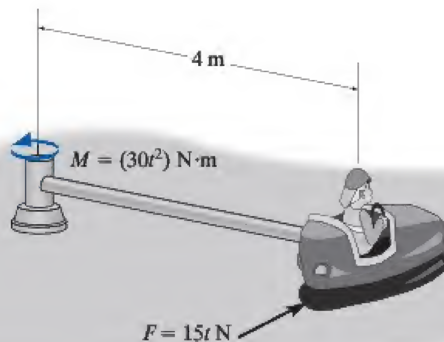
PROBLEMAS

15-90. Las esferas A y B pesan 4 lb cada una y están soldadas en las barras que están rígidamente conectadas a una flecha como se muestra. Si la flecha se somete a un momento de par $M = (4t^2 + 2)$ lb · pie, donde t está en segundos, determine la velocidad de A y B cuando $t = 3$ s. El sistema comienza a moverse a partir del punto de reposo. Ignore el tamaño de las esferas.



Prob. 15-90

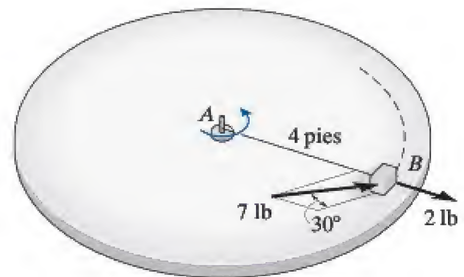
15-91. Si la barra de masa (su peso se pasa por alto) se somete a un momento de par $M = (30t^2)$ N · m y el motor del carro genera una fuerza de tracción $F = (15t)$ N a las ruedas, donde t está en segundos, determine la rapidez del carro en el instante $t = 5$ s. El carro arranca desde el punto de reposo. La masa total del carro y el conductor es de 150 kg. Ignore el tamaño del carro.



Prob. 15-91

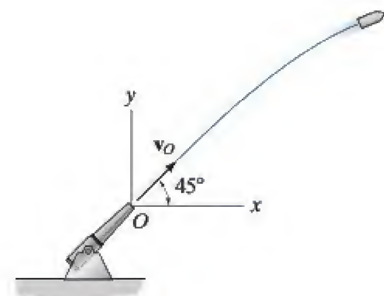
15-92. El bloque de 10 lb descansa sobre una superficie para la cual $\mu_k = 0.5$. En él actúan una fuerza radial de 2 lb y una fuerza horizontal de 7 lb, siempre dirigida a 30° de la tangente a la trayectoria como se muestra. Si en un principio el bloque se mueve en una trayectoria circular con una rapidez $v_1 = 2$ pies/s en el instante en que se aplican las fuerzas, determine el tiempo requerido antes de que la tensión en la cuerda AB sea de 20 lb. Para efectos de cálculo, ignore el tamaño del bloque.

15-93. El bloque de 10 lb está en reposo sobre la superficie lisa. En él actúan una fuerza radial de 2 lb y una fuerza horizontal de 7 lb, siempre dirigida a 30° de la tangente a la trayectoria, como se muestra. Determine cuánto tiempo necesita para romper la cuerda, la cual requiere una tensión de $T = 30$ lb. ¿Cuál es la rapidez del bloque cuando esto ocurre? Para efectos de cálculo, ignore el tamaño del bloque.



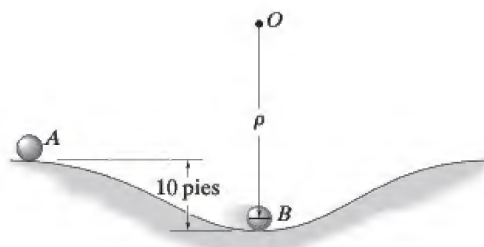
Probs. 15-92/93

15-94. Un cañón dispara un proyectil de 3 kg de masa con una velocidad de salida de $v_0 = 500$ m/s. Determine su cantidad de movimiento angular con respecto al punto O cuando alcanza la altura máxima de su trayectoria.



Prob. 15-94

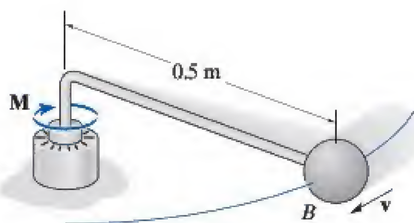
15-95. La bola de 3 lb situada en A se suelta del punto de reposo y desciende a lo largo de la trayectoria curva. Si la bola ejerce una fuerza normal de 5 lb en la trayectoria cuando llega al punto B, determine su cantidad de movimiento angular con respecto al centro de curvatura, punto O. *Sugerencia:* ignore el tamaño de la bola. Antes debe determinarse el radio de curvatura en el punto B.



Prob. 15-95

15

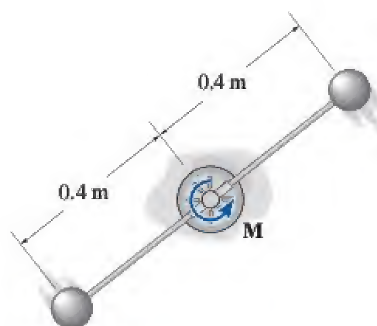
***15-96.** La bola B tiene una masa de 10 kg y está unida al extremo de una barra cuya masa puede ser ignorada. Si la flecha se somete a un par de torsión $M = (2t^2 + 4)$ N · m, donde t está en segundos, determine la rapidez de la bola cuando $t = 2$ s. Cuando $t = 0$ la rapidez de la bola es $v = 2$ m/s.



Prob. 15-96

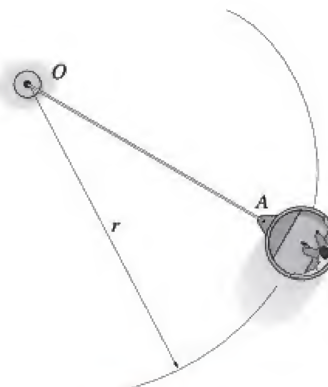
•**15-97.** La masa de cada una de las dos esferas es de 3 kg y están unidas a la barra de masa insignificante. Si se aplica un par de torsión $M = (6e^{0.2t})$ N · m a la barra, donde t está en segundos como se muestra, determine la rapidez de cada una de las esferas en 2 s, a partir del punto de reposo.

15-98. La masa de cada una de las dos esferas es de 3 kg y están unidas a la barra de masa insignificante. Determine el tiempo que el par de torsión $M = (8t)$ N · m, donde t está en segundos, se debe aplicar a la barra de modo que cada esfera alcance una rapidez de 3 m/s a partir del punto de reposo.



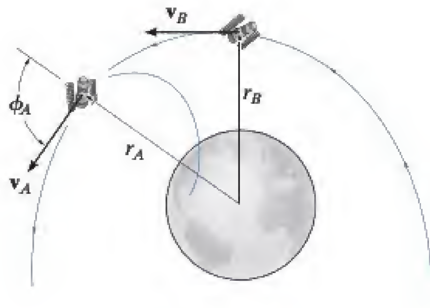
Probs. 15-97/98

15-99. Un juego mecánico consta de un carro sujeto al cable OA. El carro gira en una trayectoria circular horizontal y alcanza una rapidez $v_1 = 4$ pies/s cuando $r = 12$ pies. Luego se tira del cable a una velocidad constante de 0.5 pies/s. Determine la rapidez del carro en 3 s.



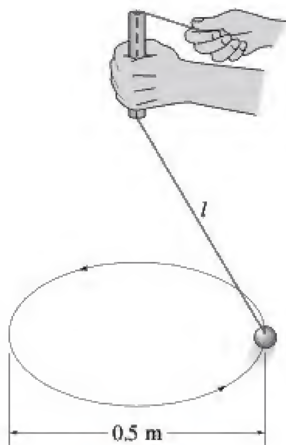
Prob. 15-99

***15-100.** Se lanza un satélite de 700 kg de masa a una trayectoria de vuelo libre alrededor de la Tierra con una rapidez inicial de $v_A = 10$ km/s, cuando la distancia al centro de la Tierra es $r_A = 15$ Mm. Si el ángulo de lanzamiento en esta posición es $\phi_A = 70°$, determine la velocidad v_B del satélite y su distancia más cercana r_B al centro de la tierra. La masa de ésta es $M_e = 5.976\ (10^{24})$kg. *Sugerencia:* en estas condiciones, el satélite se somete sólo a la fuerza gravitacional terrestre, $F = GM_e m_s/r^2$, ecuación 13-1. En una parte de la solución, use la conservación de la energía.



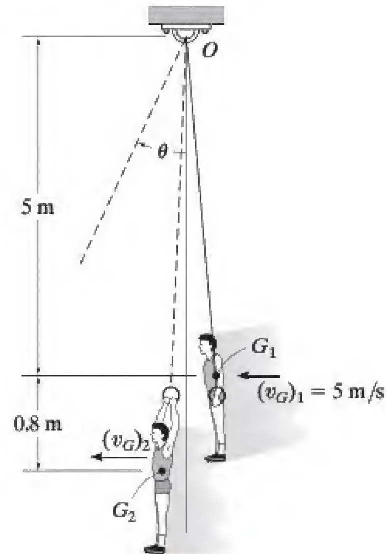
Prob. 15-100

•15-101. La bola de 2 kg describe una trayectoria circular de 0.5 m de diámetro a una rapidez constante. Si la longitud de la cuerda se acorta de $l = 1$ m a $l' = 0.5$ m, al jalar de ella a través del tubo, determine el nuevo diámetro de la trayectoria d'. También, ¿cuál es la tensión en la cuerda en cada caso?



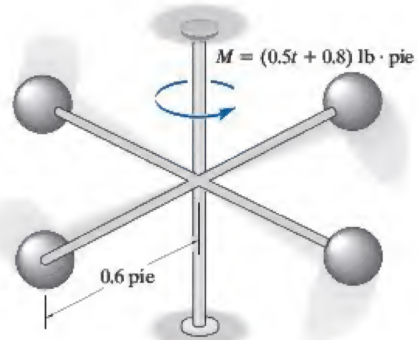
Prob. 15-101

15-102. Un gimnasta de 80 kg de masa se sostiene en los dos aros con sus brazos abajo en la posición mostrada mientras oscila hacia abajo. Su centro de masa está en el punto G_1. Cuando está en la posición más baja de su oscilación, su velocidad es $(v_G)_1 = 5$ m/s. En esta posición, de *repente* deja sus brazos arriba y su centro de masa cambia a la posición G_2. Determine su nueva velocidad en la oscilación hacia arriba y el ángulo θ al cual oscila antes de detenerse momentáneamente. Trate su cuerpo como una partícula.



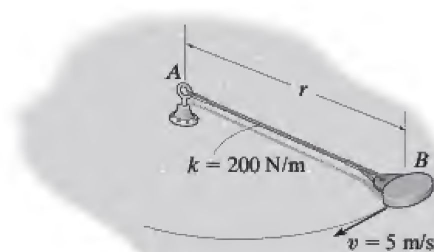
Prob. 15-102

15-103. Las cuatro esferas de 5 lb están rígidamente unidas a la cruceta de peso insignificante. Si se aplica un momento de par $M = (0.5t + 0.8)$ lb · pie, donde t está en segundos, como se muestra, determine la rapidez de cada una de las esferas en 4 segundos a partir del reposo. Ignore el tamaño de las esferas.



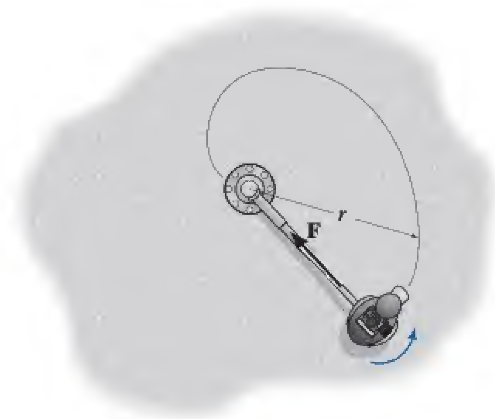
Prob. 15-103

***15-104.** Cuando $r = 1.5$ m, al disco de 5 kg se le impulsa una rapidez de $v = 5$ m/s, perpendicular a la cuerda elástica. Determine su rapidez y la razón de acortamiento de la cuerda elástica cuando $r = 1.2$ m. El disco se desliza sobre el plano horizontal liso. Ignore su tamaño. La longitud sin alargar de la cuerda es de 0.5 m.



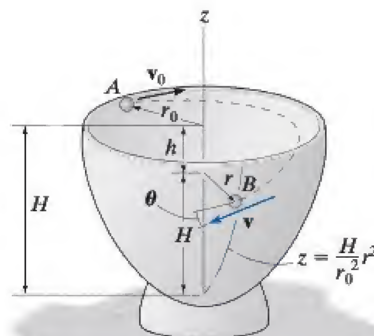
Prob. 15-104

•**15-105.** El carro de 150 lb de un juego mecánico está conectado a una pluma telescópica giratoria. Cuando $r = 15$ pies, el carro se desplaza en una trayectoria circular horizontal a una rapidez de 30 pies/s. Si la pluma se acorta a razón de 3 pies/s, determine la rapidez del carro cuando $r = 10$ pies. Además, determine el trabajo realizado por la fuerza axial **F** a lo largo de la pluma. Ignore el tamaño del carro y la masa de la pluma.



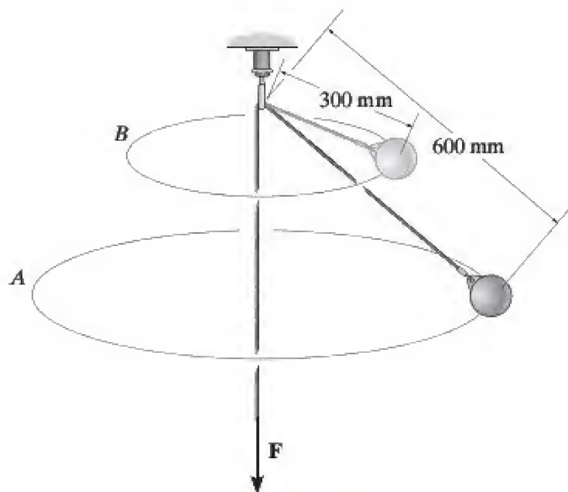
Prob. 15-105

15-106. A un balín de masa m se le imparte una velocidad de v_0 en A paralela al aro horizontal de un tazón liso. Determine la magnitud de la velocidad **v** del balín cuando cae una distancia vertical h para llegar al punto B. El ángulo θ se mide entre **v** y la línea horizontal que pasa por B.



Prob. 15-106

15-107. Cuando a un péndulo de 2 kg se le imparte una rapidez horizontal de 1.5 m/s, comienza a girar alrededor de la trayectoria circular horizontal A. Si se incrementa la fuerza **F** en la cuerda, el péndulo se eleva y luego gira alrededor de la trayectoria circular horizontal B. Determine su rapidez alrededor de la trayectoria B. Además, determine el trabajo realizado por la fuerza **F**.

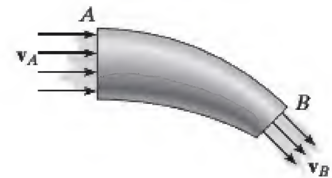


Prob. 15-107

15.8 Flujo continuo de una corriente de fluido

Hasta este punto hemos limitado nuestro estudio de los principios de impulso y cantidad de movimiento a un sistema de partículas contenidas dentro de un *volumen cerrado*. En esta sección, sin embargo, aplicaremos el principio de impulso y cantidad de movimiento al flujo de masa constante de partículas de fluido que entran a y salen de un *volumen de control*. Este volumen se define como una región en el espacio donde partículas de fluido pueden fluir hacia dentro o hacia fuera de ella. Con frecuencia se hace que el tamaño y forma del volumen de control coincidan con los límites sólidos y aberturas de un tubo, turbina o bomba. Siempre que el flujo del fluido hacia dentro del volumen de control sea igual al de salida, en ese caso el flujo puede clasificarse como *flujo continuo*.

Principio de impulso y cantidad de movimiento. Considere el flujo continuo de una corriente de fluido en la figura 15-27*a* que circula a través de un tubo. La región dentro del tubo y sus aberturas se considerarán como el volumen de control. Como se muestra, el fluido fluye hacia dentro y hacia fuera del volumen de control con velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$, respectivamente. El cambio de la dirección del fluido dentro del volumen de control lo provoca el impulso de la fuerza externa resultante ejercida en la superficie de control por la pared del tubo. Esta fuerza resultante se determina al aplicar el principio de impulso y cantidad de movimiento al volumen de control.

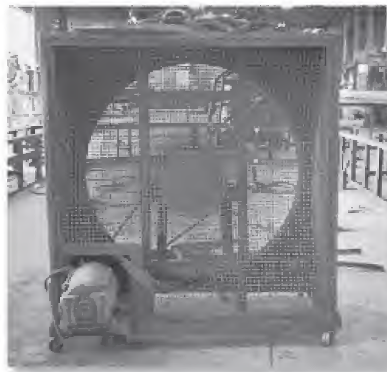


(a)

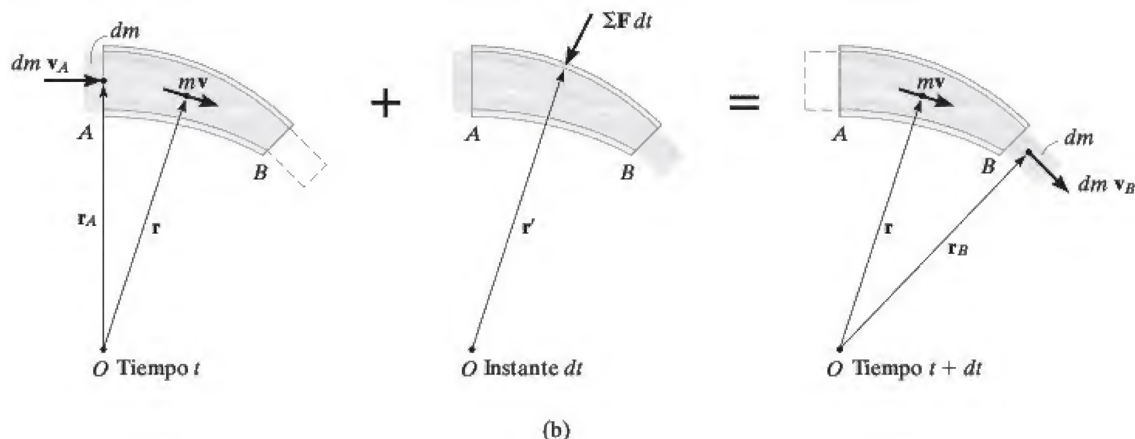
Fig. 15-27



La banda transportadora debe suministrar fuerzas de fricción a la grava que cae sobre ella para cambiar la cantidad de movimiento de la corriente de grava, de modo que comience a desplazarse a lo largo de la banda.



En principio, el aire de un lado de este ventilador está en reposo y conforme pasa a través de las aspas su cantidad de movimiento se incrementa. Para cambiar la cantidad de movimiento del flujo de aire de esta manera, las aspas deben ejercer un empuje horizontal en la corriente de aire. A medida que las aspas giran más rápido, el empuje igual pero opuesto del aire en las aspas podría vencer la resistencia al rodamiento de las ruedas en el suelo y comenzar a mover la estructura del ventilador.

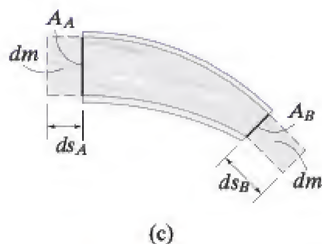


(b)

15

Como se indica en la figura 15-27*b*, una pequeña cantidad de flujo de masa *dm* está a punto de entrar al volumen de control por la abertura *A* a una velocidad $\mathbf{v}_A$ en el instante *t*. Como el flujo se considera continuo, en el instante $t + dt$, la misma cantidad de fluido saldrá del volumen de control por la abertura *B* a una velocidad $\mathbf{v}_B$. Las cantidades de movimiento de fluido que entran y salen del volumen de control son, por consiguiente, $dm\,\mathbf{v}_A$ y $dm\,\mathbf{v}_B$, respectivamente. Además, durante el instante *dt*, la cantidad de movimiento de la masa de fluido dentro del volumen de control permanece constante y se denota como $m\mathbf{v}$. Como se muestra en el diagrama central, la fuerza externa resultante ejercida en el volumen de control produce el impulso $\Sigma\mathbf{F}\,dt$. Si aplicamos el principio de impulso y cantidad de movimiento lineales, tenemos

$$dm\,\mathbf{v}_A + m\mathbf{v} + \Sigma\mathbf{F}\,dt = dm\,\mathbf{v}_B + m\mathbf{v}$$



(c)

Fig. 15-27 (cont.)

Si $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$ son vectores de posición medidos desde el punto *O* a los centros geométricos del volumen de control y las aberturas en *A* y *B*, figura 15-27*b*, entonces el principio de impulso y cantidad de movimiento lineales con respecto a *O* se vuelve

$$\mathbf{r}_A \times dm\,\mathbf{v}_A + \mathbf{r} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r}' \times \Sigma\mathbf{F}\,dt = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r}_B \times dm\,\mathbf{v}_B$$

Si dividimos ambos lados de las dos ecuaciones anteriores entre *dt* y simplificamos, tenemos

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{dm}{dt}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) \qquad (15\text{-}25)$$

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \frac{dm}{dt}(\mathbf{r}_B \times \mathbf{v}_B - \mathbf{r}_A \times \mathbf{v}_A) \qquad (15\text{-}26)$$

El término dm/dt se llama *flujo de masa.* Indica la cantidad constante de fluido que se dirige hacia dentro o hacia fuera del volumen de control por unidad de tiempo. Si las áreas de sección transversal y densidades del fluido a la entrada A son A_A, ρ_A y a la salida B, A_B y ρ_B, figura 15-27*c*, entonces, para un fluido incompresible, la *continuidad de masa* requiere que $dm = \rho dV = \rho_A(ds_A A_A) = \rho_B(ds_B A_B)$. Por tanto, durante el instante dt, como $v_A = ds_A/dt$ y $v_B = ds_B/dt$, tenemos $dm/dt = \rho_A v_A A_A = \rho_B v_B A_B$ o, por lo general,

$$\frac{dm}{dt} = \rho v A = \rho Q \tag{15-27}$$

El término $Q = vA$ mide el volumen de fluido por unidad de tiempo y se conoce como *descarga* o *flujo volumétrico*.

15

Procedimiento para el análisis

Los problemas que implican flujo continuo se resuelven por el siguiente procedimiento.

Diagrama cinemático.

- Identifique el volumen de control. Si está en *movimiento*, un *diagrama cinemático* puede ayudar a determinar las velocidades de entrada y salida del fluido que va hacia dentro y hacia fuera de sus aberturas puesto que se realizará un *análisis de movimiento relativo*.
- Un observador fijo debe medir las velocidades v_A y v_B en un marco de referencia inercial.
- Una vez que se determina la velocidad del fluido que entra al volumen de control, el flujo de masa se calcula con la ecuación 15-27.

Diagrama de cuerpo libre.

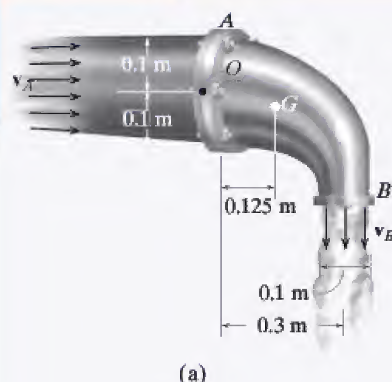
- Trace el diagrama de cuerpo libre del volumen de control para establecer las fuerzas $\Sigma\mathbf{F}$ que actúan en él. Estas fuerzas incluirán las reacciones de los apoyos, el peso de todas las partes sólidas y el fluido contenido en el volumen de control y las fuerzas producidas por la presión manométrica estática en las secciones de entrada y salida.* La presión manométrica es la presión medida por encima de la presión atmosférica, y por tanto si una abertura se expone a la atmósfera, en ésta la presión manométrica será cero.

Ecuaciones de flujo continuo.

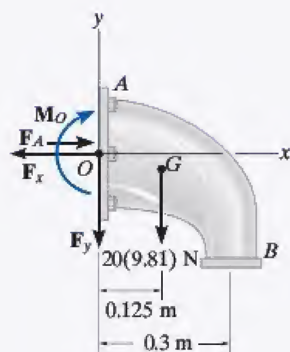
- Aplique las ecuaciones de flujo continuo, ecuaciones 15-25 y 15-26, por medio de los componentes de velocidad y fuerza apropiados, los cuales se muestran en los diagramas de cuerpo libre y cinemática.

*En el sistema SI, la presión se mide con el pascal (Pa), donde $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$.

EJEMPLO 15.16



(a)



(b)

Fig. 15-28

15

Determine los componentes de reacción que la junta A fija del tubo ejerce en el codo en la figura 15-28*a*, si el agua que fluye por el tubo se somete a una presión manométrica estática de 100 kPa en A. La descarga en B es $Q_B = 0.2\ \text{m}^3/\text{s}$. La densidad del agua es $\rho_w = 1000\ \text{kg/m}^3$ y la masa del codo lleno de agua es de 20 kg con su centro de masa en G.

SOLUCIÓN

Consideraremos que el volumen de control es la superficie externa del codo. Con un sistema de coordenadas inercial fijo, la velocidad de flujo en A y B y la velocidad de flujo de masa se calculan con la ecuación 15-27. Como la densidad del agua es constante, $Q_B = Q_A = Q$. Por consiguiente,

$$\frac{dm}{dt} = \rho_w Q = (1000\ \text{kg/m}^3)(0.2\ \text{m}^3/\text{s}) = 200\ \text{kg/s}$$

$$v_B = \frac{Q}{A_B} = \frac{0.2\ \text{m}^3/\text{s}}{\pi(0.05\ \text{m})^2} = 25.46\ \text{m/s}\ \downarrow$$

$$v_A = \frac{Q}{A_A} = \frac{0.2\ \text{m}^3/\text{s}}{\pi(0.1\ \text{m})^2} = 6.37\ \text{m/s}\ \rightarrow$$

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre del volumen de control (codo), figura 15-28*b*, la conexión *fija* en A ejerce un momento de par resultante $\mathbf{M}_O$ y componentes de fuerza $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ en el codo. Debido a la presión estática en el tubo, la fuerza producida por la presión que actúa en la superficie de control abierta en A es $F_A = p_A A_A$. Como 1 kPa = 1000 N/m²,

$$F_A = p_A A_A = [100(10^3)\ \text{N/m}^2][\pi(0.1\ \text{m})^2] = 3141.6\ \text{N}$$

En B no actúa ninguna presión estática, puesto que el agua se descarga a la presión atmosférica, es decir, la presión medida por un manómetro en B es igual a cero, $p_B = 0$.

Ecuaciones de flujo continuo.

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = \frac{dm}{dt}(v_{Bx} - v_{Ax});\ -F_x + 3141.6\ \text{N} = 200\ \text{kg/s}(0 - 6.37\ \text{m/s})$$

$$F_x = 4.41\ \text{kN} \qquad \textit{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = \frac{dm}{dt}(v_{By} - v_{Ay});\ -F_y - 20(9.81)\ \text{N} = 200\ \text{kg/s}(-25.46\ \text{m/s} - 0)$$

$$F_y = 4.90\ \text{kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Si se suman los momentos con respecto al punto O, figura 15-28*b*, entonces $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$, y la presión estática $\mathbf{F}_A$ se eliminan, así como el momento de la cantidad de movimiento del agua que entra por A, figura 15-28*a*. Por consiguiente,

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = \frac{dm}{dt}(d_{OB}v_B - d_{OA}v_A)$$

$$M_O + 20(9.81)\ \text{N}\ (0.125\ \text{m}) = 200\ \text{kg/s}[(0.3\ \text{m})(25.46\ \text{m/s}) - 0]$$

$$M_O = 1.50\ \text{kN}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 15.17

Un chorro de agua de 2 pulg de diámetro que sale con una velocidad de 25 pies/s choca con un aspa en movimiento, figura 15-29*a*. Si el aspa se aleja del chorro a una velocidad constante de 5 pies/s, determine los componentes horizontal y vertical de la fuerza que el aspa ejerce en el agua. ¿Qué potencia genera el agua en el aspa? El peso específico del agua es $\gamma_w = 62.4$ lb/pie^3.

SOLUCIÓN

Diagrama cinemático. En este caso el volumen de control es la corriente de agua sobre el aspa. Con respecto a un sistema de coordenadas inercial fijo, figura 15-29*b*, la velocidad a la cual entra el agua al volumen de control por A es

$$\mathbf{v}_A = \{25\mathbf{i}\} \text{ pies/s}$$

La *velocidad de flujo relativa* dentro del volumen de control es $\mathbf{v}_{w/cv} = \mathbf{v}_w - \mathbf{v}_{cv} = 25\mathbf{i} - 5\mathbf{i} = \{20\mathbf{i}\}$ pies/s. Como el volumen de control se mueve con una velocidad $\mathbf{v}_{cv} = \{5\mathbf{i}\}$ pies/s, la velocidad de flujo en B medida con respecto a los ejes x, y fijos es la suma vectorial, mostrada en la figura 15-29*b*. Donde,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{cv} + \mathbf{v}_{w/cv}$$
$$= \{5\mathbf{i} + 20\mathbf{j}\} \text{ pies/s}$$

Por tanto, la masa del flujo de agua *sobre* el volumen de control que experimenta un cambio de cantidad de movimiento es

$$\frac{dm}{dt} = \rho_w(v_{w/cv})A_A = \left(\frac{62.4}{32.2}\right)(20)\left[\pi\left(\frac{1}{12}\right)^2\right] = 0.8456 \text{ slug/s}$$

Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre del volumen de control se muestra en la figura 15-29*c*. El peso del agua se omitirá en el cálculo, puesto que esta fuerza es mínima comparada con los componentes de reacción $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$.

Ecuaciones de flujo continuo.

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{dm}{dt}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)$$
$$-F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} = 0.8456(5\mathbf{i} + 20\mathbf{j} - 25\mathbf{i})$$

Poner en la ecuación los componentes **i** y **j** respectivos, resulta

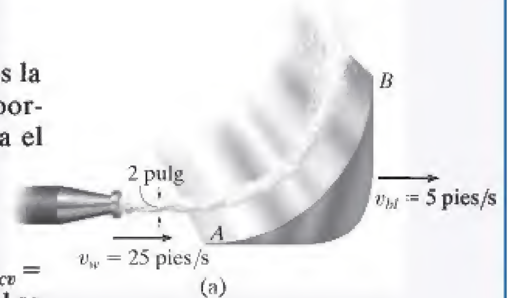
$$F_x = 0.8456(20) = 16.9 \text{ lb} \leftarrow$$ ***Resp.***

$$F_y = 0.8456(20) = 16.9 \text{ lb} \uparrow$$ ***Resp.***

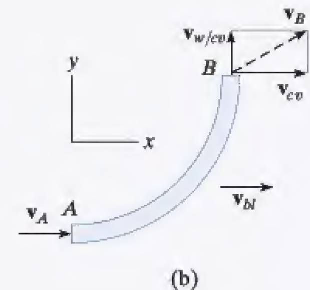
El agua ejerce fuerzas iguales pero opuestas en el aspa.

Como la fuerza del agua que hace que el aspa se mueva hacia delante en sentido horizontal con una velocidad de 5 pies/s es $F_x = 16.9$ lb, entonces, de acuerdo con la ecuación 14-10, la potencia es

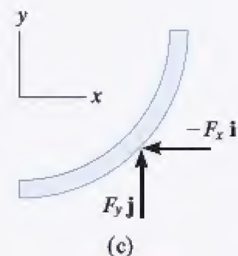
$$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}; \qquad P = \frac{16.9 \text{ lb}(5 \text{ pies/s})}{550 \text{ hp/(pies}\cdot\text{lb/s)}} = 0.154 \text{ hp}$$



(a)



(b)



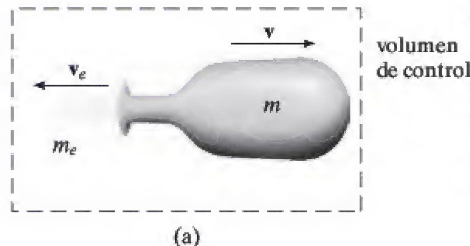
(c)

Fig. 15-29

15

*15.9 Propulsión con masa variable

Un volumen de control que pierde masa. Considere un dispositivo, un cohete, por ejemplo, que en un momento dado tiene una masa m y que se desplaza hacia delante con una velocidad $\mathbf{v}$, figura 15-30*a*. En ese mismo instante, el dispositivo expele la cantidad de masa m_e con una velocidad de flujo $\mathbf{v}_e$. Para el análisis, el volumen de control incluirá *tanto la masa m del dispositivo como la masa expelida* m_e. Los diagramas de impulso y cantidad de movimiento del volumen de control se muestran en la figura 15-30*b*. Durante el tiempo dt, su velocidad se incrementa de $\mathbf{v}$ a $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ puesto que una cantidad de masa dm_e ha sido expulsada y por tanto se incrementó el escape. Este incremento de la velocidad hacia delante, sin embargo, no cambia con la velocidad $\mathbf{v}_e$ de la masa expelida, como lo vería un observador fijo, puesto que la masa se mueve a una velocidad constante una vez que ha sido expulsada. Los impulsos son creados por $\Sigma\mathbf{F}_{cv}$, la cual representa la resultante de todas las fuerzas externas, como resistencia al avance y peso, que *actúan en el volumen de control* en la dirección del movimiento. Esta resultante de fuerzas *no incluye* la fuerza que impulsa al volumen de control hacia delante, puesto que esta fuerza (llamada *empuje*) es *interna al volumen de control*; es decir, el empuje actúa con magnitud igual pero dirección opuesta en la masa m del dispositivo y la masa expelida m_e.* Al aplicar el principio de impulso y cantidad de movimiento al volumen de control, figura 15-30*b*, tenemos

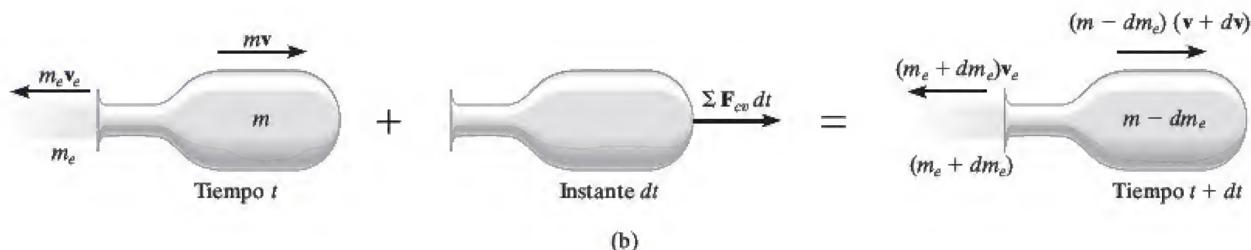


(a)

$$(\overset{+}{\rightarrow})\ mv - m_e v_e + \Sigma F_{cv}\, dt = (m - dm_e)(v + dv) - (m_e + dm_e)v_e$$

o

$$\Sigma F_{cv}\, dt = -v\, dm_e + m\, dv - dm_e\, dv - v_e\, dm_e$$



(b)

Fig. 15-30

*$\Sigma\mathbf{F}$ representa la fuerza resultante externa que *actúa en el volumen de control*, el cual es diferente de $\mathbf{F}$, la fuerza resultante que actúa en el dispositivo.

Sin perder precisión, se puede omitir el tercer término del lado derecho puesto que es una diferencial de "segundo grado". Al dividir entre dt se obtiene

$$\Sigma F_{cv} = m\frac{dv}{dt} - (v + v_e)\frac{dm_e}{dt}$$

La velocidad del dispositivo vista por un observador que se mueve junto con las partículas de la masa expulsada es $v_{D/e} = (v + v_e)$ y por tanto el resultado final puede escribirse como

$$\Sigma F_{cv} = m\frac{dv}{dt} - v_{D/e}\frac{dm_e}{dt} \qquad (15\text{-}28)$$

Aquí el término dm_e/dt representa la tasa a la cual se expulsará la masa.

Para ilustrar una aplicación de la ecuación 15-28, considere el cohete en la figura 15-31, cuyo peso es **W** y que asciende contra una fuerza de resistencia atmosférica $\mathbf{F}_D$. El volumen de control que se considerará se compone de la masa del cohete y de la masa del gas expulsado, m_e. Al aplicar la ecuación 15-28 se obtiene

$$(+\uparrow) \qquad -F_D - W = \frac{W}{g}\frac{dv}{dt} - v_{D/e}\frac{dm_e}{dt}$$

El último término de esta ecuación representa el *empuje* **T** que el escape del motor ejerce en el cohete, figura 15-31. Si reconocemos que $dv/dt = a$, entonces podemos escribir

$$(+\uparrow) \qquad T - F_D - W = \frac{W}{g}a$$

Si se traza un diagrama de cuerpo libre del cohete, es obvio que esta ecuación representa una aplicación de $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para el cohete.

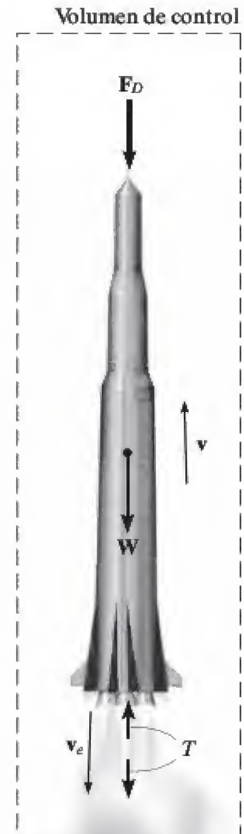
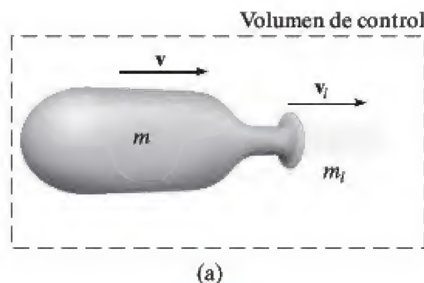


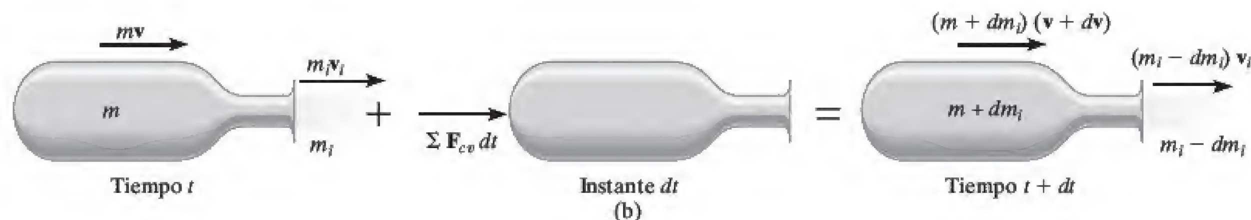
Fig. 15-31

Un volumen de control que gana masa. Un dispositivo, como un cucharón o una pala, pueden ganar masa al moverse hacia delante. Por ejemplo, el dispositivo que se ilustra en la figura 15-32*a* tiene una masa m y se mueve hacia delante con una velocidad **v**. En este momento, el dispositivo recopila una corriente de partículas de masa m_i. La velocidad de flujo $\mathbf{v}_i$ de esta masa inyectada es constante e independiente de la velocidad **v** de modo que $v > v_i$. El volumen de control que se considerará aquí incluye tanto la masa del dispositivo como la masa de las partículas inyectadas.



(a)

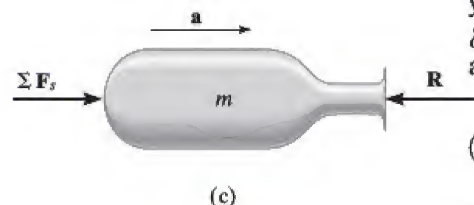
Fig. 15-32



(b)

15

Los diagramas de impulso y cantidad de movimiento se muestran en la figura 15-32*b*. Junto con un incremento de masa dm_i adquirido por el dispositivo, existe un supuesto incremento de la velocidad $d\mathbf{v}$ durante el intervalo de tiempo dt. Este incremento lo causa el impulso creado por $\Sigma\mathbf{F}_{cv}$, la resultante de todas las fuerzas *que actúan en el volumen de control* en la dirección del movimiento. La suma de las fuerzas no incluye la fuerza de retardo de la masa inyectada que actúa en el dispositivo. ¿Por qué? Al aplicar el principio de impulso y cantidad de movimiento al volumen de control, tenemos



(c)

Fig. 15-32 (cont.)

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \quad mv + m_iv_i + \Sigma F_{cv}\,dt = (m + dm_i)(v + dv) + (m_i - dm_i)v_i$$

Si utilizamos el mismo procedimiento que en el caso anterior, podemos escribir esta ecuación como

$$\Sigma F_{cv} = m\frac{dv}{dt} + (v - v_i)\frac{dm_i}{dt}$$

Como la velocidad del dispositivo vista por un observador que se mueve junto con las partículas de la masa inyectada es $v_{D/i} = (v - v_i)$, el resultado final puede escribirse como

$$\boxed{\Sigma F_{cv} = m\frac{dv}{dt} + v_{D/i}\frac{dm_i}{dt}} \qquad (15\text{-}29)$$



El cajón rascador detrás de este tractor representa un dispositivo que gana masa. Si el tractor mantiene una velocidad constante v, entonces $dv/dt = 0$ y, como la tierra originalmente está en reposo, $v_{D/i} = v$. Al aplicar la ecuación 15-29, la fuerza de remolque horizontal en el cajón rascador es entonces $T = 0 + v(dm/dt)$, donde dm/dt es la cantidad de tierra acumulada en el cajón.

donde dm_i/dt es la proporción de masa inyectada al dispositivo. El último término de esta ecuación representa la magnitud de la fuerza $\mathbf{R}$, que la masa inyectada *ejerce en el dispositivo*, figura 15-32*c*. Como $dv/dt = a$, la ecuación 15-29 se escribe

$$\Sigma F_{cv} - R = ma$$

Ésta es la aplicación de $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Como en el caso de problemas de flujo continuo que se resuelven con las ecuaciones 15-28 y 15-29 deberán ir acompañados por un volumen de control identificado y el diagrama de cuerpo libre necesario. Con el diagrama podemos determinar entonces ΣF_{cv} y aislar la fuerza ejercida en el dispositivo por la corriente de partículas.

EJEMPLO 15.18

La masa inicial combinada de un cohete y su combustible es m_0. Una masa total m_f se consume a una proporción constante de $dm_e/dt = c$ y expele a una tasa constante de u con respecto al cohete. Determine la velocidad máxima de éste, es decir, en el instante en que el combustible se agota. Ignore el cambio del peso del cohete con la altitud y la resistencia al avance del aire. El cohete se lanza verticalmente desde el punto de reposo.



SOLUCIÓN

Como el cohete pierde masa al ascender, para la solución puede utilizarse la ecuación 15-28. La única *fuerza externa* que actúa en el *volumen de control* compuesto del cohete y una parte de la masa expelida es el peso **W**, figura 15-33. Por consiguiente,

$$+\uparrow \Sigma F_{cv} = m\frac{dv}{dt} - v_{D/e}\frac{dm_e}{dt}; \qquad -W = m\frac{dv}{dt} - uc \qquad (1)$$

La velocidad del cohete se obtiene integrando esta ecuación.

En cualquier momento dado t durante el vuelo, la masa de cohete puede expresarse como $m = m_0 - (dm_e/dt)t = m_0 - ct$. Como $W = mg$, la ecuación 1 se escribe

$$-(m_0 - ct)g = (m_0 - ct)\frac{dv}{dt} - uc$$

Al separar las variables e integrarlas, así como tener en cuenta que $v = 0$ cuando $t = 0$, tenemos

$$\int_0^v dv = \int_0^t \left(\frac{uc}{m_0 - ct} - g\right) dt$$

$$v = -u\ln(m_0 - ct) - gt\Big|_0^t = u\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - ct}\right) - gt \qquad (2)$$

Observe que el despegue requiere que el primer término de la derecha sea mayor que el segundo durante la fase inicial del movimiento. El tiempo t' requerido para consumir todo el combustible es

$$m_f = \left(\frac{dm_e}{dt}\right)t' = ct'$$

Por consiguiente,

$$t' = m_f/c$$

Si sustituimos en la ecuación 2 tenemos

$$v_{máx} = u\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m_f}\right) - \frac{gm_f}{c} \qquad \textbf{Resp.}$$

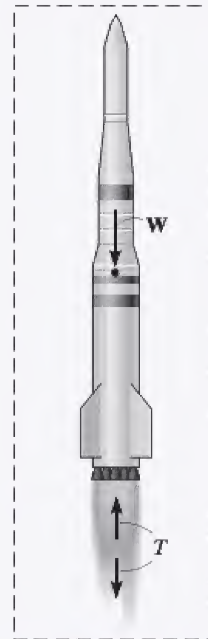
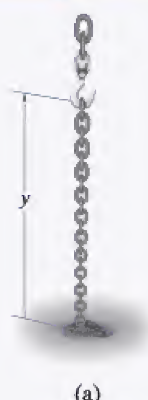


Fig. 15-33

15

EJEMPLO 15.19



(a)

15

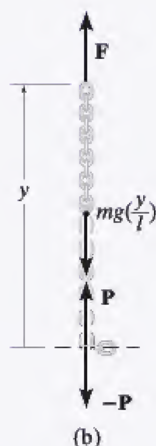
Una cadena de longitud l, figura 15-34a, tiene una masa m. Determine la magnitud de la fuerza **F** requerida para (a) subir la cadena con una rapidez constante v_c, a partir del reposo cuando $y = 0$; y (b) bajarla con una rapidez constante v_c, a partir del punto de reposo cuando $y = l$.

SOLUCIÓN

Parte (a). A medida que sube la cadena, todos los eslabones suspendidos experimentan un impulso repentino hacia abajo por cada eslabón adicional que se levanta del suelo. Por tanto, la *parte suspendida* de la cadena puede considerarse como un dispositivo que está *ganando masa*. El volumen de control que se considerará es la longitud de la cadena y suspendida por **F** en cualquier instante, incluido el siguiente eslabón que está a punto de ser agregado pero que aún está en reposo, figura 15-34b. Las fuerzas que actúan en el volumen de control *excluyen* las fuerzas internas **P** y −**P**, las cuales actúan entre el eslabón agregado y la parte suspendida de la cadena. Por consiguiente, $\Sigma F_{cv} = F - mg(y/l)$.

Para aplicar la ecuación 15-29, también es necesario determinar la razón a la cual se está agregando masa al sistema. La velocidad $\mathbf{v}_c$ de la cadena equivale a $\mathbf{v}_{D/i}$. ¿Por qué? Como v_c es constante, $dv_c/dt = 0$ y $dy/dt = v_c$. Hay que integrar, con la condición inicial de que $y = 0$ cuando $t = 0$, con lo que se obtiene $y = v_c t$. Por tanto, la masa del volumen de control en cualquier instante es $m_{cv} = m(y/l) = m(v_c t/l)$, y por consiguiente la *razón* a la cual se *agrega* masa a la cadena suspendida es

$$\frac{dm_i}{dt} = m\left(\frac{v_c}{l}\right)$$



(b)

Al aplicar la ecuación 15-29 con estos datos, tenemos

$$+\uparrow \Sigma F_{cv} = m\frac{dv_c}{dt} + v_{D/i}\frac{dm_i}{dt}$$

$$F - mg\left(\frac{y}{l}\right) = 0 + v_c m\left(\frac{v_c}{l}\right)$$

Por consiguiente,

$$F = (m/l)(gy + v_c^2) \qquad \textbf{Resp.}$$



(c)

Fig. 15-34

Parte (b). Cuando se baja la cadena, los eslabones expelidos (a los que se imparte una velocidad cero) *no* imparten un impulso a los eslabones suspendidos *restantes*. ¿Por qué? En consecuencia, no se considerará el volumen de control de la parte (a). En su lugar se utilizará la ecuación de movimiento para obtener la solución. En el instante t, la parte de la cadena que aún se va a levantar del suelo es y. El diagrama de cuerpo libre de la parte suspendida de una cadena se muestra en la figura 15-34c. Por tanto,

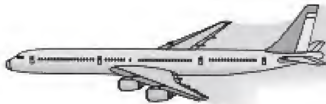
$$+\uparrow \Sigma F = ma; \qquad F - mg\left(\frac{y}{l}\right) = 0$$

$$F = mg\left(\frac{y}{l}\right) \qquad \textbf{Resp.}$$

PROBLEMAS

***15-108.** Un cucharón en la parte delantera del tractor recoge nieve a razón de 200 kg/s. Determine la fuerza de tracción resultante **T** que debe desarrollarse en todas las ruedas cuando avanza hacia delante sobre terreno nivelado a una rapidez constante de 5 km/h. La masa del tractor es de 5 Mg.

•15-109. Un jet jumbo comercial de cuatro motores vuela a una rapidez de crucero de 800 km/h nivelado cuando los cuatro motores están en operación. Cada uno de los motores es capaz de descargar gases de combustión a 775 m/s con respecto al avión. Si durante una prueba dos de los motores, uno en cada lado del avión, se apagan, determine la nueva velocidad de crucero del jet. Suponga que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la rapidez, es decir, $F_D = cv^2$, donde c es una constante que se tiene que determinar. Ignore la pérdida de masa debida al consumo de combustible.



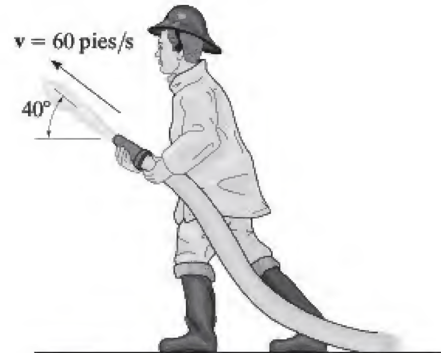
Prob. 15-109

15-110. La masa del dragster de turbina vacío es de 1.25 Mg y carga 250 kg de combustible sólido. Su motor es capaz de quemar el combustible a una razón constante de 50 kg/s, mientras que lo expulsa a 1500 m/s, con respecto al dragster. Determine la rapidez máxima lograda por el dragster a partir del punto de reposo. Suponga que la resistencia del aire es $F_D = (10v^2)$N, donde v es la velocidad del dragster en m/s. Ignore la resistencia al rodamiento.



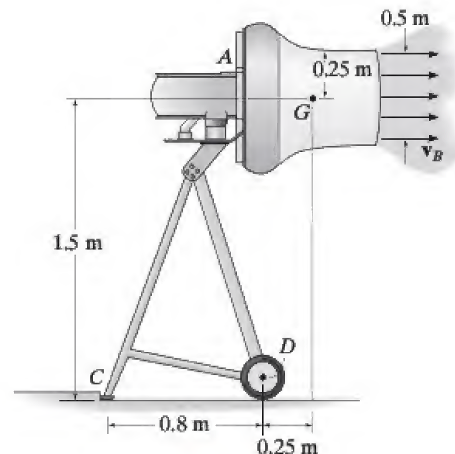
Prob. 15-110

15-111. El bombero de 150 lb sostiene una manguera que tiene una boquilla de 1 pulg de diámetro y el diámetro de la manguera es de 2 pulg. Si la velocidad de descarga de agua es de 60 pies/s, determine las fuerzas de fricción y normal resultantes, que actúan sobre el pie del hombre que está en el suelo. Ignore el peso de la manguera y el peso del agua dentro de ella, $\gamma_w = 62.4$ lb/pie^3.



Prob. 15-111

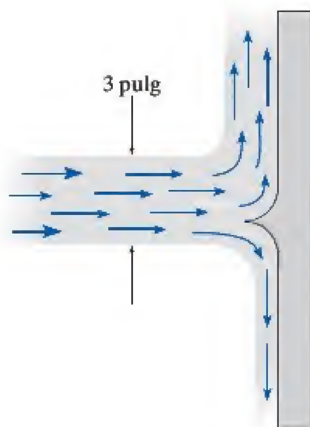
***15-112.** Cuando opera, el ventilador descarga aire con una rapidez de $v_B = 20$ m/s en forma de una corriente de 0.5 m de diámetro. Si la densidad del aire es de 1.22 kg/m^3, determine los componentes horizontal y vertical de la reacción en C y la reacción vertical en cada una de las dos ruedas, D, cuando el ventilador está en operación. El ventilador y el motor tienen una masa de 20 kg y un centro de masa en G. Ignore el peso de la estructura. Por simetría, las dos ruedas soportan una carga igual. Suponga que el aire que entra al ventilador por A está esencialmente en reposo.



Prob. 15-112

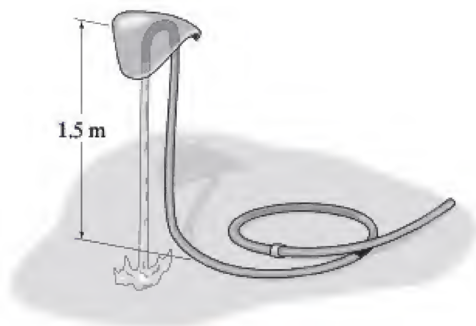
15

•**15-113.** El aspa divide el chorro de agua de 3 pulg de diámetro. Si un cuarto del agua fluye hacia abajo en tanto que los otros tres cuartos lo hacen hacia arriba y el flujo total es $Q = 0.5$ pies^3/s, determine los componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida en el aspa por el chorro, $\gamma_w = 62.4$ lb/pie^3.



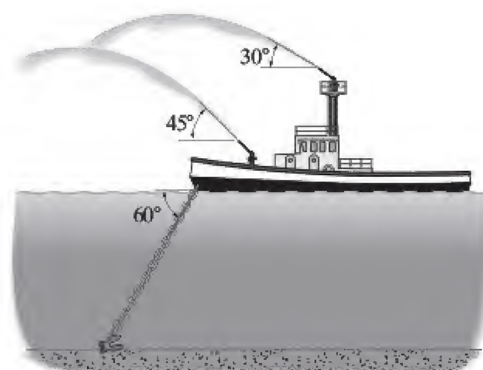
Prob. 15-113

15-114. El rociador de juguete consta de una tapa de 0.2 kg y de una manguera de 30 g/m de masa por longitud. Determine la velocidad de flujo de agua requerida a través del tubo de 5 mm de diámetro, de modo que el rociador se eleve 1.5 m del suelo y revolotee a partir de esta posición. Ignore el peso del agua en el tubo. $\rho_w = 1$ Mg/m^3.



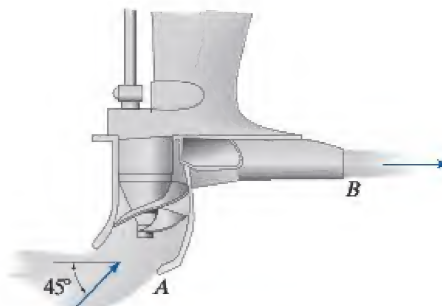
Prob. 15-114

15-115. El bote de bomberos lanza dos chorros de agua de mar, cada uno de 0.25 m^3/s y con una velocidad de salida de 50 m/s. Determine la tensión desarrollada en la cadena del ancla, necesaria para asegurar el bote. La densidad del agua de mar es $\rho_{sw} = 1020$ kg/m^3.



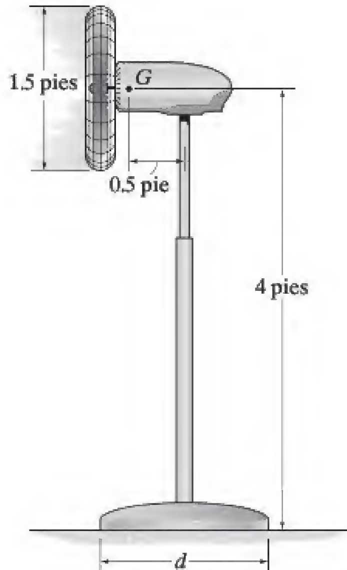
Prob. 15-115

***15-116.** Un bote de carreras es impulsado por el motor de propulsión a chorro que se ilustra. La bomba absorbe agua de mar a razón de 20 pies^3/s a través de un orificio de admisión A de 6 pulg de diámetro. Un impulsor acelera el flujo de agua y hace que salga horizontalmente a través de la boquilla B de 4 pulg de diámetro. Determine los componentes horizontal y vertical del empuje ejercido en el bote. El peso específico del agua de mar es $\gamma_{sw} = 64.3$ lb/pie^3.



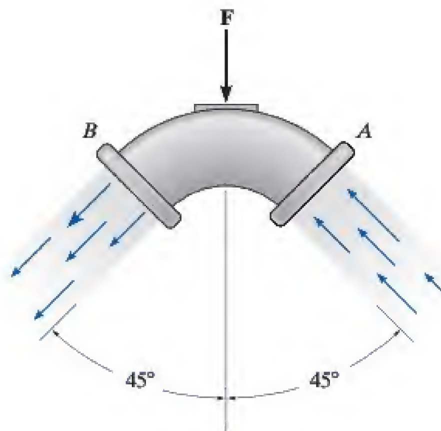
Prob. 15-116

•15-117. El ventilador sopla aire a 6000 pies^3/min. Si el ventilador tiene un peso de 30 lb y un centro de gravedad en G, determine el diámetro mínimo d de su base, de modo que no se ladee. El peso específico del aire es $\gamma = 0.076$ lb/pie^3.



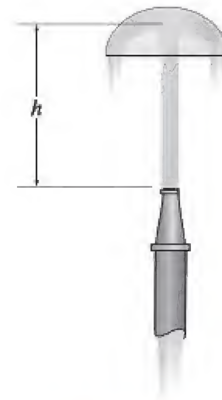
Prob. 15-117

15-118. El codo de un tubo enterrado de 5 pulg de diámetro se somete a una presión estática de 10 lb/pulg^2. La rapidez del agua que pasa a través del tubo es v = 8 pies/s. Suponga que las conexiones del tubo en A y B no ofrecen ninguna resistencia de fuerza vertical en el codo, determine entonces la fuerza vertical resultante **F** que el suelo debe ejercer en el codo para mantenerlo en equilibrio. Ignore el peso del codo y del agua que contiene. $\gamma_w = 62.4$ lb/pie^3.



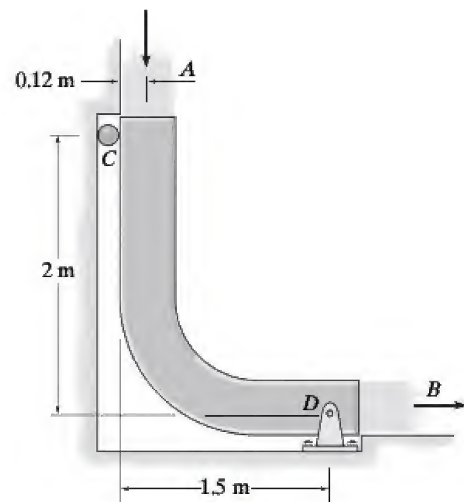
Prob. 15-118

15-119. El tazón semiesférico de masa m se mantiene en equilibrio por el chorro de agua vertical que se descarga a través de una boquilla de diámetro d. Si la descarga de agua a través de la boquilla es Q, determine la altura h a la cual el tazón queda suspendido. La densidad del agua es ρ_w. Ignore el peso del chorro de agua.



Prob. 15-119

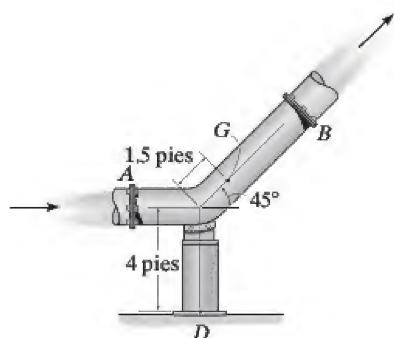
*15-120. Se utiliza el tubo para desviar el flujo de agua, $Q = 0.6$ m^3/s. Si el área de sección transversal del agua es de 0.05 m^2, determine las componentes de fuerza en el pasador D y el rodillo C necesarias para el equilibrio. Ignore el peso del tubo y del agua que contiene, $\rho_w = 1$ Mg/m^3.



Prob. 15-120

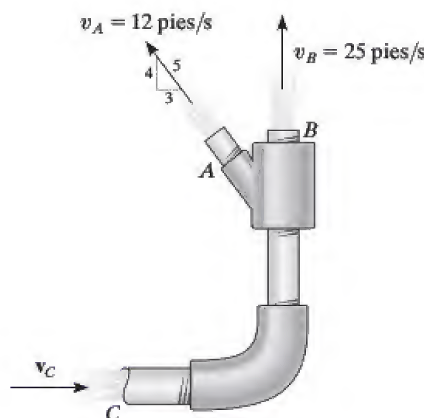
15

•**15-121.** El codo está conectado al tubo con las bridas A y B como se muestra. Si el diámetro del tubo es de 1 pie y a través de él se descargan 50 pies³/s, determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza de reacción y el momento de reacción ejercidos en la base fija D del soporte. El peso total del codo y el agua que contiene es de 500 lb, con su centro de masa en el punto G. La presión manométrica en las bridas A y B son de 15 lb/pulg² y 12 lb/pulg², respectivamente. Suponga que no se transfiere ninguna fuerza a las bridas A y B. El peso específico del agua es $\gamma_w = 62.4$ lb/pie³.



Prob. 15-121

15-122. La presión manométrica del agua en C es de 40 lb/pulg². Si el agua sale del tubo por A y B a velocidades de $v_A = 12$ pies/s y $v_B = 25$ pies/s, determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida en el codo necesaria para mantener el ensamble de tubos en equilibrio. Ignore el peso del agua dentro del tubo y el peso de éste. El diámetro del tubo es de 0.75 pulg en C, y en A y B el diámetro es de 0.5 pulg $\gamma_w = 62.4$ lb/pie³.



Prob. 15-122

15-123. La masa de un misil (sin combustible) es de 1.5 Mg. Si consume 500 kg de combustible sólido a razón de 20 kg/s y lo expulsa con una velocidad de 2000 m/s con respecto al misil, determine su velocidad y aceleración en el momento en que el combustible se ha consumido. Ignore la resistencia del aire y la variación de su peso con la altitud. Se lanza el misil verticalmente desde el punto de reposo.

***15-124.** El cohete y el combustible sólido pesan 65 000 lb. Determine la razón constante a la cual debe quemarse el combustible para que su empuje imparta al cohete una rapidez de 200 pies/s en 10 s a partir del punto de reposo. El combustible sale del cohete a una rapidez relativa de 3000 pies/s con respecto al cohete. Ignore los efectos de la resistencia del aire y suponga que g es constante.



Prob. 15-124

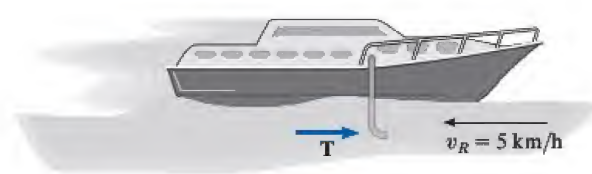
•**15-125.** El helicóptero de 10 Mg carga un balde que contiene 500 kg de agua, la cual se utiliza para apagar incendios. Si se mantiene en una posición fija sobre el terreno y luego descarga 50 kg/s de agua a 10 m/s, medidos con respecto al helicóptero, determine la aceleración inicial hacia arriba que el helicóptero experimenta a medida que descarga el agua.



Prob. 15-125

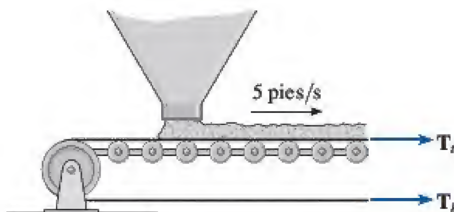
15-126. Una cuchilla situada al frente de una locomotora recoge nieve a razón de 10 pies^3/s y la guarda en el tren. Si la locomotora viaja a una rapidez constante de 12 pies/s, determine la resistencia al movimiento provocada por la acción de traspaleo. El peso específico de la nieve es $\gamma_s = 6$ lb/pie^3.

15-127. La masa del bote es de 180 kg y navega por el río a una velocidad constante de 70 km/h, medida *con respecto* al río. Éste fluye en la dirección opuesta a 5 km/h. Si se coloca un tubo en el agua, como se muestra, y recoge 40 kg de agua en 80 s, determine el empuje horizontal T en el tubo requerido para vencer la resistencia provocada por la recolección de agua y aún así mantener la rapidez constante del bote. $\rho_w = 1$ Mg/m^3.



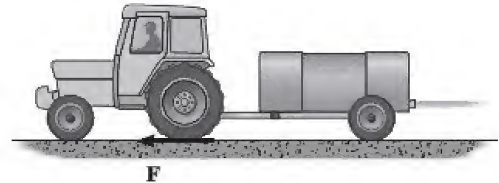
Prob. 15-127

*15-128. La tolva deposita grava sobre la banda transportadora a razón de 1500 lb/min. Si la rapidez de la banda es de 5 pies/s, determine cuánto mayor debe ser la tensión en la parte superior de la banda que en la parte inferior para que la banda avance hacia delante.



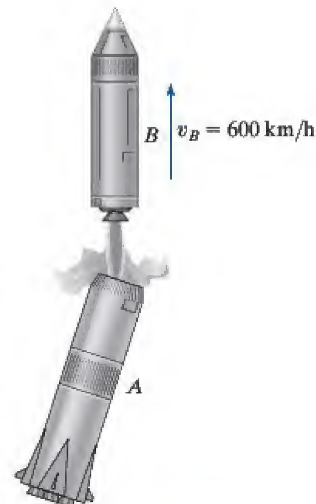
Prob. 15-128

•**15-129.** El tractor junto con el tanque vacío tiene una masa total de 4 Mg. El tanque se llena de 2 Mg de agua. El agua se descarga a una razón constante de 50 kg/s a una velocidad constante de 5 m/s, medida con respecto al tractor. Si éste arranca desde el punto de reposo y las ruedas traseras generan una fuerza de tracción resultante de 250 N, determine la velocidad y aceleración del tractor a medida que el tanque se vacía.



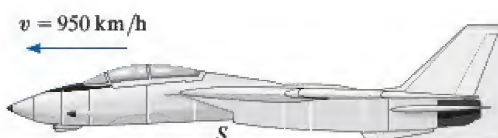
Prob. 15-129

15-130. La segunda etapa B del cohete de dos etapas tiene una masa de 5 Mg (vacío) y se lanza a partir de la primera etapa A con una velocidad inicial de 600 km/h. La masa del combustible en la segunda etapa es de 0.7 Mg y se consume a razón de 4 kg/s. Si el cohete expulsa el combustible a razón de 3 km/s, con respecto a B, determine la aceleración de B en el momento en que se enciende el motor y justo antes de que se consuma todo el combustible. Ignore los efectos de la gravitación y de la resistencia del aire.



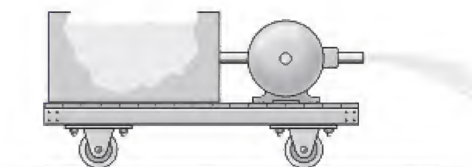
Prob. 15-130

15-131. El avión jet de 12Mg vuela a una rapidez constante de 950 km/h a lo largo de una línea recta horizontal. El aire entra por las cavidades de admisión S a razón de 50 m^3/s. Si el motor quema el combustible a razón de 0.4 kg/s y el gas (aire y combustible) es expulsado con respecto al avión con una rapidez de 450 m/s, determine la fuerza de resistencia al avance ejercida sobre el avión por el aire. Suponga que éste tiene una densidad constante de 1.22 kg/m^3. *Sugerencia:* como tanto entra como sale masa del avión, las ecuaciones 15-28 y 15-29 deben combinarse para obtener $\Sigma F_s = m\frac{dv}{dt} - v_{D/e}\frac{dm_e}{dt} + v_{D/i}\frac{dm_i}{dt}$.



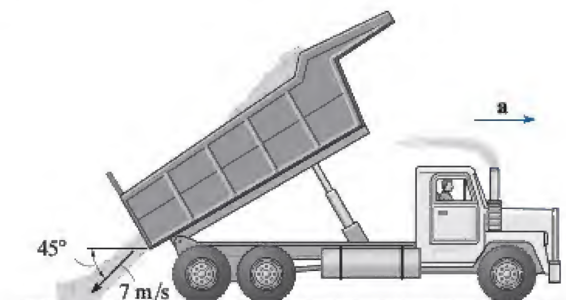
Prob. 15-131

***15-132.** La carretilla tiene una masa M y está llena de agua cuya masa es m_0. Si una bomba expulsa agua a través de una boquilla de sección transversal constante A a una razón constante de v_0 con respecto a la carretilla, determine la velocidad de ésta como una función del tiempo. ¿Cuál es la rapidez máxima de la carretilla si se supone que se puede vaciar toda el agua? La resistencia de fricción al movimiento hacia delante es F. La densidad del agua es ρ.



Prob. 15-132

•15-133. La masa del camión es de 50 Mg cuando está vacío. Al descargar 5 m^3 de arena a una razón constante de 0.8 m^3/s, la arena fluye por la parte trasera a una rapidez de 7 m/s, medida con respecto al camión, en la dirección que se muestra. Si el camión rueda libremente, determine su aceleración inicial en el momento en que la arena comienza a caer. Ignore la masa de las ruedas y cualquier resistencia de fricción al movimiento. La densidad de la arena es $\rho_s = 1520$ kg/m^3.



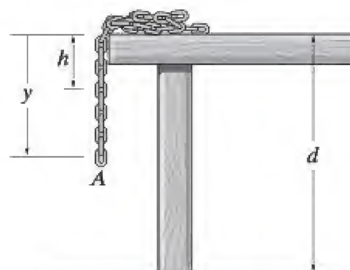
Prob. 15-133

15-134. La masa del camión es m_0 y se utiliza para remolcar la cadena lisa cuya longitud total es l y una masa por unidad de longitud m'. Si en principio la cadena está apilada, determine la fuerza de tracción **F** que deben generar las ruedas traseras del camión, necesaria para mantener una rapidez constante v mientras se desenreda la cadena.



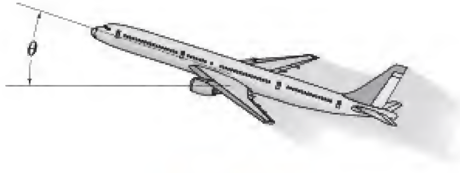
Prob. 15-134

15-135. La longitud total de la cadena es $L < d$ y su masa por unidad de longitud es m'. Si una parte h de la cadena está suspendida sobre la mesa y queda suelta, determine la velocidad de su extremo A como una función de su posición y. Ignore la fricción.



Prob. 15-135

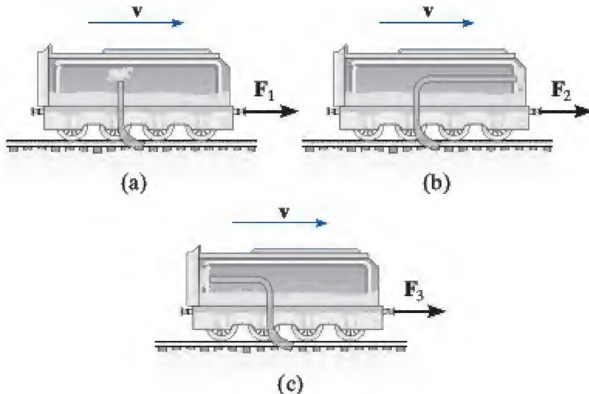
*15-136. Un avión comercial tiene una masa de 150 Mg y vuela a una velocidad de crucero constante de 850 km/h en vuelo nivelado ($\theta = 0°$). Si cada uno de los dos motores aspira aire a una razón constante de 1000 kg/s y lo expulsa a 900 m/s con respecto al avión, determine el ángulo máximo de inclinación θ al cual el avión puede volar a una velocidad constante de 750 km/h. Suponga que la resistencia del aire (resistencia al avance) es proporcional al cuadrado de la velocidad, es decir, $F_D = cv^2$, donde c es una constante que se debe determinar. Los motores operan con la misma potencia en ambos casos. Ignore la cantidad de combustible consumido.



Prob. 15-136

•15-137. Una pesada bobina de cadena abierta se utiliza para reducir la distancia de frenado de un trineo de masa M que viaja a una rapidez de v_0. Determine la masa por unidad de longitud de la cadena necesaria para reducir la velocidad del trineo a $(1/2)v_0$ en una distancia $x = s$ si el trineo se engancha a la cadena cuando $x = 0$. Ignore la fricción entre la cadena y el suelo.

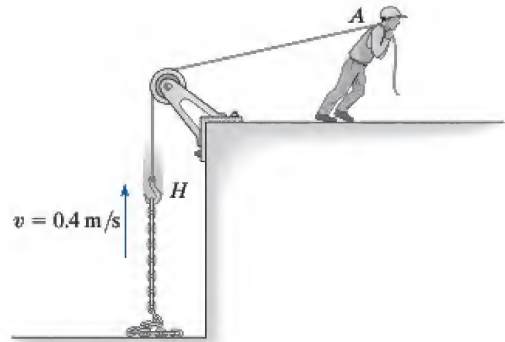
15-138. Se va utilizar el carro para recoger el agua que se acumula en una acequia junto a las vías. Determine la fuerza necesaria para jalar el carro hacia delante a velocidad constante **v** en cada uno de los tres casos. El área de sección transversal del cucharón es A y la densidad del agua es ρ_w.



Prob. 15-138

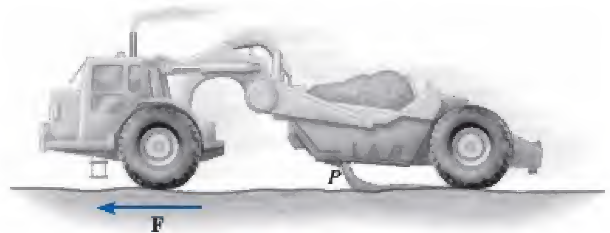
15-139. Un cohete vacío pesa 500 lb y carga 300 lb de combustible. Si éste se quema a razón de 1.5 lb/s y es expulsado a 4400 pies/s con respecto al cohete, determine la rapidez máxima alcanzada por el cohete a partir del punto de reposo. Ignore el efecto de la gravitación en el cohete.

*15-140. Determine la magnitud de la fuerza **F** como una función del tiempo, la cual se debe aplicar al extremo A de una cuerda para levantar el gancho H a una velocidad constante $v = 0.4$ m/s. Inicialmente, la cadena está en reposo en el suelo. Ignore la masa de la cuerda y el gancho. La masa de la cadena es de 2 kg/m.



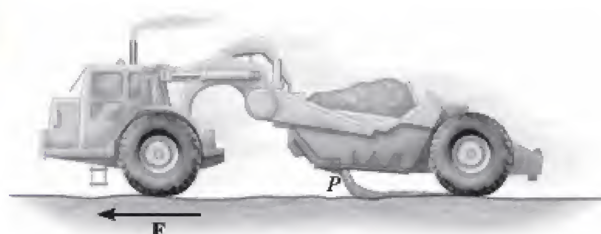
Prob. 15-140

•15-141. En principio, una máquina para mover tierra lleva 10 m³ de arena cuya densidad es de 1520 kg/m³. La arena se descarga horizontalmente a través de una lumbrera P de 2.5 m² a razón de 900 kg/s con respecto a la lumbrera. Si la máquina mantiene una fuerza de tracción resultante constante de $F = 4$ kN en sus ruedas delanteras para avanzar, determine su aceleración cuando se vacía la mitad de la arena. La masa de la máquina vacía es de 30 Mg. Ignore cualquier resistencia al movimiento hacia delante y la masa de las ruedas. Las ruedas traseras giran libres.



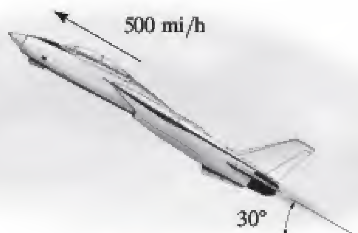
Prob. 15-141

15-142. En principio, una máquina para mover tierra lleva 10 m^3 de arena cuya densidad es de 1520 kg/m^3. La arena se descarga horizontalmente a través de una lumbrera P de 2.5 m^2 a razón de 900 kg/s con respecto a la lumbrera. Determine la fuerza de tracción resultante $\mathbf{F}$ en sus ruedas delanteras si la aceleración de la máquina es de 0.1 m/s^2 cuando se vacía la mitad de la arena. La masa de la máquina vacía es de 30 Mg. Ignore cualquier resistencia al movimiento hacia delante y la masa de las ruedas. Las ruedas traseras giran libres.



Prob. 15-142

15-143. El jet vuela a una rapidez de 500 mi/h, con la horizontal a 30°. Si el combustible se consume a 3 lb/s y el motor aspira aire a 400 lb/s, mientras el gas de escape (aire y combustible) tiene una velocidad relativa de 32 800 pies/s, determine la aceleración del avión en este instante. La resistencia al avance del aire es $F_D = (0.7v^2)$ lb, donde la rapidez se mide en pies/s. El jet pesa 15 000 lb. *Sugerencia:* vea el problema 15-131.



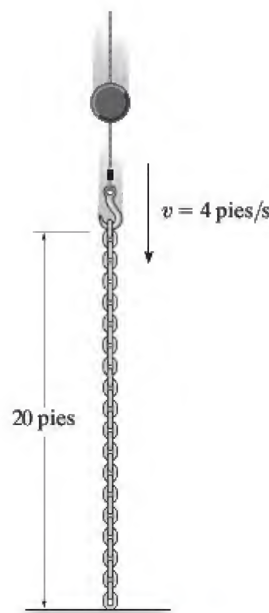
Prob. 15-143

***15-144.** La masa inicial de cohete y combustible es m_0. Por razones prácticas deseadas por la tripulación, se requiere que mantenga una aceleración ascensional constante de a_0. Si el combustible sale del cohete a una velocidad relativa $v_{e/r}$, determine la razón a la cual se debe consumir el combustible para mantener el movimiento. Ignore la resistencia del aire, y suponga que la aceleración gravitacional es constante.



Prob. 15-144

•**15-145.** Si se baja la cadena a una rapidez constante, determine la reacción normal ejercida en el piso como una función del tiempo. La cadena pesa 5 lb/pie y su longitud total es de 20 pies.



Prob. 15-145

PROBLEMAS CONCEPTUALES

P15-1. La pelota de béisbol viaja a la izquierda cuando el bat la golpea. Si la pelota luego se mueve horizontalmente a la derecha, determine qué mediciones podría hacer para determinar el impulso neto impartido a la pelota. Use valores numéricos para dar un ejemplo de cómo se puede hacer esto.



P15-1

P15-2. La "bola" de demolición de acero cuelga de la pluma por medio de una llanta vieja A. El operador de la grúa alza la bola y luego la deja caer libremente para romper el concreto. Explique, con datos numéricos apropiados, por qué es una buena idea utilizar la llanta de caucho en este trabajo.



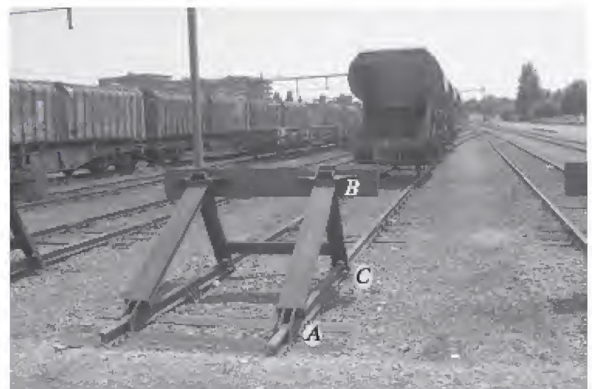
P15-2

P15-3. La máquina de tren del lado izquierdo, A, está en reposo y la del lado derecho, B, rueda libremente hacia la izquierda. Si las máquinas son idénticas, use valores numéricos para demostrar cómo se determina la compresión máxima en cada uno de los parachoques de resorte montados en el frente de las máquinas. Cada máquina rueda libremente.



P15-3

P15-4. Tres carros de ferrocarril tienen la misma masa y ruedan libremente cuando chocan en el parachoques fijo. Las patas AB y BC del parachoques están conectadas con pasador en sus extremos; el ángulo BAC es de 30° y el BCA es de 60°. Compare el impulso promedio en cada pata necesario para detener los carros si éstos no tienen parachoques o si tienen uno de resorte. Use valores numéricos apropiados para explicar su respuesta.



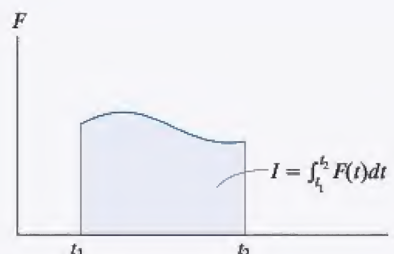
P15-4

REPASO DEL CAPÍTULO

15

Impulso

Un impulso se define como el producto de fuerza por tiempo. Gráficamente representa el área bajo el diagrama $F - t$. Si la fuerza es constante, entonces el impulso es $I = F_c(t_2 - t_1)$.



Principio de impulso y cantidad de movimiento

Cuando combinamos las ecuación de movimiento $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ y la ecuación cinemática, $a = dv/dt$, obtenemos el principio de impulso y cantidad de movimiento. Ésta es una ecuación vectorial que puede descomponerse en componentes rectangulares y utilizarse para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo. Para su aplicación, deberá trazarse el diagrama de cuerpo libre para que cuente con todos los impulsos que actúan sobre la partícula.

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m\mathbf{v}_2$$

Conservación de la cantidad de movimiento lineal

Si se aplica el principio de impulso y cantidad de movimiento a un *sistema de partículas*, entonces las colisiones entre ellas producen impulsos internos que son iguales, opuestos y colineales y, por consiguiente, desaparecen de la ecuación. Además, si un impulso externo es mínimo, es decir, la fuerza es mínima y el tiempo es corto, entonces el impulso puede clasificarse como no impulsor y omitirse. Por consiguiente, la cantidad de movimiento del sistema de partículas se conserva.

$$\Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_1 = \Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_2$$

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento es útil para determinar la velocidad final de una partícula cuando entre dos partículas se ejercen impulsos internos y las velocidades iniciales de ellas se conocen. Si se va a determinar el impulso interno, entonces se aísla una de las partículas y el principio de impulso y cantidad de movimiento se aplica a esta partícula.

Impacto

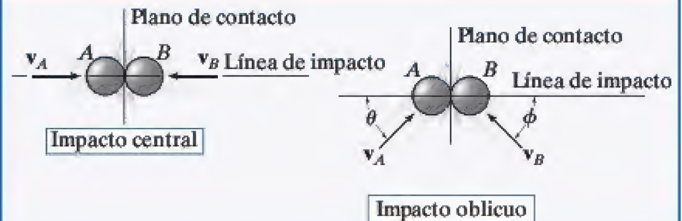
Cuando dos partículas A y B experimentan un impacto directo, el impulso interno entre ellas es igual, opuesto y colineal. Por consiguiente, la conservación de la cantidad de movimiento para este sistema se aplica a lo largo de la línea de impacto.

$$m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2$$

Si se desconocen las velocidades finales, para la solución se requiere una segunda ecuación. Debemos utilizar el coeficiente de restitución e. Este coeficiente determinado experimentalmente depende de las propiedades físicas de las partículas que chocan. Puede expresarse como la relación de su velocidad relativa después de la colisión a su velocidad relativa antes de la colisión. Si la colisión es elástica, no se pierde energía y $e = 1$. Para una colisión plástica $e = 0$.

$$e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$$

Si el impacto es oblicuo, entonces la conservación de la cantidad de movimiento del sistema y la ecuación del coeficiente de restitución aplican a lo largo de la línea de impacto. También la conservación de la cantidad de movimiento de cada partícula aplica perpendicular a esta línea (plano de impacto) porque en esta dirección no actúa ningún impulso en las partículas.



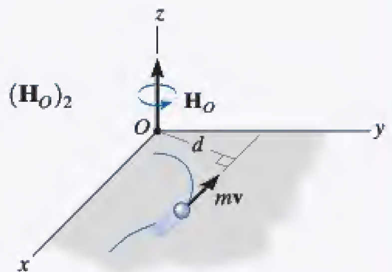
Principio de impulso y cantidad de movimiento angulares

El momento de la cantidad de movimiento lineal con respecto a un eje (z) se llama cantidad de movimiento angular.

$$(H_O)_z = (d)(mv)$$

El principio de impulso y cantidad de movimiento angulares se suele utilizar para eliminar impulsos desconocidos al sumar los momentos con respecto a un eje a través del cual las líneas de acción de estos impulsos no producen ningún momento. Por esta razón, un diagrama de cuerpo libre deberá acompañar a la solución.

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O \, dt = (\mathbf{H}_O)_2$$



Corrientes de fluido continuas

Con frecuencia se utilizan métodos de impulso y cantidad de movimiento para determinar las fuerzas que un dispositivo ejerce en el flujo de masa de un fluido -líquido o gas. Para hacerlo, se traza un diagrama de cuerpo libre de la masa de fluido en contacto con el dispositivo para identificar estas fuerzas. Además, se calcula la velocidad del fluido cuando entra a y sale de un volumen de control del dispositivo. Las ecuaciones de flujo continuo implican sumar las fuerzas y los momentos para determinar estas reacciones.

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{dm}{dt}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)$$

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \frac{dm}{dt}(\mathbf{r}_B \times \mathbf{v}_B - \mathbf{r}_A \times \mathbf{v}_A)$$

Propulsión con masa variable

Algunos dispositivos, como un cohete, pierden masa cuando se impulsan hacia delante. Otros ganan masa, por ejemplo una pala. Podemos tener en cuenta esta pérdida o ganancia de masa si aplicamos el principio de impulso y cantidad de movimiento a un volumen de control del dispositivo. A partir de esta ecuación puede determinarse la fuerza que el flujo de masa ejerce en el dispositivo.

$$\Sigma F_{cv} = m\frac{dv}{dt} - v_{D/e}\frac{dm_e}{dt}$$

Pierde Masa

$$\Sigma F_{cv} = m\frac{dv}{dt} + v_{D/i}\frac{dm_i}{dt}$$

Gana Masa

REPASO

1 Cinemática y cinética de una partícula

Todos los temas y problemas presentados en los capítulos 12 a 15 se han *categorizado* para proporcionar un *enfoque claro* para el aprendizaje de los diversos principios para la solución de problemas implicados. En la práctica de ingeniería, sin embargo, es más importante ser capaz de *identificar* un método apropiado para la solución de un problema particular. A este respecto, debemos entender por completo las limitaciones y el uso de las ecuaciones de dinámica y ser capaces de reconocer cuáles ecuaciones y principios utilizar para solucionar el problema. Por eso, a continuación resumiremos las ecuaciones y principios de dinámica de una partícula y daremos la oportunidad de aplicarlos a varios problemas.

Cinemática. Los problemas de cinemática requieren estudiar la geometría del movimiento sin tener en cuenta las fuerzas que lo provocan. Cuando se aplican las ecuaciones de cinemática, debemos establecer con claridad un origen fijo y seleccionar un sistema de coordenadas apropiado para definir la posición de la partícula. Una vez que se establece la dirección positiva de cada eje de coordenadas, entonces pueden determinarse las direcciones de los componentes de posición, velocidad y aceleración con el signo algebraico de sus cantidades numéricas.

Movimiento rectilíneo. *Aceleración variable.* Si se establece una relación matemática (o gráfica) entre *dos* de las *cuatro* variables s, v, a y t, entonces puede determinarse una *tercera* variable mediante una de las siguientes ecuaciones que relaciona las tres variables.

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt} \qquad a\,ds = v\,dv$$

Aceleración constante. Esté *absolutamente* seguro de que la aceleración es constante cuando se utilicen las siguientes ecuaciones:

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a_c t^2 \qquad v = v_0 + a_c t \qquad v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$$

Movimiento curvilíneo. *Coordenadas x, y, z.* A menudo se utilizan estas coordenadas cuando el movimiento puede descomponerse en componentes rectangulares. También son útiles para estudiar el movimiento de un proyectil, puesto que la aceleración de éste *siempre* está dirigida hacia abajo.

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} & a_x &= \dot{v}_x \\ v_y &= \dot{y} & a_y &= \dot{v}_y \\ v_z &= \dot{z} & a_z &= \dot{v}_z \end{aligned}$$

Coordenadas n, t, b. Estas coordenadas son particularmente ventajosas para estudiar la *aceleración* de la partícula a lo largo de una trayectoria conocida. Esto se debe a que los componentes t y n de **a** representan los distintos cambios de la magnitud y dirección de la velocidad, respectivamente, y estos componentes son fáciles de formular.

$$\begin{aligned} v &= \dot{s} \\ a_t &= \dot{v} = v\frac{dv}{ds} \\ a_n &= \frac{v^2}{\rho} \end{aligned}$$

donde

$$\rho = \left| \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2} \right|$$

cuando resulta la trayectoria $y = f(x)$.

Coordenadas r, θ, z. Estas coordenadas se utilizan cuando se proporcionan datos con respecto al movimiento angular de la coordenada radial r para describir el movimiento de la partícula. Además, algunas trayectorias de movimiento pueden describirse convenientemente con estas coordenadas.

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r} & a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ v_\theta &= r\dot{\theta} & a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ v_z &= \dot{z} & a_z &= \ddot{z} \end{aligned}$$

Movimiento relativo. Si el origen de un sistema de coordenadas *trasladante* se establece en la partícula A, entonces para la partícula B,

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

En este caso un observador fijo en el sistema de coordenadas trasladante mide el movimiento relativo.

Cinética.

Los problemas de cinética implican el análisis de fuerzas que provocan el movimiento. Cuando se aplican las ecuaciones de cinética es absolutamente necesario medir el movimiento con respecto a un *sistema de coordenadas inercial*, es decir, uno que no gire y o que esté fijo o se traslade a velocidad constante. Si un problema requiere la *solución simultánea* de las ecuaciones de cinética y cinemática, entonces es importante que los sistemas de coordenadas seleccionados para escribir cada una de las ecuaciones definan las *direcciones positivas* de los ejes del *mismo* modo.

Ecuaciones de movimiento. Estas ecuaciones se utilizan para determinar la aceleración de la partícula o las fuerzas que provocan el movimiento. Si se utilizan para determinar la posición, velocidad o tiempo de movimiento de una partícula, entonces también debe considerarse la cinemática para completar la solución. Antes de aplicar la ecuación de movimiento, trace siempre un diagrama de cuerpo libre para identificar todas las fuerzas que actúan en la partícula. Además, establezca la dirección de la aceleración de la partícula o sus componentes. (Un diagrama cinético puede acompañar la solución donde aparezca gráficamente el vector $m\mathbf{a}$.)

$$\Sigma F_x = ma_x \qquad \Sigma F_n = ma_n \qquad \Sigma F_r = ma_r$$
$$\Sigma F_y = ma_y \qquad \Sigma F_t = ma_t \qquad \Sigma F_\theta = ma_\theta$$
$$\Sigma F_z = ma_z \qquad \Sigma F_b = 0 \qquad \Sigma F_z = ma_z$$

Trabajo y energía. La ecuación de trabajo y energía representa una forma integrada de la ecuación tangencial de movimiento, $\Sigma F_t = ma_t$, combinada con cinemática ($a_t\,ds = v\,dv$). *Se utiliza para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y desplazamiento*. Antes de aplicar esta ecuación, *trace siempre un diagrama de cuerpo libre* para identificar las fuerzas que realizan trabajo en la partícula.

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

donde

$T = \frac{1}{2}mv^2$	(energía cinética)
$U_F = \int_{s_1}^{s_2} F\cos\theta\,ds$	(trabajo de una fuerza variable)
$U_{F_c} = F_c\cos\theta(s_2 - s_1)$	(trabajo de una fuerza constante)
$U_W = -W\,\Delta y$	(trabajo de un peso)
$U_s = -(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2)$	(trabajo de un resorte elástico)

Si las fuerzas que actúan en la partícula son *fuerzas conservadoras*, es decir, aquellas que *no* disipan energía, como la fricción, entonces aplique la ecuación de la conservación de energía. Esta ecuación es más fácil de usar que la ecuación de trabajo y energía, puesto que se aplica en sólo *dos puntos* de la trayectoria y *no* requiere el cálculo del trabajo realizado por una fuerza a medida que la partícula se mueve a lo largo de la trayectoria.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

donde $V = V_g + V_e$ y

$$V_g = Wy \quad \text{(energía potencial gravitacional)}$$

$$V_e = \tfrac{1}{2}ks^2 \quad \text{(energía potencial elástica)}$$

Si se tiene que determinar la *potencia* desarrollada por una fuerza, use

$$P = \frac{dU}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad de la partícula en la que actúa la fuerza $\mathbf{F}$.

Impulso y cantidad de movimiento. La ecuación de *impulso y cantidad de movimiento lineales* es una forma integrada de la ecuación de movimiento, $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, combinada con cinemática ($\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$). *Se utiliza para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo.* Antes de aplicar esta ecuación, *siempre deberemos trazar el diagrama de cuerpo libre*, para identificar todas las fuerzas que provocan impulsos en la partícula. Con el diagrama se identificarán las fuerzas impulsoras y no impulsoras. Recuerde que las fuerzas no impulsoras pueden omitirse en el análisis durante el tiempo de impacto. Además, establezca la dirección de la velocidad de la partícula justo antes y justo después de que se aplican los impulsos. Como un procedimiento alternativo, los diagramas de impulso y cantidad de movimiento pueden acompañar la solución para incluir gráficamente los términos de la ecuación.

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2$$

Si varias partículas intervienen en el problema, considere aplicar la *conservación de la cantidad de movimiento* al sistema para eliminar los impulsos internos del análisis. Esto puede hacerse en una dirección especificada, siempre que no actúen impulsos externos en las partículas en esa dirección.

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 = \Sigma m\mathbf{v}_2$$

Si el problema implica impacto y se presenta el coeficiente de restitución e, entonces aplique la siguiente ecuación.

$$e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1} \quad \text{(a lo largo de la línea de impacto)}$$

Recuerde que durante el impacto el principio de trabajo y energía no puede utilizarse, puesto que las partículas se deforman, y por consiguiente no se conocerá el trabajo realizado por las fuerzas internas. Sin embargo, para determinar la pérdida de energía durante la colisión, puede usarse el principio de trabajo y energía una vez que se determinan las velocidades inicial y final de la partícula.

El *principio de impulso y cantidad de movimiento angulares* y la *conservación de la cantidad de movimiento angular* pueden aplicarse con respecto a un eje para *eliminar* algunos de los impulsos desconocidos que actúan en la partícula durante el periodo cuando se estudia su movimiento. La investigación del diagrama de cuerpo libre de la partícula (o el diagrama de impulso) ayudará a seleccionar el eje para su aplicación.

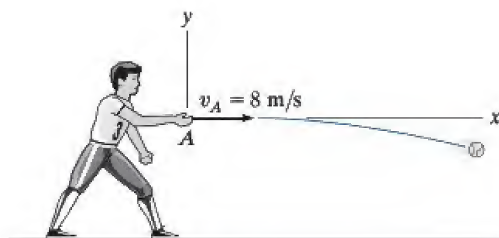
$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$$

Los siguientes problemas brindan la oportunidad de aplicar los conceptos anteriores. Se presentan en *orden aleatorio* para adquirir práctica en la identificación de diversos tipos de problemas y desarrollar las habilidades necesarias para su solución.

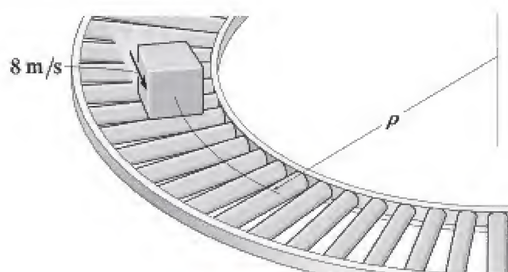
PROBLEMAS DE REPASO

R1-1. La pelota se lanza horizontalmente con una rapidez de 8 m/s. Determine la ecuación de la trayectoria, $y = f(x)$ y luego determine la velocidad de la pelota y las componentes normal y tangencial de la aceleración cuando $t = 0.25$ s.



Prob. R1-1

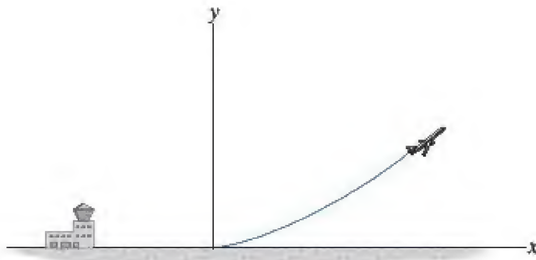
R1-2. Se requiere que cajas de cartón de 5 kg de masa se muevan a lo largo de la línea de ensamble con una rapidez constante de 8 m/s. Determine el radio de curvatura mínimo, ρ, de la transportadora para que las cajas de cartón no resbalen. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre las cajas de cartón y la transportadora son, respectivamente, $\mu_s = 0.7$ y $\mu_k = 0.5$.



Prob. R1-2

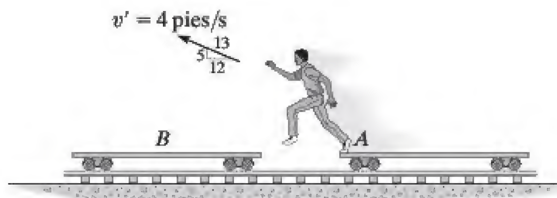
R1-3. Una partícula de metal desciende a través de un fluido mientras se ve sometida a la atracción de un campo magnético de modo que su posición es $s = (15t^3 - 3t)$mm, donde t está en segundos. Determine (a) el desplazamiento de la partícula de $t = 2$ s a $t = 4$ s, y (b) la velocidad y aceleración de la partícula cuando $t = 5$ s.

***R1-4.** La trayectoria de vuelo de un jet al despegar está definida por las ecuaciones paramétricas $x = 1.25t^2$ y $y = 0.03t^3$, donde t es el tiempo después del despegue, medido en segundos, y x y y lo están en metros. Si el avión comienza a nivelarse cuando $t = 40$ s, determine en este instante (a) la distancia horizontal a que está del aeropuerto, (b) su altitud, (c) su rapidez, y (d) la magnitud de su aceleración.



Prob. R1-4

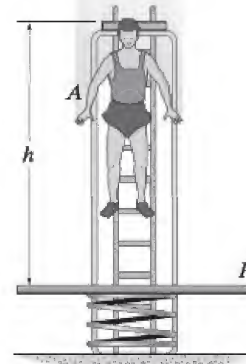
R1-5. El muchacho salta de la carretilla plana A con una velocidad de $v' = 4$ pies/s con respecto a la carretilla como se muestra. Si cae en la segunda carretilla plana B, determine la rapidez final de ambas carretillas después del movimiento. Cada carretilla pesa 80 lb. El muchacho pesa 60 lb. En un principio, las dos carretillas están en reposo. Ignore la masa de las ruedas de las carretillas.



Prob. R1-5

R1-6. El hombre A pesa 175 lb y salta desde el punto de reposo a una altura $h = 8$ pies sobre una plataforma P que pesa 60 lb. La plataforma está montada sobre un resorte de rigidez $k = 200$ lb/pie. Determine (a) las velocidades de A y P justo después del impacto y (b) la compresión máxima impartida al resorte por el impacto. Suponga que el coeficiente de restitución entre el hombre y la plataforma es $e = 0.6$ y que el hombre se mantiene rígido durante el movimiento.

R1-7. El hombre A pesa 100 lb y salta desde el punto de reposo a una plataforma P de 60 lb de peso. La plataforma está montada sobre un resorte de rigidez $k = 200$ lb/pie. Si el coeficiente de restitución entre el hombre y la plataforma es $e = 0.6$ y el hombre se mantiene rígido durante el movimiento, determine la altura requerida h del salto si la compresión máxima del resorte es de 2 pies.



Probs. R1-6/7

***R1-8.** El furgón de equipaje A tiene una masa de 800 kg y se utiliza para jalar cada uno de los carros de 300 kg. Determine la tensión en los acoplamientos B y C si la fuerza de tracción **F** en el furgón es $F = 480$ N. ¿Cuál es la rapidez del furgón cuando $t = 2$ s, a partir del punto de reposo? Las ruedas de los carros giran libremente. Ignore la masa de las ruedas.

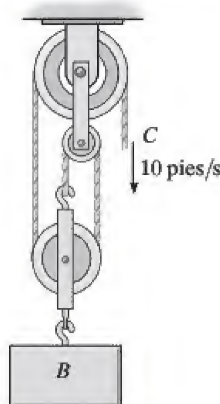
R1-9. El furgón de equipaje A tiene una masa de 800 kg y se utiliza para jalar cada uno de los carros de 300 kg. Si la fuerza de tracción **F** en el furgón es $F = 480$ N, determine la aceleración del furgón. ¿Cuál es la aceleración del furgón si el acoplamiento C falla de repente? Las ruedas de los carros giran libremente. Ignore la masa de las ruedas.



Probs. R1-8/9

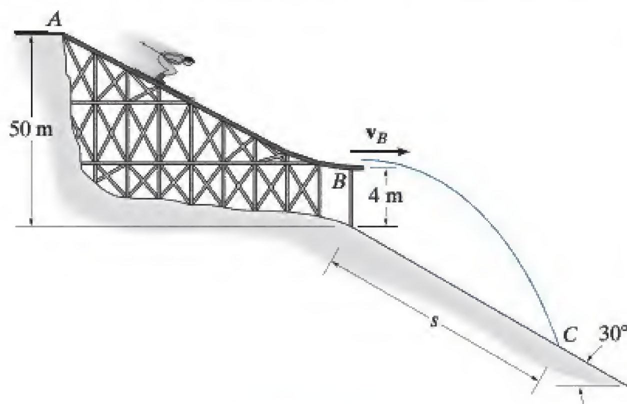
R1-10. Un automóvil viaja a 80 pies/s cuando de repente se aplican los frenos, lo que ocasiona una desaceleración constante de 10 pies/s^2. Determine el tiempo requerido para detener el automóvil y la distancia recorrida antes de detenerse.

R1-11. Determine la rapidez del bloque B si el extremo C del cable se jala hacia abajo con una rapidez de 10 pies/s. ¿Cuál es la velocidad relativa del bloque con respecto a C?



Prob. R1-11

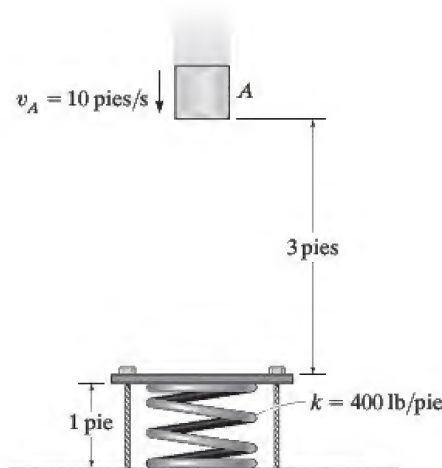
***R1-12.** El esquiador arranca desde el punto de reposo en A y desciende por la rampa. Si pueden omitirse la fricción y la resistencia del aire, determine su rapidez v_B cuando llega a B. Además, calcule la distancia s donde toca el suelo en C, si salta horizontalmente en B. Ignore la estatura del esquiador. Su masa es de 70 kg.



Prob. R1-12

R1-13. La posición de una partícula está definida por $\mathbf{r} = \{5(\cos 2t)\mathbf{i} + 4(\text{sen } 2t)\mathbf{j}\}$m, donde t está en segundos y los argumentos del seno y coseno se dan en radianes. Determine las magnitudes y la velocidad y aceleración de la partícula cuando $t = 1$ s. Además, demuestre que la trayectoria de la partícula es elíptica.

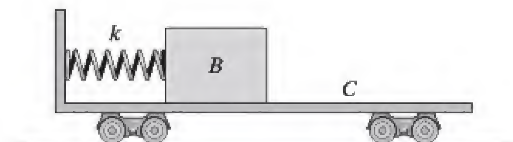
R1-14. Al caer sobre la plataforma, el cilindro de 5 lb pasa por A a una rapidez $v_A = 10$ pies/s. Determine el desplazamiento máximo de la plataforma, ocasionado por la colisión. La longitud no alargada del resorte es de 1.75 pies y originalmente se mantiene comprimido por los cables de 1 pie de largo sujetos a la plataforma. Ignore la masa de la plataforma y el resorte y cualquier energía perdida durante la colisión.



Prob. R1-14

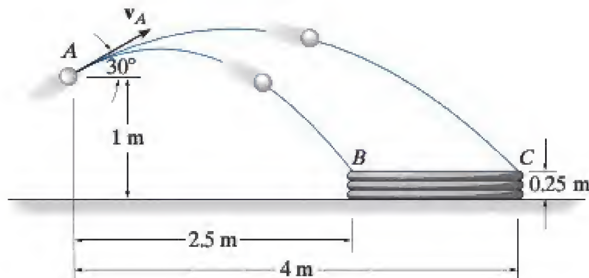
R1-15. El bloque tiene una masa de 50 kg y descansa sobre la superficie de la carretilla que tiene una masa de 75 kg. Si el resorte que está conectado a la carretilla, y no el bloque, se comprime 0.2 m y el sistema se libera desde el punto de reposo, determine la rapidez del bloque después de que el resorte recupera su forma no deformada. Ignore la masa de las ruedas de la carretilla y el resorte en el cálculo. También ignore la fricción. Considere $k = 300$ N/m.

***R1-16.** El bloque tiene una masa de 50 kg y descansa sobre la superficie de la carretilla que tiene una masa de 75 kg. Si el resorte que está conectado a la carretilla, y no el bloque, se comprime 0.2 m y el sistema se libera desde el punto de reposo, determine la rapidez del bloque con respecto a la carretilla después de que el resorte recupera su forma no deformada. Ignore la masa de las ruedas de la carretilla y el resorte en el cálculo. También ignore la fricción. Considere $k = 300$ N/m.



Probs. R1-15/16

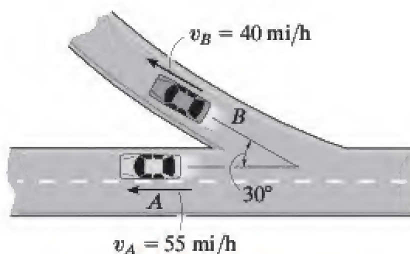
R1-17. Se lanza una bola desde el punto A a un ángulo de 30°. Determine la rapidez máxima y mínima v_A que puede tener de modo que caiga en el recipiente.



Prob. R1-17

R1-18. En el instante que se muestra, los automóviles A y B viajan a velocidades de 55 mi/h y 40 mi/h, respectivamente. Si B incrementa su rapidez a razón de 1200 mi/h^2, mientras A mantiene su rapidez constante, determine la velocidad y aceleración de B con respecto a A. El automóvil B toma la curva cuyo radio de curvatura es de 0.5 mi.

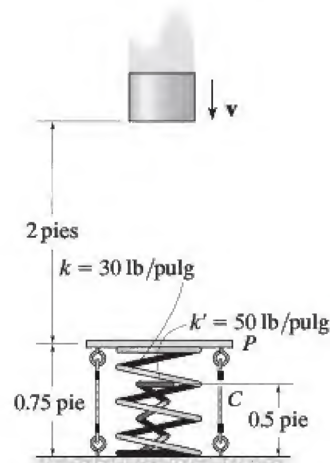
R1-19. En el instante mostrado, los carros A y B viajan a velocidades de 55 mi/h y 40 mi/h, respectivamente. Si B reduce su rapidez a razón de 1500 mi/h^2, mientras A incrementa su rapidez a razón de 800 mi/h^2, determine la aceleración de B con respecto a A. El carro B toma la curva cuyo radio de curvatura es de 0.75 mi.



Probs. R1-18/19

***R1-20.** Cuatro cables no elásticos C están conectados a una placa P y mantienen el resorte de 1 pie de largo comprimido 0.25 pie cuando *no hay peso* sobre la placa. Además, hay un resorte no deformado colocado adentro de este resorte comprimido. Si el bloque que pesa 10 lb se mueve hacia abajo a $v = 4$ pies/s, cuando está a 2 pies sobre la placa, determine la compresión máxima en cada resorte después de que choca con la placa. Ignore la masa de ésta y los resortes, y cualquier energía perdida en la colisión.

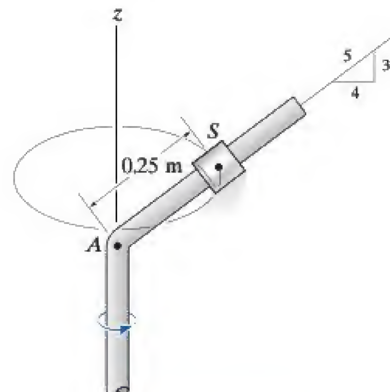
R1-21. Cuatro cables no elásticos C están conectados a una placa P y mantienen el resorte de 1 pie de largo comprimido 0.25 pies cuando *no hay peso* sobre la placa. También hay un resorte no deformado de 0.5 pies de largo colocado adentro de este resorte comprimido. Determine la rapidez v del bloque de 10 lb cuando está a 2 pies sobre la placa, de modo que después de que toca la placa, comprime el resorte de adentro, cuya rigidez es de 50 lb/pulg, una cantidad de 0.20 pie. Ignore la masa de la placa y los resortes y cualquier energía perdida en la colisión.



Probs. R1-20/21

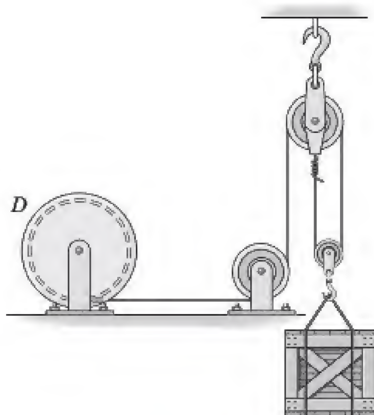
R1-22. El carrete de 2 kg S, cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.2$, ajusta flojo en la barra inclinada rotatoria. Si el carrete está a 0.25 m de A, determine la rapidez constante mínima que el carrete puede tener para que no se resbale hacia abajo de la barra.

R1-23. El carrete de 2 kg S, cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.2$, ajusta flojo en la barra inclinada rotatoria. Si el carrete está a 0.25 m de A, determine la rapidez constante máxima que el carrete puede tener para que no se deslice hacia arriba de la barra.



Probs. R1-22/23

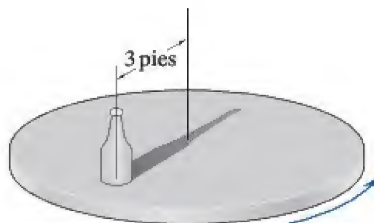
***R1-24.** El tambor D enrolla el cable a una razón acelerada de 5 m/s^2. Determine la tensión en el cable si el embalaje suspendido tiene una masa de 800 kg.



Prob. R1-24

R1-25. La botella está a una distancia de 3 pies del centro de la plataforma horizontal. Si el coeficiente de fricción estática de la botella y la plataforma es $\mu_s = 0.3$, determine la rapidez máxima que la botella puede alcanzar antes de que se deslice. Suponga que el movimiento angular de la plataforma se incrementa lentamente.

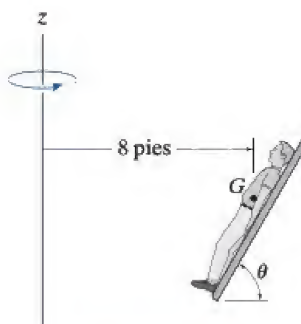
R1-26. Resuelva el problema R1-25 suponiendo que la plataforma comienza a girar desde el punto de reposo de modo que la rapidez de la botella se incrementa a 2 pies/s^2.



Probs. R1-25/26

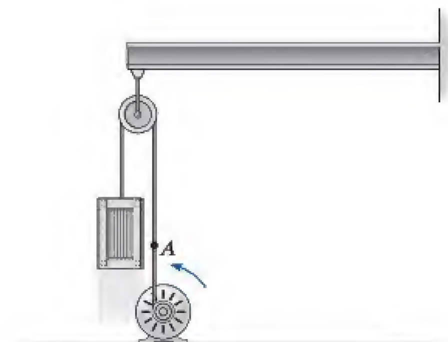
R1-27. El hombre de 150 lb está recargado en el cojín cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.5$. Determine las fuerzas normal y de fricción resultantes que el cojín ejerce en él si, debido a la rotación con respecto al eje z, tiene una rapidez constante $v = 20$ pies/s. Ignore la estatura del hombre. Considere $\theta = 60°$.

***R1-28.** El hombre de 150 lb está recargado en el cojín cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.5$. Si gira con respecto al eje z con una rapidez constante $v = 30$ pies/s, determine el ángulo θ mínimo del cojín al cual el hombre comienza a deslizarse hacia arriba del cojín.



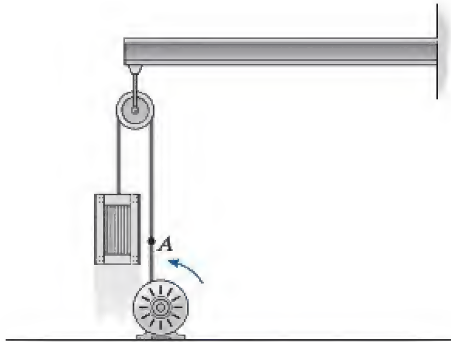
Probs. R1-27/28

R1-29. El motor tira del cable A con una fuerza $F = (30 + t^2)$lb, donde t está en segundos. Si el embalaje de 34 lb originalmente está en reposo en el suelo cuando $t = 0$, determine su rapidez cuando $t = 4$ s. Ignore la masa de cable y poleas. *Sugerencia:* primero determine el tiempo requerido para comenzar a levantar el embalaje.



Prob. R1-29

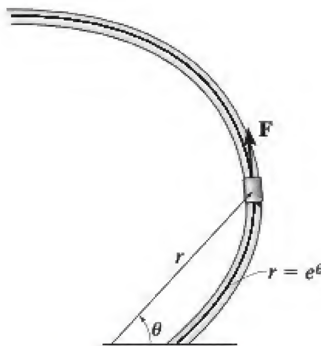
R1-30. El motor tira del cable A con una fuerza $F = (e^{2t})$lb, donde t está en segundos. Si el embalaje de 34 lb originalmente está en reposo en el suelo cuando $t = 0$, determine su velocidad cuando $t = 2$ s. Ignore la masa de cable y poleas. *Sugerencia:* primero determine el tiempo requerido para comenzar a levantar el embalaje.



Prob. R1-30

R1-31. El collarín tiene una masa de 2 kg y se desplaza a lo largo de la barra *horizontal* lisa definida por la espiral equiangular $r = (e^{\theta})$m, donde θ está en radianes. Determine la fuerza tangencial **F** y la fuerza normal **N** que actúan en el collarín cuando $\theta = 45°$, si la fuerza **F** mantiene un movimiento angular constante $\dot{\theta} = 2$ rad/s.

***R1-32.** El collarín tiene una masa de 2 kg y se desplaza a lo largo de la barra *horizontal* lisa definida por la espiral equiangular $r = (e^{\theta})$m, donde θ está en radianes. Determine la fuerza tangencial **F** y la fuerza normal **N** que actúan en el collarín cuando $\theta = 90°$, si la fuerza **F** mantiene un movimiento angular constante $\dot{\theta} = 2$ rad/s.

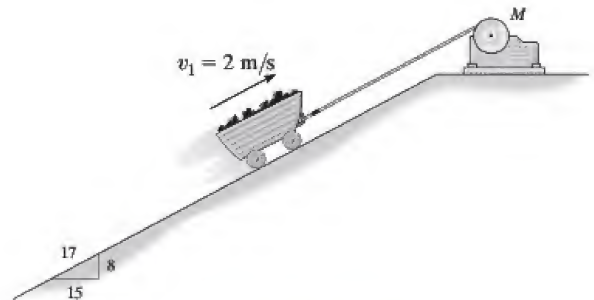


Probs. R1-31/32

R1-33. La aceleración de una partícula a lo largo de una línea recta está definida por $a = (2t - 9)\text{m/s}^2$, donde t está en segundos. Cuando $t = 0$, $s = 1$ m y $v = 10$ m/s. Cuando $t = 9$ s, determine (a) la posición de la partícula, (b) la distancia total recorrida y (c) la velocidad. Suponga que la dirección positiva es hacia la derecha.

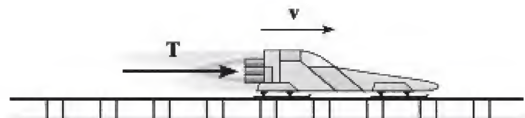
R1-34. La vagoneta de mina de 400 kg es remolcada cuesta arriba por medio del cable y el motor M. Durante un corto tiempo, la fuerza en el cable es $F = (3200t^2)$N, donde t está en segundos. Si la velocidad inicial de la vagoneta es $v_1 = 2$ m/s, cuando $t = 0$, determine su velocidad cuando $t = 2$ s.

R1-35. La vagoneta de mina de 400 kg es remolcada cuesta arriba por medio del cable y el motor M. Durante un corto tiempo, la fuerza en el cable es $F = (3200t^2)$N, donde t está en segundos. Si la velocidad inicial de la vagoneta es $v_1 = 2$ m/s, cuando $s = 0$ y $t = 0$, determine la distancia que recorre cuesta arriba cuando $t = 2$ s.



Probs. R1-34/35

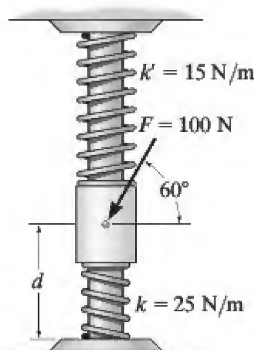
***R1-36.** El trineo de cohete tiene una masa de 4 Mg y se desplaza a lo largo de una vía horizontal lisa de modo que mantiene una potencia de salida constante de 450 kW. Ignore la pérdida de masa de combustible y la resistencia del aire y determine qué distancia debe recorrer para alcanzar una velocidad de $v = 60$ m/s a partir del punto de reposo.



Prob. R1-36

R1-37. El collarín tiene una masa de 20 kg y puede deslizarse libremente sobre la barra lisa. Los resortes conectados no están deformados cuando $d = 0.5$ m. Determine la rapidez del collarín después de que la fuerza aplicada $F = 100$ N hace que desplace de modo que $d = 0.3$ m. Cuando $d = 0.5$ m el collarín está en reposo.

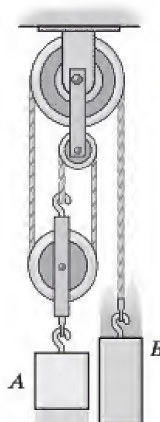
R1-38. El collarín tiene una masa de 20 kg y puede deslizarse libremente sobre la barra lisa. Los resortes conectados se comprimen 0.4 m cuando $d = 0.5$ m. Determine la rapidez del collarín después de que la fuerza aplicada $F = 100$ N hace que desplace de modo que $d = 0.3$ m. Cuando $d = 0.5$ m el collarín está en reposo.



Probs. R1-37/38

R1-39. El ensamble se compone de dos bloques A y B, los cuales tienen masas de 20 kg y 30 kg, respectivamente. Determine la rapidez de cada bloque cuando B desciende 1.5 m. Los bloques se sueltan desde el punto de reposo. Ignore la masa de las poleas y las cuerdas.

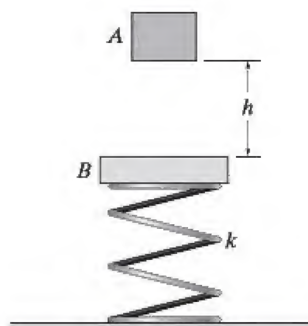
***R1-40.** El ensamble se compone de dos bloques A y B, los cuales tienen masas de 20 kg y 30 kg, respectivamente. Determine la distancia que B debe descender para que A alcance una rapidez de 3 m/s a partir del punto de reposo.



Probs. R1-39/40

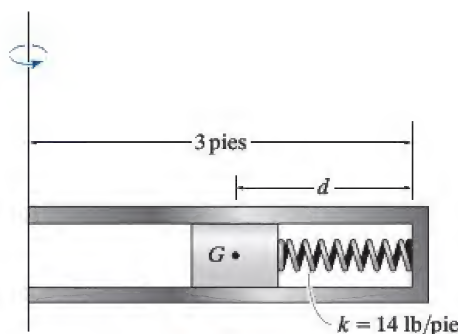
R1-41. La masa del bloque A es m y se suelta desde el punto de reposo, cae una distancia h y choca con la placa B cuya masa es $2m$. Si el coeficiente de restitución entre A y B es e, determine la velocidad de la placa justo después de la colisión. La rigidez del resorte es k.

R1-42. La masa del bloque A es de 2 kg y se suelta desde el punto de reposo, cae una distancia $h = 0.5$ m, y choca con la placa B de 3 kg de masa. Si el coeficiente de restitución entre A y B es $e = 0.6$, determine la velocidad del bloque justo después de la colisión. La rigidez del resorte es $k = 30$ N/m.



Probs. R1-41/42

R1-43. El tapón cilíndrico pesa 2 lb y se mueve libremente dentro de los confines del tubo liso. La rigidez del resorte es $k = 14$ lb/pie y cuando no hay movimiento $d = 0.5$ pies. Determine la fuerza del resorte en el tapón cuando el tapón está en reposo con respecto al tubo. El tapón se desplaza en un círculo con una rapidez constante de 15 pies/s, la cual es provocada por la rotación del tubo alrededor del eje vertical. Ignore el tamaño del tapón.



Prob. R1-43

***R1-44.** Se dispara una bala de 20 g horizontalmente contra el bloque de 300 g el cual descansa sobre la superficie lisa. Después de que la bala se incrusta en el bloque, éste se mueve a la derecha 0.3 m antes de detenerse momentáneamente. Determine la rapidez $(v_B)_1$ de la bala. La rigidez del resorte es $k = 200$ N/m y en un principio no está alargado.

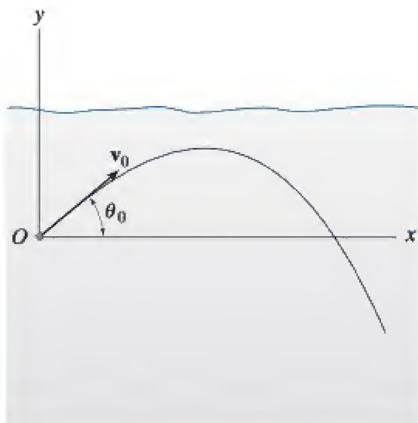
R1-45. Se dispara una bala de 20 g horizontalmente a $(v_B)_1 = 1200$ m/s contra el bloque de 300 g el cual descansa sobre la superficie lisa. Determine la distancia de movimiento del bloque a la derecha antes de detenerse momentáneamente. La rigidez del resorte es $k = 200$ N/m y en un principio no está alargado.



Probs. R1-44/45

R1-46. Se dispara una partícula de masa m a un ángulo θ_0 con una velocidad $\mathbf{v}_0$ hacia un líquido que desarrolla una resistencia al avance $F = -kv$, donde k es una constante. Determine la rapidez máxima o terminal alcanzada por la partícula.

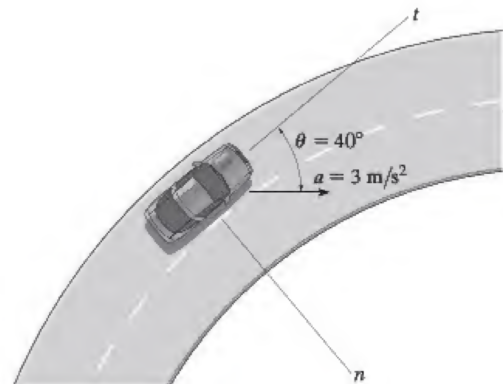
R1-47. Se dispara un proyectil de masa m hacia un líquido a un ángulo θ_0 con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ como se muestra. Si el líquido desarrolla una fricción o resistencia al avance en el proyectil la cual es proporcional a su velocidad, es decir, $F = -kv$, donde k es una constante, determine las componentes x y y de su posición en cualquier instante. Además, ¿cuál es la distancia máxima $x_{máx}$ que recorre?



Probs. R1-46/47

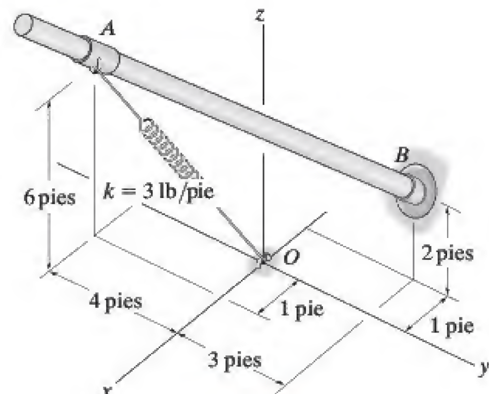
***R1-48.** Las posiciones de las partículas A y B son $\mathbf{r}_A = \{3t\mathbf{i} + 9t(2 - t)\mathbf{j}\}$m y $\mathbf{r}_B = \{3(t^2 - 2t + 2)\mathbf{i} + 3(t - 2)\mathbf{j}\}$m, respectivamente, donde t está en segundos. Determine el punto en que las partículas chocan y su rapidez justo antes de la colisión. ¿Cuánto tiempo transcurre antes de que ocurra la colisión?

R1-49. Determine la rapidez del automóvil si tiene la aceleración que se muestra y viaja por una carretera cuyo radio de curvatura es $\rho = 50$ m. Además, ¿cuál es la tasa de incremento de velocidad del automóvil?



Prob. R1-49

R1-50. La rigidez del resorte es $k = 3$ lb/pie y su longitud sin alargar de 2 pies. Si está unido al collarín liso de 5 lb y éste se suelta del reposo en A, determine su velocidad justo antes de que choque con el extremo de la barra en B. Ignore el tamaño del collarín.



Prob. R1-50



Las aspas de cada turbina de viento giran alrededor de un eje fijo con movimiento angular variable.

Cinemática plana de un cuerpo rígido

16

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Clasificar los diversos tipos del movimiento plano de un cuerpo rígido.
- Investigar la traslación y el movimiento angular con respecto a un eje fijo de un cuerpo rígido.
- Estudiar el movimiento plano mediante un análisis del movimiento absoluto.
- Analizar la velocidad y aceleración del movimiento relativo mediante un marco de referencia trasladante.
- Demostrar cómo hallar el centro instantáneo de velocidad cero y determinar la velocidad de un punto de un cuerpo mediante este método.
- Analizar la velocidad y aceleración del movimiento relativo mediante un marco de referencia rotatorio.

16.1 Movimiento plano de un cuerpo rígido

En este capítulo se analizará la cinemática plana de un cuerpo rígido. Este estudio es importante en el diseño de engranes, levas y mecanismos utilizados en muchas operaciones mecánicas. Una vez que entendamos bien la cinemática, podremos aplicar las ecuaciones de movimiento, las cuales relacionan las fuerzas que actúan en el cuerpo con el movimiento del cuerpo.

El *movimiento plano* de un cuerpo rígido ocurre cuando todas sus partículas se desplazan a lo largo de trayectorias equidistantes de un plano fijo. Existen tres tipos de movimiento plano de un cuerpo rígido, en orden de complejidad creciente, los cuales son

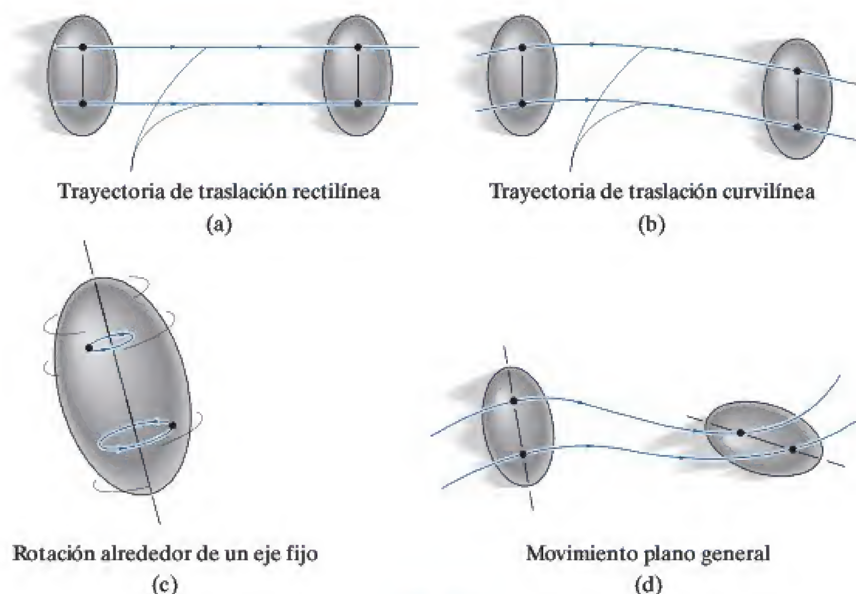


Fig. 16-1

16

- *Traslación*. Este tipo de movimiento ocurre cuando una línea en el cuerpo permanece paralela a su orientación original durante todo el movimiento. Cuando las trayectorias del movimiento de dos puntos cualesquiera del cuerpo son líneas paralelas, el movimiento se llama *traslación rectilínea*, figura 16-1*a*. Si las trayectorias del movimiento se desarrollan a lo largo de líneas curvas equidistantes, el movimiento se llama *traslación curvilínea*, figura 16-1*b*.
- *Rotación alrededor de un eje fijo*. Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo, todas sus partículas, excepto las que quedan en el eje de rotación, se mueven a lo largo de trayectorias circulares, figura 16-1*c*.
- *Movimiento plano general*. Cuando un cuerpo se somete a un movimiento plano general, experimenta una combinación de traslación *y* rotación, figura 16-1*d*. La traslación se presenta en un plano de referencia y la rotación ocurre alrededor de un eje perpendicular al plano de referencia.

En las secciones siguientes consideraremos, en detalle, cada uno de estos movimientos. En la figura 16-2 se muestran ejemplos de cuerpos sometidos a estos movimientos.

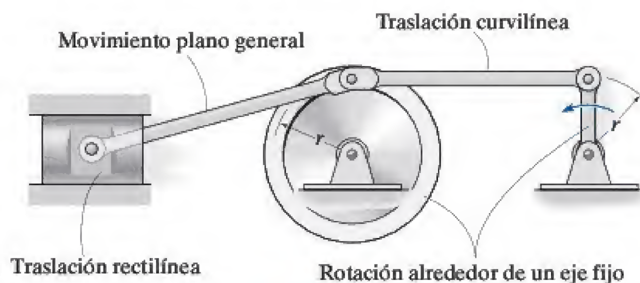


Fig. 16-2

16.2 Traslación

Considere un cuerpo rígido sometido a traslación rectilínea o a traslación curvilínea en el plano x-y, figura 16-3.

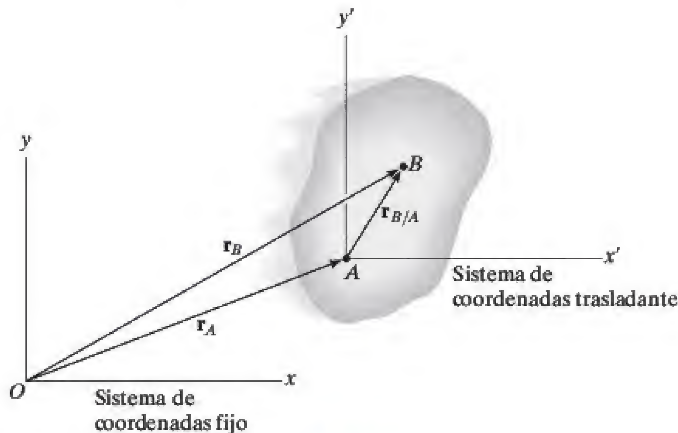


Fig. 16-3

Posición. Las localizaciones de los puntos A y B en el cuerpo se definen con respecto a un marco de referencia fijo x, y por medio de *vectores de posición* $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$. El sistema de coordenadas x', y' trasladante permanece *fijo en el cuerpo* con su origen en A, en lo sucesivo conocido como *punto base*. La posición de B con respecto a A está denotada por el *vector de posición relativa* $\mathbf{r}_{B/A}$ ("$\mathbf{r}$ de B con respecto a A"). Por suma vectorial,

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

Velocidad. Una relación entre las velocidades instantáneas de A y B se obtiene mediante la derivada con respecto al tiempo de esta ecuación, de la cual resulta $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + d\mathbf{r}_{B/A}/dt$. En este caso $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ denotan *velocidades absolutas* puesto que estos vectores se miden con respecto a los ejes x, y. El término $d\mathbf{r}_{B/A}/dt = \mathbf{0}$, puesto que la *magnitud* de $\mathbf{r}_{B/A}$ es *constante* por definición de un cuerpo rígido y como éste traslada la *dirección* de $\mathbf{r}_{B/A}$ también es *constante*. Por consiguiente,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$$

Aceleración. Al considerar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación de velocidad se obtiene una relación similar entre las aceleraciones instantáneas de A y B:

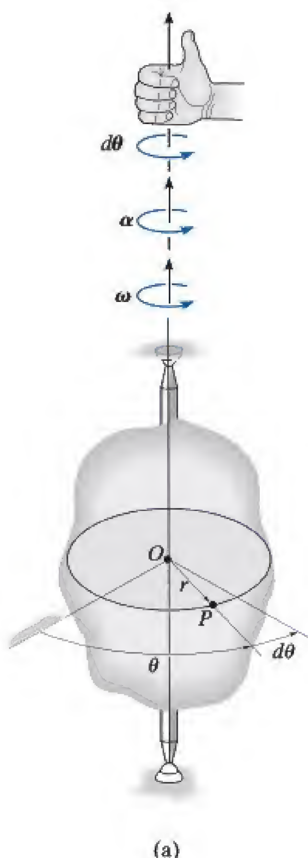
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A$$

Las dos ecuaciones anteriores indican que *todos los puntos en un cuerpo rígido sometidos a traslación rectilínea o curvilínea se mueven con la misma velocidad y aceleración.* Por consiguiente, la cinemática del movimiento de una partícula, analizada en el capítulo 12, también puede utilizarse para especificar la cinemática de puntos localizados en un cuerpo rígido trasladante.

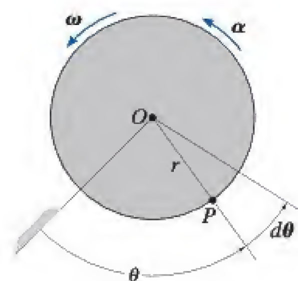


Los usuarios de este juego mecánico se someten a traslación curvilínea, puesto que el vehículo describe una trayectoria circular aunque siempre permanece en posición vertical.

16.3 Rotación alrededor de un eje fijo



(a)



(b)

Fig. 16-4

Cuando un cuerpo gira alrededor de un eje fijo, cualquier punto P localizado en él se desplaza a lo largo de una *trayectoria circular*. Para estudiar este movimiento es necesario analizar primero el movimiento angular del cuerpo alrededor del eje.

Movimiento angular. Como un punto no tiene dimensiones, no puede tener movimiento angular. *Solamente las líneas o cuerpos experimentan movimiento angular.* Por ejemplo, considere el cuerpo en la figura 16-4*a* y el movimiento angular de una línea radial r localizada en el plano sombreado.

Posición angular. En el instante que se muestra, la *posición angular* de r está definida por el ángulo θ, medido desde una línea de referencia *fija* hasta r.

Desplazamiento angular. El cambio de la posición angular, el cual puede medirse como una diferencial $d\boldsymbol{\theta}$, se llama *desplazamiento angular*.* La *magnitud* de este vector es $d\theta$, medida en grados, radianes o revoluciones, donde 1 rev $= 2\pi$ rad. Como el movimiento es en torno a un *eje fijo*, la dirección de $d\boldsymbol{\theta}$ *siempre* es a lo largo de este eje. Específicamente, la *dirección* se determina con la regla de la mano derecha; es decir, los dedos de la mano derecha se curvan en el sentido de rotación, de modo que en este caso el pulgar, o $d\boldsymbol{\theta}$, apunta hacia arriba, figura 16-4*a*. En dos dimensiones, como se muestra en la vista desde arriba del plano sombreado, figura 16-4*b* tanto θ como $d\theta$ están en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y por tanto el pulgar apunta hacia fuera de la página.

Velocidad angular. El cambio con respecto al tiempo de la posición angular se conoce como *velocidad angular* $\boldsymbol{\omega}$ (omega). Como $d\boldsymbol{\theta}$ ocurre durante un instante de tiempo dt, entonces,

$$(\circlearrowleft +) \qquad \boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}} \qquad (16\text{-}1)$$

La *magnitud* de este vector se suele medir en rad/s. Aquí está expresado en forma escalar, puesto que su *dirección* también va a lo largo del eje de rotación, figura 16-4*a*. Cuando se indica el movimiento angular en el plano sombreado, figura 16-4*b*, podemos referirnos al sentido de rotación como en sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario a las manecillas del reloj. En este caso elegimos *arbitrariamente* las rotaciones en sentido contrario a las manecillas del reloj como *positivas* y esto se indica por medio del bucle que aparece entre paréntesis al lado de la ecuación 16-1. Dese cuenta, sin embargo, que el sentido direccional de $\boldsymbol{\omega}$ en realidad es hacia fuera de la página.

*En la sección 20.1 se demuestra que las rotaciones finitas o los desplazamientos angulares finitos *no* son cantidades vectoriales, aun cuando las rotaciones diferenciales $d\boldsymbol{\theta}$ son vectores.

Aceleración angular. La *aceleración angular* $\boldsymbol{\alpha}$ (alfa) mide el cambio con respecto al tiempo de la velocidad angular. La *magnitud* de este vector es

$$(\circlearrowleft +) \qquad \boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt}} \qquad (16\text{-}2)$$

Con la ecuación 16-1, también es posible expresar α como

$$(\circlearrowleft +) \qquad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (16\text{-}3)$$

La línea de acción de $\boldsymbol{\alpha}$ es la misma que la de $\boldsymbol{\omega}$, figura 16-4*a*; sin embargo, su sentido de *dirección* depende de si $\boldsymbol{\omega}$ se incrementa o decrece. Si $\boldsymbol{\omega}$ decrece, entonces $\boldsymbol{\alpha}$ se llama *desaceleración angular* y por consiguiente su dirección se opone a $\boldsymbol{\omega}$.

Al eliminar dt de las ecuaciones 16-1 y 16-2, obtenemos una relación diferencial entre la aceleración angular, la velocidad angular y el desplazamiento angular, es decir,

$$(\circlearrowleft +) \qquad \boxed{\alpha\, d\theta = \omega\, d\omega} \qquad (16\text{-}4)$$

La similitud entre las relaciones diferenciales del movimiento angular y las desarrolladas para movimiento rectilíneo de una partícula ($v = ds/dt$, $a = dv/dt$, y $a\,ds = v\,dv$) debe ser aparente.

Aceleración angular constante. Si la aceleración angular del cuerpo es *constante*, $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_c$, entonces cuando se integran las ecuaciones 16-1, 16-2 y 16-4, se obtiene un conjunto de fórmulas que relacionan la velocidad angular, la posición angular de un cuerpo, y el tiempo. Estas ecuaciones son semejantes a las ecuaciones 12-4 a 12-6 que se utilizaron para movimiento rectilíneo. Los resultados son

$$(\circlearrowleft +) \qquad \omega = \omega_0 + \alpha_c t \qquad (16\text{-}5)$$

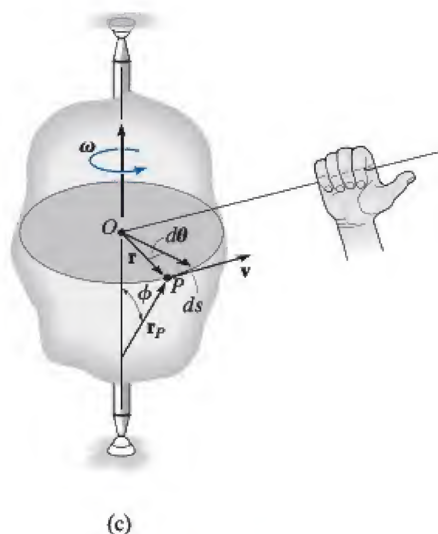
$$(\circlearrowleft +) \qquad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2 \qquad (16\text{-}6)$$

$$(\circlearrowleft +) \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0) \qquad (16\text{-}7)$$

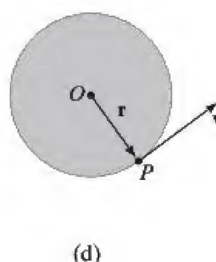
Aceleración angular constante

En este caso, θ_0 y ω_0 son los valores iniciales de la posición angular y la velocidad angular del cuerpo, respectivamente.

16



(c)



(d)

Fig. 16-4 (cont.)

16

Movimiento de un punto *P*. Cuando el cuerpo rígido de la figura 16-4*c* gira, el punto *P* se desplaza a lo largo de una *trayectoria circular* de radio *r* con centro en el punto *O*. Esta trayectoria está contenida en el plano sombreado de la vista superior, figura 16-4*d*.

Posición y desplazamiento. La posición de *P* está definida por el vector de posición **r**, el cual se extiende desde *O* hasta *P*. Si el cuerpo gira $d\theta$ entonces *P* se desplazará $ds = r\,d\theta$.

Velocidad. La magnitud de la velocidad de *P* se calcula al dividir $ds = r\,d\theta$ entre dt de modo que

$$v = \omega r \qquad (16\text{-}8)$$

Como se muestra en las figuras 16-4*c* y 16-4*d*, la *dirección* de **v** es *tangente* a la trayectoria circular.

Tanto la magnitud como la dirección de **v** también pueden tenerse en cuenta si se utiliza el producto vectorial de $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{r}_P$ (vea el apéndice B). En este caso, la dirección $\mathbf{r}_P$ es de *cualquier punto* sobre el eje de rotación al punto *P*, figura 16-4*c*. Tenemos

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P \qquad (16\text{-}9)$$

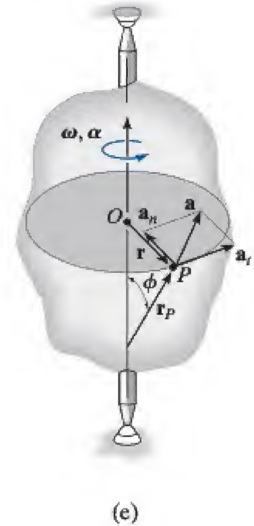
El orden de los vectores en esta formulación es importante, puesto que el producto vectorial no es conmutativo, es decir, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P \neq \mathbf{r}_P \times \boldsymbol{\omega}$. Observe en la figura 16-4*c* cómo se establece la dirección correcta de **v** con la regla de la mano derecha. Los dedos de la mano derecha se enroscan de $\boldsymbol{\omega}$ hacia $\mathbf{r}_P$ ($\boldsymbol{\omega}$ "cruz" $\mathbf{r}_P$). El pulgar indica la dirección correcta de **v**, la cual es tangente a la trayectoria en la dirección del movimiento. De acuerdo con la ecuación B-8, la magnitud de **v** en la ecuación 16-9 es $v = \omega r_P$ seno ϕ, y puesto que $r = r_P$ seno ϕ, figura 16-4*c*, entonces $v = \omega r$, la cual concuerda con la ecuación 16-8. Como un caso especial, el vector de posición **r** puede elegirse para $\mathbf{r}_P$. Aquí, **r** queda en el plano del movimiento y de nueva cuenta la velocidad del punto *P* es

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad (16\text{-}10)$$

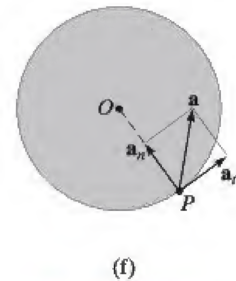
Aceleración. La aceleración de P puede expresarse en función de sus componentes normal y tangencial. Como $a_t = dv/dt$ y $a_n = v^2/\rho$, donde $\rho = r$, $v = \omega r$ y $\alpha = d\omega/dt$, tenemos

$$a_t = \alpha r \tag{16-11}$$

$$a_n = \omega^2 r \tag{16-12}$$



(e)



(f)

Fig. 16-4 (cont.)

El *componente tangencial de la aceleración*, figuras 16-4*e* y 16-4*f*, representa el cambio con respecto al tiempo de la magnitud de la velocidad. Si la rapidez de P se incrementa, entonces $\mathbf{a}_t$ actúa en la misma dirección que $\mathbf{v}$; si se reduce, $\mathbf{a}_t$ actúa en la dirección opuesta de $\mathbf{v}$, y finalmente, si permanece constante, $\mathbf{a}_t$ es cero.

La *componente normal de la aceleración* representa el cambio con respecto al tiempo de la dirección de la velocidad. La *dirección* de $\mathbf{a}_n$ siempre es hacia O, el centro de la trayectoria circular, figuras 16-4*e* y 16-4*f*.

Al igual que la velocidad, la aceleración del punto P puede expresarse en función del producto vectorial (producto cruz). Si consideramos la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 16-9, tenemos

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}_P}{dt}$$

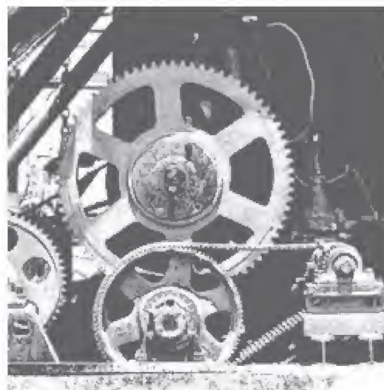
Si se recuerda que $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ y se utiliza la ecuación 16-9 ($d\mathbf{r}_P/dt = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P$), se obtiene

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P) \tag{16-13}$$

Por la definición del producto vectorial, la magnitud del primer término de la derecha es $a_t = \alpha r_P \operatorname{seno} \phi = \alpha r$, y por la regla de la mano derecha, $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P$ está en la dirección de $\mathbf{a}_t$, figura 16-4*e*. Asimismo, la magnitud del segundo término es $a_n = \omega^2 r_P \operatorname{seno} \phi = \omega^2 r$, y al aplicar la regla de la mano derecha dos veces, primero para determinar el resultado $\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P$ entonces $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_P$, se ve que este resultado está en la misma dirección que $\mathbf{a}_n$, como se muestra en la figura 16-4*e*. Si observamos que ésta también es la *misma* dirección que $-\mathbf{r}$, la cual queda en el plano del movimiento, podemos expresar $\mathbf{a}_n$ en una forma mucho más simple que $\mathbf{a}_n = -\omega^2\mathbf{r}$. Por consiguiente, la ecuación 16-13 puede identificarse por sus dos componentes como

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \\ &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r} \end{aligned} \tag{16-14}$$

Puesto que $\mathbf{a}_t$ y $\mathbf{a}_n$ son perpendiculares entre sí, si se requiere, la magnitud de la aceleración puede determinarse con el teorema de Pitágoras, es decir, $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$, figura 16-4*f*.



Los engranes utilizados en la operación de una grúa giran alrededor de ejes fijos. Los ingenieros deben ser capaces de relacionar sus movimientos angulares para diseñar apropiadamente este sistema de engranes.

16

Puntos importantes

- Un cuerpo puede experimentar dos tipos de traslación. Durante la traslación rectilínea todos los puntos siguen trayectorias de línea recta paralelas, y durante la traslación curvilínea los puntos siguen trayectorias curvas que tienen la misma forma y son equidistantes una de otra.
- Todos los puntos de un cuerpo que se traslada se mueven con la misma velocidad y aceleración.
- Los puntos localizados en un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo siguen trayectorias circulares.
- La relación $\alpha\, d\theta = \omega\, d\omega$ se deriva de $\alpha = d\omega/dt$ y $\omega = d\theta/dt$ al eliminar dt.
- Una vez conocidos los movimientos angulares ω y α, pueden determinarse la velocidad y aceleración de cualquier punto del cuerpo.
- La velocidad siempre actúa tangente a la trayectoria del movimiento.
- La aceleración tiene dos componentes. La aceleración tangencial mide el cambio de la magnitud de la velocidad y se determina con $a_t = \alpha r$. La aceleración normal mide el cambio de la dirección de la velocidad y se determina con $a_n = \omega^2 r$.

Procedimiento para el análisis

La velocidad y aceleración de un punto localizado en un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo se determinan mediante el siguiente procedimiento.

Movimiento angular.

- Establezca el sentido positivo de rotación alrededor del eje de rotación y muéstrelo junto a cada ecuación cinemática conforme se aplique.
- Si se conoce una relación entre *dos* de las cuatro variables α, ω, θ y t, entonces puede obtenerse una tercera variable al usar una de las siguientes ecuaciones cinemáticas, la cual relaciona las tres variables.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad \alpha\, d\theta = \omega\, d\omega$$

- Si la aceleración angular del cuerpo es *constante*, entonces pueden utilizarse las siguientes ecuaciones:

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

- Una vez que se obtiene la solución, el sentido de θ, ω y α se determina con el signo algebraico de sus cantidades numéricas.

Movimiento de un punto *P*.

- En la mayoría de los casos, la velocidad de P y sus dos componentes de aceleración se determinan con las ecuaciones escalares

$$v = \omega r$$
$$a_t = \alpha r$$
$$a_n = \omega^2 r$$

- Si la geometría del problema es difícil de visualizar, deberán utilizarse las siguientes ecuaciones vectoriales:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$
$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$$
$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P) = -\omega^2\mathbf{r}$$

- En este caso la dirección de $\mathbf{r}_P$ es desde cualquier punto sobre el eje de rotación al punto P, mientras que $\mathbf{r}$ queda en el plano del movimiento de P. Cualquiera de estos vectores, junto con $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$, deberán expresarse en función de sus componentes **i**, **j**, **k**, y, si es necesario, los productos vectoriales determinados al utilizar una expansión determinante (vea la ecuación B-12).

16

EJEMPLO 16.1

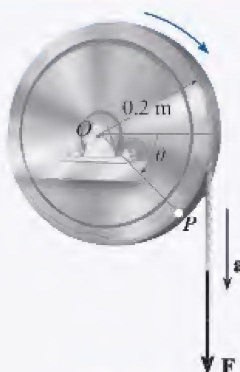


Fig. 16-5

Se enrolla una cuerda alrededor de la rueda mostrada en la figura 16-5, la cual inicialmente está en reposo cuando $\theta = 0$. Si se aplica una fuerza a la cuerda y se le imparte una aceleración $a = (4t)\ \text{m/s}^2$, donde t está en segundos, determine, como una función del tiempo, (a) la velocidad angular de la rueda, y (b) la posición angular de la línea OP en radianes.

SOLUCIÓN

Parte (a). La rueda está sometida a rotación alrededor de un eje fijo que pasa por el punto O. Por tanto, un punto P en la rueda describe una trayectoria circular y su aceleración tiene componentes *tanto* tangenciales como normales. La componente tangencial es $(a_P)_t = (4t)\ \text{m/s}^2$, puesto que la cuerda está enrollada alrededor de la rueda y se desplaza *tangente* a ella. Por consiguiente, la aceleración angular de la rueda es

$$(\circlearrowright +) \qquad (a_P)_t = \alpha r$$

$$(4t)\ \text{m/s}^2 = \alpha(0.2\ \text{m})$$

$$\alpha = (20t)\ \text{rad/s}^2 \circlearrowright$$

Con este resultado y $\alpha = d\omega/dt$, ahora podemos determinar la velocidad ω angular de la rueda, puesto que esta ecuación relaciona α, t y ω. Al integrar, con la condición inicial de que $\omega = 0$ cuando $t = 0$, se obtiene

$$(\circlearrowright +) \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = (20t)\ \text{rad/s}^2$$

$$\int_0^\omega d\omega = \int_0^t 20t\ dt$$

$$\omega = 10t^2\ \text{rad/s} \circlearrowright \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Parte (b). Con este resultado y $\omega = d\theta/dt$, podemos determinar la posición angular θ de OP, puesto que esta ecuación relaciona θ, ω y t. Al integrar, con la condición inicial de que $\theta = 0$ cuando $t = 0$, tenemos

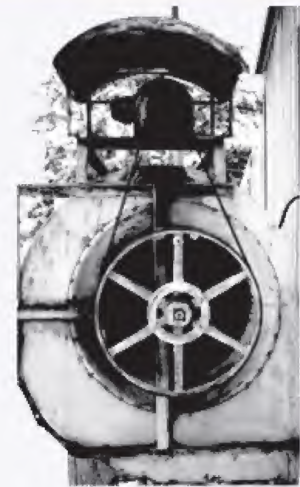
$$(\circlearrowright +) \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega = (10t^2)\ \text{rad/s}$$

$$\int_0^\theta d\theta = \int_0^t 10t^2\ dt$$

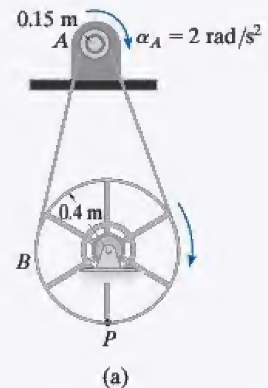
$$\theta = 3.33t^3\ \text{rad} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

NOTA: no podemos utilizar la ecuación de aceleración angular constante, puesto que α es una función del tiempo.

EJEMPLO 16.2



El motor que se muestra en la fotografía se utiliza para hacer girar un ensamble de rueda y soplador alojado en la caja. Los detalles del diseño se muestran en la figura 16-6*a*. Si la polea *A* conectada al motor comienza a girar desde el punto de reposo con una aceleración angular constante de $\alpha_A = 2\ \text{rad/s}^2$, determine las magnitudes de la velocidad y aceleración del punto *P* en la rueda, después de que la polea ha realizado dos revoluciones. Suponga que la banda de transmisión no se resbala en la polea y la rueda.



(a)

SOLUCIÓN

Movimiento angular. Primero convertiremos las dos revoluciones en radianes. Como una revolución equivale a 2π rad, entonces

$$\theta_A = 2\ \text{rev}\left(\frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{rev}}\right) = 12.57\ \text{rad}$$

Como α_A es constante, la velocidad angular de la polea *A* es por consiguiente

$$(\circlearrowright +) \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

$$\omega_A^2 = 0 + 2(2\ \text{rad/s}^2)(12.57\ \text{rad} - 0)$$

$$\omega_A = 7.090\ \text{rad/s}$$

La banda tiene la misma velocidad y componente tangencial de la aceleración cuando pasa por la polea y la rueda. Por tanto,

$$v = \omega_A r_A = \omega_B r_B;\ 7.090\ \text{rad/s}\ (0.15\ \text{m}) = \omega_B(0.4\ \text{m})$$

$$\omega_B = 2.659\ \text{rad/s}$$

$$a_t = \alpha_A r_A = \alpha_B r_B;\ 2\ \text{rad/s}^2\ (0.15\ \text{m}) = \alpha_B(0.4\ \text{m})$$

$$\alpha_B = 0.750\ \text{rad/s}^2$$

Movimiento de *P*. Como se muestra en el diagrama cinemático en la figura 16-6*b*, tenemos

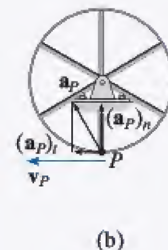
$$v_P = \omega_B r_B = 2.659\ \text{rad/s}\ (0.4\ \text{m}) = 1.06\ \text{m/s} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$(a_P)_t = \alpha_B r_B = 0.750\ \text{rad/s}^2\ (0.4\ \text{m}) = 0.3\ \text{m/s}^2$$

$$(a_P)_n = \omega_B^2 r_B = (2.659\ \text{rad/s})^2(0.4\ \text{m}) = 2.827\ \text{m/s}^2$$

Por tanto

$$a_P = \sqrt{(0.3\ \text{m/s}^2)^2 + (2.827\ \text{m/s}^2)^2} = 2.84\ \text{m/s}^2 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$



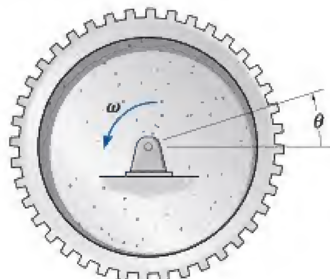
(b)

Fig. 16-6

16

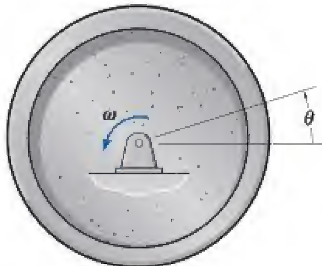
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F16-1. Cuando el engrane realiza 20 revoluciones alcanza una velocidad angular de $\omega = 30$ rad/s, a partir del punto de reposo. Determine su aceleración angular constante y el tiempo requerido.



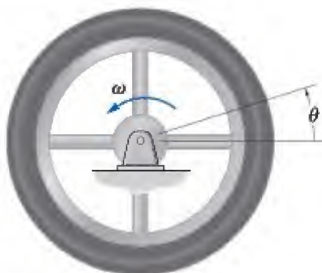
F16-1

F16-2. El volante gira con una velocidad angular de $\omega = (0.005\theta^2)$ rad/s, donde θ está en radianes. Determine la aceleración angular cuando ha realizado 20 revoluciones.



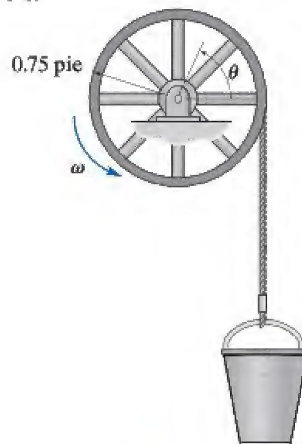
F16-2

F16-3. El volante gira con una velocidad angular de $\omega = (4\theta^{1/2})$ rad/s, donde θ está en radianes. Determine el tiempo que requiere para alcanzar una velocidad angular de $\omega = 150$ rad/s. Cuando $t = 0$, $\theta = 0$.



F16-3

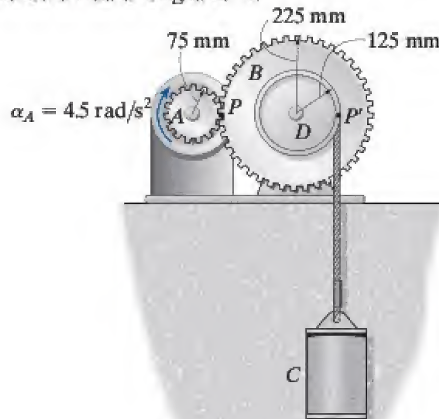
F16-4. La cuerda que se enrolla alrededor de una rueda de tambor levanta la cubeta. Si el desplazamiento angular de la rueda es $\theta = (0.5t^3 + 15t)$ rad, donde t está en segundos, determine la velocidad y aceleración de la cubeta cuando $t = 3$ s.



F16-4

F16-5. Una rueda tiene una aceleración angular de $\alpha = (0.5\,\theta)$ rad/s^2, donde θ está en radianes. Determine la magnitud de la velocidad y aceleración de un punto P localizado en su borde después de que la rueda ha realizado 2 revoluciones. El radio de la rueda es de 0.2 m y comienza a girar desde el punto de reposo.

F16-6. Durante un breve tiempo, el motor hace girar el engrane A con una aceleración angular constante de $\alpha_A = 4.5$ rad/s^2, a partir del punto de reposo. Determine la velocidad del cilindro y la distancia que recorre en tres segundos. La cuerda se enrolla en la polea D, la cual está sólidamente unida al engrane B.

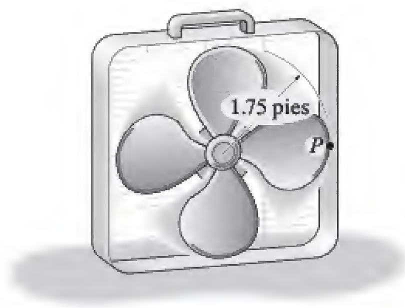


F16-6

PROBLEMAS

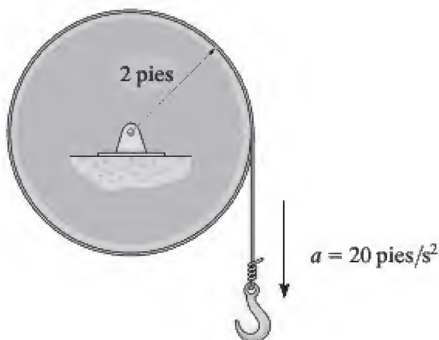
•**16-1.** Un disco de 0.5 pie de radio gira con una velocidad angular inicial de 2 rad/s y tiene una aceleración angular constante de 1 rad/s^2. Determine las magnitudes de la velocidad y aceleración de un punto en el borde del disco cuando $t = 2$ s.

16-2. Justo después de que se enciende el ventilador, el motor imprime a las aspas una aceleración angular $\alpha = (20e^{-0.6t})$ rad/s^2, donde t está en segundos. Determine la rapidez de la punta P de una de las aspas cuando $t = 3$ s. ¿Cuántas revoluciones ha realizado el aspa en 3 s? Cuando $t = 0$ el aspa está en reposo.



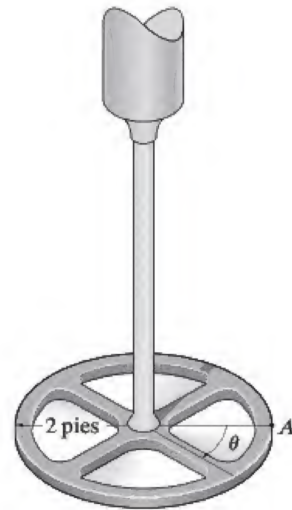
Prob. 16-2

16-3. El gancho está sujeto a una cuerda que se enrolla alrededor del tambor. Si comienza a moverse desde el punto de reposo con una aceleración de 20 pies/s^2, determine la aceleración angular del tambor y su velocidad angular después de que ha completado 10 revoluciones. ¿Cuántas revoluciones más realizará el tambor después de que haya completado las primeras 10 y el gancho continúe su descenso durante 4 s?



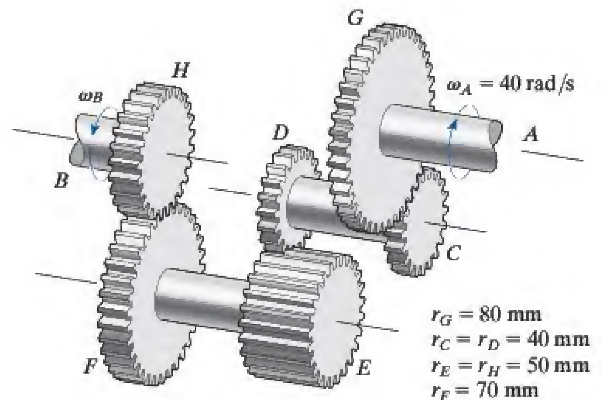
Prob. 16-3

***16-4.** El péndulo (rueda) de torsión experimenta oscilaciones en el plano horizontal, de modo que el ángulo de rotación, medido con respecto a la posición de equilibrio, está dado por $\theta = (0.5 \text{ sen } 3t)$ rad, donde t está en segundos. Determine la velocidad máxima del punto A localizado en la periferia de la rueda mientras el péndulo oscila. ¿Cuál es la aceleración del punto A en función de t?



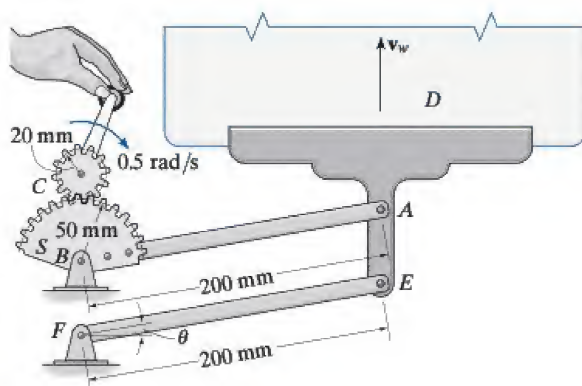
Prob. 16-4

•**16-5.** La ilustración muestra cómo funciona el engrane de reversa de una transmisión automotriz. Si el motor hace girar la flecha A a $\omega_A = 40$ rad/s, determine la velocidad angular de la flecha motriz, ω_B. El radio de cada engrane se enuncia en la figura.



Prob. 16-5

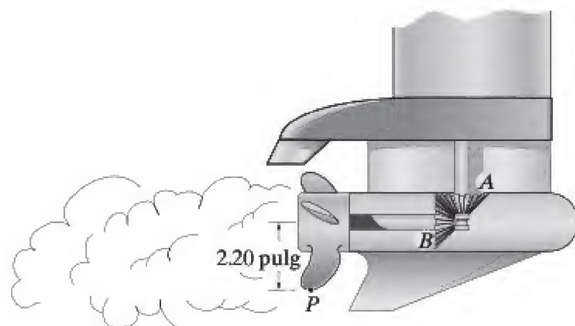
16-6. En la figura se muestra el mecanismo elevador del cristal de la ventanilla de un automóvil. Aquí la manija hace girar la pequeña rueda dentada C, que a su vez hace girar el engrane S, con lo cual gira la palanca fija AB que eleva el bastidor D donde descansa el cristal. El cristal se desliza libremente en el bastidor. Si se gira la manija a 0.5 rad/s, determine la rapidez de los puntos A y E y la rapidez v_w del cristal en el instante $\theta = 30°$.



Prob. 16-6

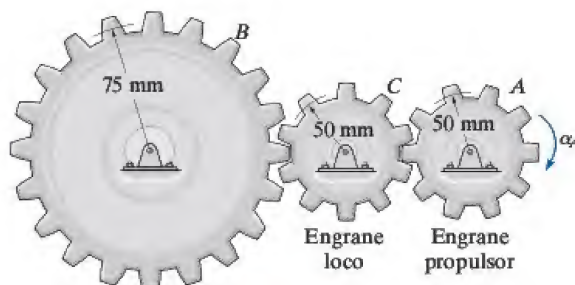
16-7. El radio del engrane A en la flecha motriz del motor fuera de borda es $r_A = 0.5$ pulg y el del piñón diferencial B en la hélice es $r_B = 1.2$ pulg. Determine la velocidad angular de la hélice en $t = 1.5$ s, si la flecha motriz gira con una aceleración angular $\alpha = (400t^3)$ rad/s^2, donde t está en segundos. En principio, la hélice está en reposo y el armazón del motor no se mueve.

***16-8.** Para el motor fuera de borda del problema 16-7, determine la magnitud de la velocidad y aceleración del punto P localizado en la punta de la hélice en el instante $t = 0.75$ s.



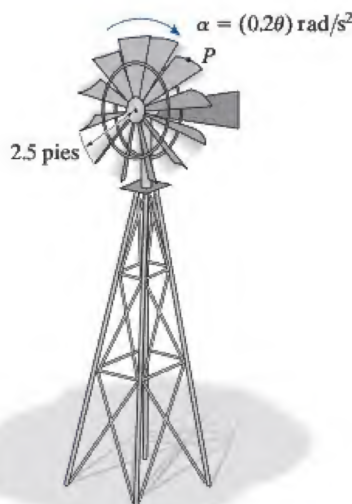
Probs. 16-7/8

•**16-9.** Cuando sólo dos engranes están engranados, el engrane propulsor A y el engrane propulsado B siempre girarán en direcciones opuestas. Para hacerlos que giren en la *misma dirección* se utiliza un engrane loco o guía C. En el caso que se ilustra, determine la velocidad angular del engrane B cuando $t = 5$ s, si el engrane A comienza a girar desde el punto de reposo con una aceleración angular $\alpha_A = (3t + 2)$ rad/s^2, donde t está en segundos.



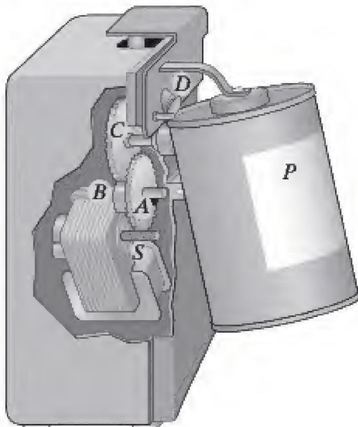
Prob. 16-9

16-10. Durante una ráfaga de viento, las aspas de un molino de viento experimentan una aceleración angular de $\alpha = (0.2\theta)$ rad/s^2 donde θ está en radianes. Si inicialmente la velocidad angular de las aspas es 5 rad/s, determine la rapidez del punto P, localizado en la punta de una de las aspas, justo después de que ésta ha realizado dos revoluciones.



Prob. 16-10

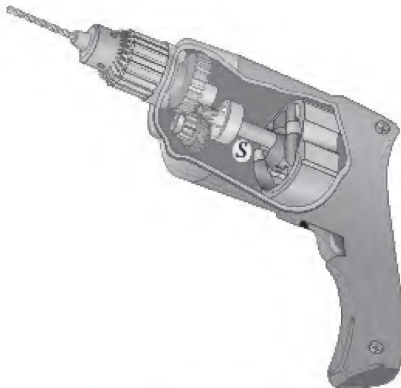
16-11. El abrelatas funciona de modo que la lata pueda ser impulsada por la rueda motriz D. Si la flecha de la armadura S en el motor gira con una velocidad angular constante de 40 rad/s, determine la velocidad angular de la lata. Los radios de S, la lata P, la rueda motriz D, y de los engranes A, B y C, son $r_S = 5$ mm, $r_P = 40$ mm, $r_D = 7.5$ mm, $r_A = 20$ mm, $r_B = 10$ mm y $r_C = 25$ mm, respectivamente.



Prob. 16-11

***16-12.** Si el motor del taladro eléctrico hace girar la flecha de la armadura S con una aceleración angular constante de $\alpha_S = 30$ rad/s^2, determine su velocidad angular después de que ha realizado 200 revoluciones a partir del punto de reposo.

•**16-13.** Si el motor del taladro eléctrico hace girar la flecha de la armadura S con una velocidad angular de $\omega_S = (100t^{1/2})$ rad/s, determine su velocidad y aceleración angulares en el instante en que ha realizado 200 revoluciones, a partir del punto de reposo.

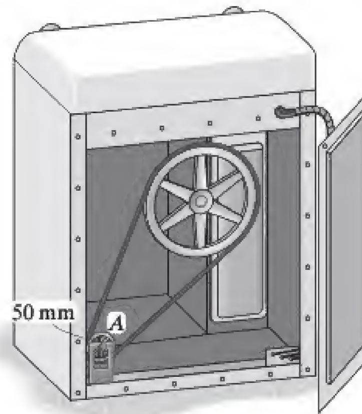


Probs. 16-12/13

16-14. Un disco de 6 pulg de radio gira alrededor de un eje fijo con una velocidad angular de $\omega = (2t + 3)$ rad/s, donde t está en segundos. Determine las componentes tangencial y normal de la aceleración de un punto localizado en el borde del disco cuando el desplazamiento angular es $\theta = 40$ rad.

16-15. La polea A de 50 mm de radio de la secadora de ropa gira con una aceleración angular de $\alpha_A = (27\theta_A^{1/2})$ rad/s^2, donde θ_A está en radianes. Determine su aceleración angular cuando $t = 1$ s, a partir del punto de reposo.

***16-16.** Si la polea del motor A de 50 mm de radio de la secadora de ropa gira con una aceleración angular de $\alpha_A = (10 + 50t)$ rad/s^2, donde t está en segundos, determine su velocidad angular cuando $t = 3$ s, a partir del punto de reposo.



Probs. 16-15/16

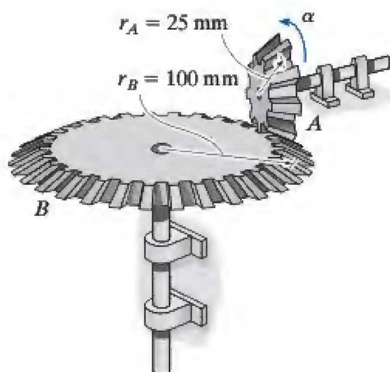
•**16-17.** La flecha S de la armadura de la aspiradora gira con una aceleración angular de $\alpha = 4\omega^{3/4}$ rad/s^2, donde ω está en rad/s. Determine la velocidad angular del cepillo cuando $t = 4$ s, a partir del punto de reposo. Los radios de la flecha y el cepillo son de 0.25 pulg y 1 pulg, respectivamente. Ignore el espesor de la banda motriz.



Prob. 16-17

16

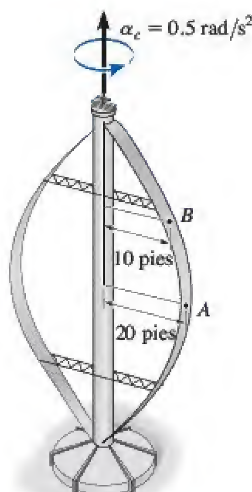
16-18. El engrane A está acoplado con el engrane B como se muestra. Si A comienza a moverse desde el punto de reposo con una aceleración angular constante de $\alpha_A = 2$ rad/s^2, determine el tiempo necesario para que B adquiera una velocidad angular de $\omega_B = 50$ rad/s.



Prob. 16-18

16-19. El molino de viento de eje vertical se compone de dos aspas de forma parabólica. Si éstas en principio están en reposo y comienzan a girar con una aceleración angular constante de $\alpha_c = 0.5$ rad/s^2, determine la magnitud de la velocidad y aceleración de los puntos A y B en el aspa después de que ésta ha realizado dos revoluciones.

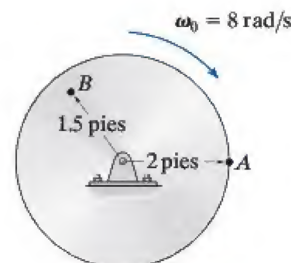
***16-20.** El molino de viento de eje vertical se compone de dos aspas de forma parabólica. Si éstas en principio están en reposo y comienzan a girar con una aceleración angular constante de $\alpha_c = 0.5$ rad/s^2, determine la magnitud de la velocidad y aceleración de los puntos A y B en el aspa cuando $t = 4$ s.



Probs. 16-19/20

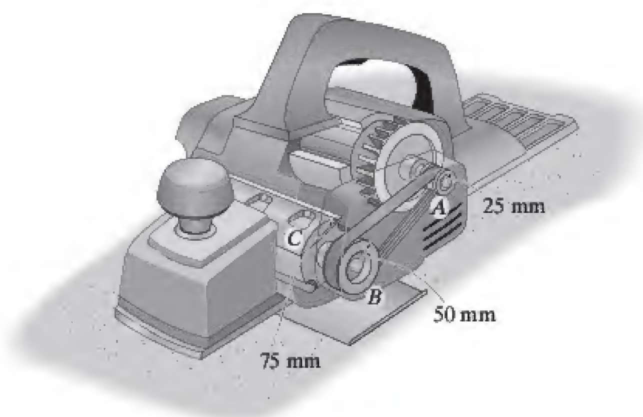
16-21. El disco gira originalmente a $\omega_0 = 8$ rad/s. Si se le somete a una aceleración angular constante de $\alpha = 6$ rad/s^2, determine las magnitudes de la velocidad y las componentes n y t de aceleración del punto A cuando $t = 0.5$ s.

16-22. El disco gira originalmente a $\omega_0 = 8$ rad/s. Si se le somete a una aceleración angular constante $\alpha = 6$ rad/s^2, determine las magnitudes de la velocidad y las componentes n y t de aceleración del punto B justo después de que la rueda realiza 2 revoluciones.



Probs. 16-21/22

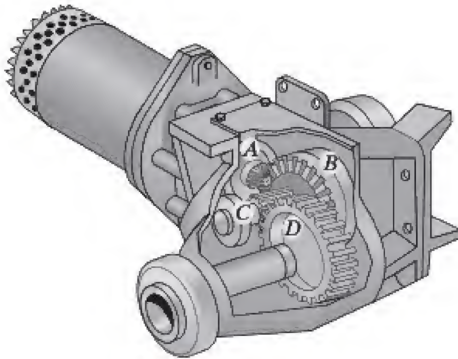
16-23. El aspa C del cepillo mecánico es propulsada por la polea A montada en la flecha de la armadura del motor. Si la aceleración angular constante de la polea A es $\alpha_A = 40$ rad/s^2, determine la velocidad angular del aspa cuando A ha realizado 400 revoluciones, a partir del punto de reposo.



Prob. 16-23

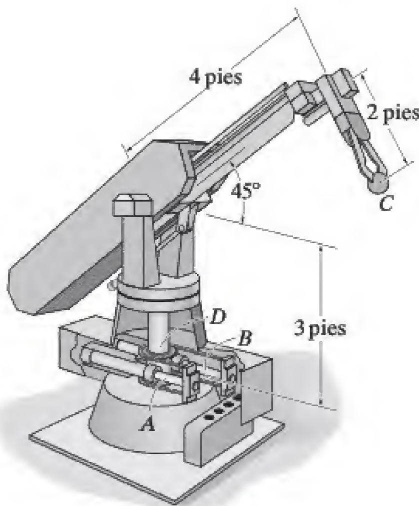
***16-24.** Durante un corto tiempo el motor hace girar el engrane A con una aceleración angular de $\alpha_A = (30t^{1/2})$ rad/s^2, donde t está en segundos. Determine la velocidad angular del engrane D cuando $t = 5$ s, a partir del punto de reposo. En principio, el engrane A está en reposo. Los radios de los engranes A, B, C y D son $r_A = 25$ mm, $r_B = 100$ mm, $r_C = 40$ mm y $r_D = 100$ mm, respectivamente.

•16-25. El motor hace girar el engrane A de modo que su velocidad angular se incrementa de manera uniforme desde 0 hasta 3000 rev/min después de que la flecha realiza 200 revoluciones. Determine la velocidad angular del engrane D cuando $t = 3$ s. Los radios de los engranes A, B, C y D son $r_A = 25$ mm, $r_B = 100$ mm, $r_C = 40$ mm y $r_D = 100$ mm, respectivamente.



Probs. 16-24/25

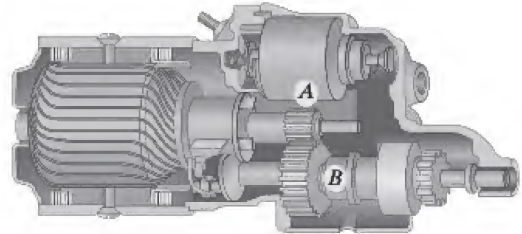
16-26. La rotación del brazo robótico ocurre debido al movimiento lineal de los cilindros hidráulicos A y B. Si este movimiento hace que gire el engrane D en sentido horario a 5 rad/s, determine la magnitud de la velocidad y aceleración de la parte C sujetada por las quijadas del brazo.



Prob. 16-26

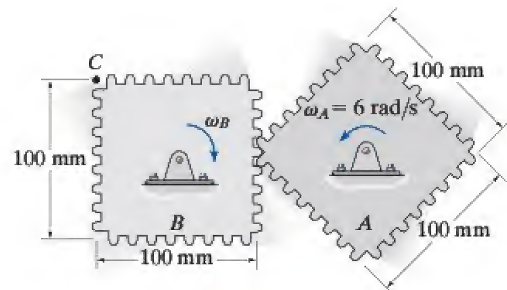
16-27. Durante un corto tiempo, el engrane A del motor de arranque de un automóvil gira con una aceleración angular de $\alpha_A = (450t^2 + 60)$rad/s^2, donde t está en segundos. Determine la velocidad y desplazamientos angulares del engrane B cuando $t = 2$ s, a partir del punto de reposo. Los radios de los engranes A y B son de 10 mm y 25 mm, respectivamente.

***16-28.** Durante un corto tiempo, el engrane A del motor de arranque de un automóvil gira con una aceleración angular de $\alpha_A = (50\omega^{1/2})$rad/s^2, donde ω está en rad/s. Determine la velocidad angular del engrane B después de que el engrane A ha realizado 50 revoluciones, a partir del punto de reposo. Los radios de los engranes A y B son 10 mm y 25 mm, respectivamente.



Probs. 16-27/28

•16-29. El engrane A gira con una velocidad angular constante de $\omega_A = 6$ rad/s. Determine la velocidad angular máxima del engrane B y la rapidez del punto C.



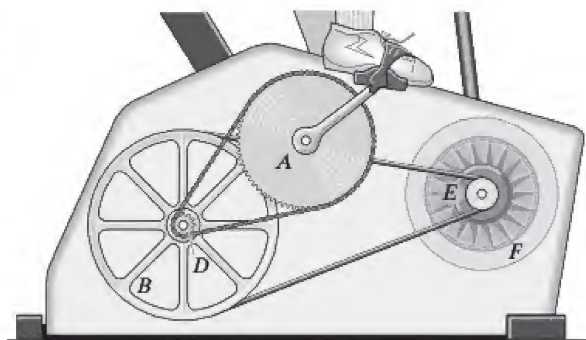
Prob. 16-29

16

16-30. Si en un principio el operador impulsa los pedales a 20 rev/min y luego inicia una aceleración angular de 30 rev/min^2, determine la velocidad angular del volante F cuando $t = 3$ s. Observe que el brazo del pedal está conectado al plato de la cadena A, la cual al girar impulsa la polea acanalada B mediante un engrane de acoplamiento D. La banda se enrolla alrededor de la polea acanalada y luego impulsa la polea E y el volante fijo.

16-31. Si en un principio el operador impulsa los pedales a 12 rev/min y luego inicia una aceleración angular de 8 rev/min^2, determine la velocidad angular del volante F después que el pedal ha girado 2 revoluciones. Observe que el brazo del pedal está conectado al plato de la cadena A, la cual al girar impulsa la polea acanalada B mediante un engrane de acoplamiento D. La banda se enrolla alrededor de la polea acanalada y luego impulsa la polea E y el volante fijo.

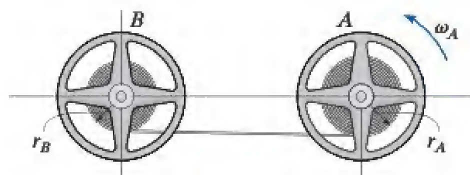
16



$r_A = 125$ mm $\quad r_B = 175$ mm
$r_D = 20$ mm $\quad r_E = 30$ mm

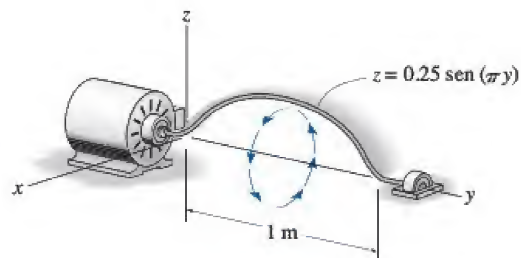
Probs. 16-30/31

***16-32.** La rueda motriz A gira a una velocidad angular constante de ω_A. En un instante particular, el radio de la cuerda se enrolla en cada rueda como se muestra. Si el espesor de la cuerda es T, determine la aceleración angular de la rueda B.



Prob. 16-32

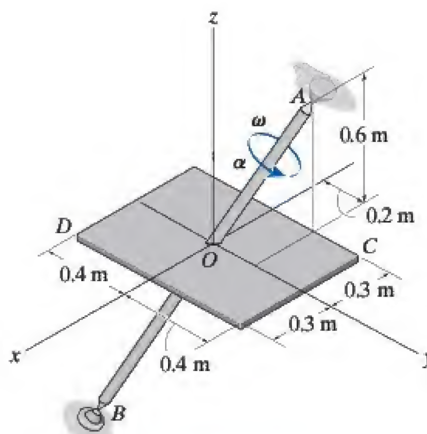
•16-33. Si la barra comienza a moverse desde el punto de reposo en la posición que se ilustra y un motor la impulsa durante un corto tiempo con una aceleración angular de $\alpha = (1.5e^t)$ rad/s^2, donde t está en segundos, determine la magnitud de su velocidad y desplazamiento angular cuando $t = 3$ s. Localice el punto en la barra que tiene la velocidad y aceleración máximas y calcule las magnitudes de la velocidad y aceleración de este punto cuando $t = 3$ s. La barra está definida por $z = 0.25$ seno(πy) m, donde el argumento del seno está en radianes y y en metros.



Prob. 16-33

16-34. Si la flecha y la placa giran a una velocidad angular constante $\omega = 14$ rad/s, determine la velocidad y aceleración del punto C localizado en la esquina de la placa en el momento que se muestra. Exprese el resultado en forma vectorial cartesiana.

16-35. En el instante que se muestra, la flecha y la placa giran a una velocidad angular constante de $\omega = 14$ rad/s y aceleración angular $\alpha = 7$ rad/s^2. Determine la velocidad y aceleración del punto D localizado en la esquina de la placa en este momento. Exprese el resultado en forma vectorial cartesiana.



Probs. 16-34/35

16.4 Análisis del movimiento absoluto

Un cuerpo sometido a *movimiento plano general* experimenta una traslación y rotación *simultáneas*. Si el cuerpo se representa como una lámina delgada, ésta se traslada en su plano y gira alrededor de un eje perpendicular a este plano. El movimiento puede especificarse por completo si se conocen *tanto* la rotación angular de una línea fija en el cuerpo como el movimiento de un punto en él. Una forma de relacionar estos movimientos es utilizar una coordenada de posición rectilínea s para localizar el punto a lo largo de su trayectoria y una coordenada de posición angular θ para especificar la orientación de la línea. Las dos coordenadas se relacionan entonces por medio de la geometría del problema. Mediante la *aplicación directa* de las ecuaciones diferenciales con respecto al tiempo $v = ds/dt$, $a = dv/dt$, $\omega = d\theta/dt$, y $\alpha = d\omega/dt$, entonces pueden relacionarse el *movimiento* del punto y el *movimiento angular* de la línea. Este procedimiento es semejante al que se utilizó para resolver problemas de movimiento dependiente que implican poleas, sección 12.9. En algunos casos, este mismo procedimiento puede utilizarse para relacionar el movimiento de un cuerpo, que experimenta o rotación alrededor de un eje fijo o traslación, con el de un cuerpo conectado que experimenta movimiento plano general.



La caja de volteo del camión gira alrededor de un eje fijo que pasa por el pasador A, y la hace funcionar la extensión del cilindro hidráulico BC. La posición angular de la caja puede especificarse mediante la coordenada de posición angular θ y la posición del punto C de la caja se especifica por medio de la coordenada de posición rectilínea s. Como a y b son longitudes fijas, entonces las dos coordenadas se relacionan por medio de la ley de los cosenos, $s = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$. La derivada con respecto al tiempo de esta ecuación relaciona la rapidez a la cual el cilindro hidráulico se extiende a la velocidad angular de la caja.

Procedimiento para el análisis

La velocidad y aceleración de un punto P que experimenta movimiento rectilíneo pueden relacionarse con la velocidad y aceleración angulares de una línea contenida en un cuerpo si se aplica el siguiente procedimiento.

Ecuación de coordenadas de posición.

- Localice un punto P en el cuerpo por medio de una coordenada de posición s, la cual se mide con respecto a un *origen fijo* y está *dirigida a lo largo de la trayectoria de movimiento en línea recta* del punto P.
- Mida con respecto a una línea de referencia fija la posición angular θ de una línea situada en el cuerpo.
- Con las dimensiones del cuerpo, relacione s con θ, $s = f(\theta)$, por medio de geometría y/o trigonometría.

Derivadas con respecto al tiempo.

- Considere la primera derivada de $s = f(\theta)$ con respecto al tiempo para obtener una relación entre v y ω.
- Considere la segunda derivada con respecto al tiempo para obtener una relación entre a y α.
- En cada caso debe utilizarse la regla de la cadena del cálculo cuando se consideren las derivadas con respecto al tiempo de la ecuación de coordenadas de posición. Vea el apéndice C.

EJEMPLO 16.3

El extremo de la barra R en la figura 16-7 se mantiene en contacto con la leva por medio de un resorte. Si la leva gira alrededor de un eje que pasa por el punto O con una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ y una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, determine la velocidad y aceleración de la barra cuando la leva está en una posición arbitraria θ.

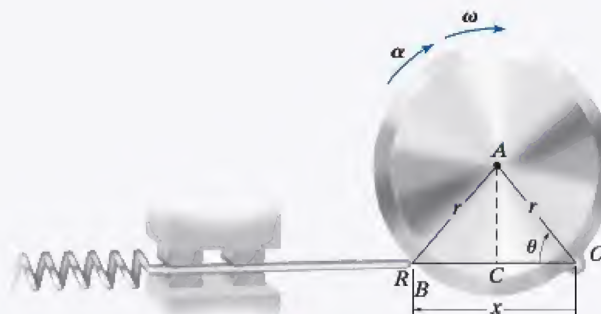


Fig. 16-7

16

SOLUCIÓN

Ecuación de coordenadas de posición. Se eligen las coordenadas θ y x para relacionar el *movimiento de rotación* del segmento de línea OA en la leva con la *traslación rectilínea* de la barra. Estas coordenadas se miden con respecto al *punto fijo* O y pueden relacionarse entre sí por medio de trigonometría. Como $OC = CB = r\cos\theta$, figura 16-7, entonces

$$x = 2r\cos\theta$$

Derivadas con respecto al tiempo. Si utilizamos la regla de cálculo de la cadena, tenemos

$$\frac{dx}{dt} = -2r(\operatorname{sen}\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

$$v = -2r\omega\operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$\frac{dv}{dt} = -2r\left(\frac{d\omega}{dt}\right)\operatorname{sen}\theta - 2r\omega(\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

$$a = -2r(\alpha\operatorname{sen}\theta + \omega^2\cos\theta) \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

NOTA: los signos negativos indican que v y a se oponen a la dirección positiva de x. Esto parece razonable cuando visualice el movimiento.

EJEMPLO 16.4

En un instante dado, el cilindro de radio r, que se muestra en la figura 16-8, tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$. Determine la velocidad y aceleración de su centro G si el cilindro rueda sin deslizarse.

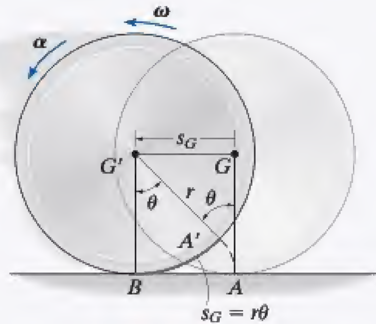


Fig. 16-8

SOLUCIÓN

Ecuación de coordenadas de posición. El cilindro experimenta movimiento plano general puesto que se traslada y gira al mismo tiempo. Por inspección, el punto G se mueve en *línea recta* hacia la izquierda, de G a G', a medida que el cilindro rueda, figura 16-8. Por consiguiente, la coordenada de posición *horizontal* s_G especificará su nueva posición G', medida de G a G'. Además, a medida que el cilindro rueda (sin deslizarse), la longitud del arco $A'B$ en su borde, el cual está en contacto con el suelo de A a B, equivale a s_G. En consecuencia, el movimiento requiere que la línea radial GA gire θ a la posición $G'A'$. Como el arco $A'B = r\theta$, entonces G recorre una distancia

$$s_G = r\theta$$

Derivadas con respecto al tiempo. Si se consideran derivadas con respecto al tiempo de esta ecuación y se tiene en cuenta que r es constante, $\omega = d\theta/dt$ y $\alpha = d\omega/dt$, se obtienen las relaciones necesarias:

$$s_G = r\theta$$

$$v_G = r\omega \qquad \textit{Resp.}$$

$$a_G = r\alpha \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: recuerde que estas relaciones son válidas sólo si el cilindro (disco, rueda, bola, etcétera) rueda *sin* deslizarse.

16

EJEMPLO 16.5

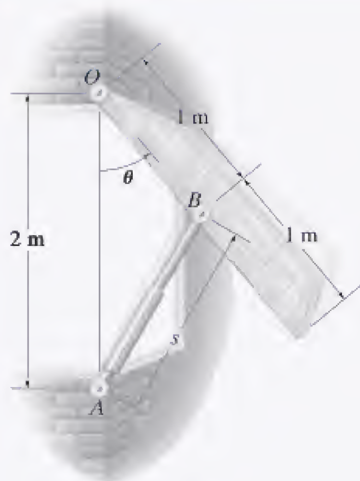


Fig. 16-9

La ventana de la figura 16-9 se abre por medio de un cilindro hidráulico AB. Si éste se extiende a una razón constante de 0.5 m/s, determine la velocidad angular y aceleración angular de la ventana en el instante $\theta = 30°$.

SOLUCIÓN

Ecuación de coordenadas de posición. El movimiento angular de la ventana se obtiene por medio de la coordenada θ, mientras que la extensión o movimiento *a lo largo del cilindro hidráulico* se define por medio de una coordenada s, la cual mide su longitud desde el punto fijo A hasta el punto móvil B. Estas coordenadas se relacionan con la ley de los cosenos, es decir,

$$s^2 = (2\text{ m})^2 + (1\text{ m})^2 - 2(2\text{ m})(1\text{ m})\cos\theta$$

$$s^2 = 5 - 4\cos\theta \qquad (1)$$

Cuando $\theta = 30°$,

$$s = 1.239\text{ m}$$

Derivadas con respecto al tiempo. Si consideramos las derivadas con respecto al tiempo de la ecuación 1, tenemos

$$2s\frac{ds}{dt} = 0 - 4(-\text{sen}\,\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

$$s(v_s) = 2(\text{sen}\,\theta)\omega \qquad (2)$$

Como $v_s = 0.5$ m/s, entonces cuando $\theta = 30°$,

$$(1.239\text{ m})(0.5\text{ m/s}) = 2\,\text{sen}\,30°\omega$$

$$\omega = 0.6197\text{ rad/s} = 0.620\text{ rad/s} \qquad \textbf{Resp.}$$

Al considerar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 2 resulta

$$\frac{ds}{dt}v_s + s\frac{dv_s}{dt} = 2(\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}\omega + 2(\text{sen}\,\theta)\frac{d\omega}{dt}$$

$$v_s^2 + sa_s = 2(\cos\theta)\omega^2 + 2(\text{sen}\,\theta)\alpha$$

Ya que $a_s = dv_s/dt = 0$, entonces

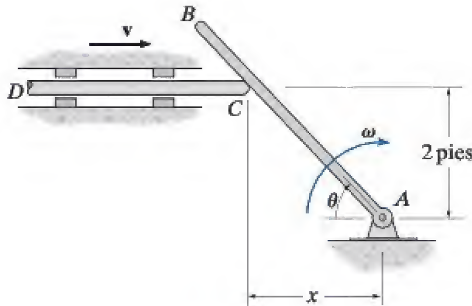
$$(0.5\text{ m/s})^2 + 0 = 2\cos 30°(0.6197\text{ rad/s})^2 + 2\,\text{sen}\,30°\alpha$$

$$\alpha = -0.415\text{ rad/s}^2 \qquad \textbf{Resp.}$$

Como el resultado es negativo, indica que la ventana tiene una desaceleración angular.

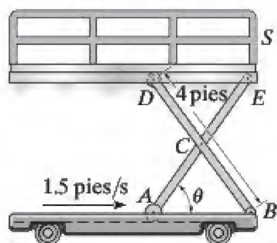
PROBLEMAS

***16-36.** La barra CD presiona a AB, y le imparte una velocidad angular. Si ésta se mantiene en $\omega = 5$ rad/s, determine la magnitud requerida de la velocidad $\mathbf{v}$ de CD en función del ángulo θ de la barra AB.



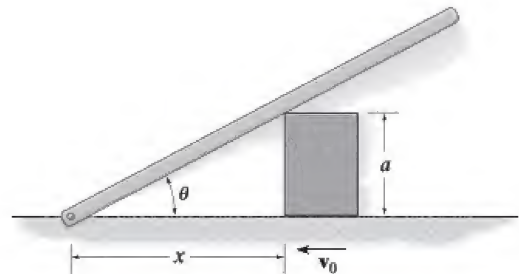
Prob. 16-36

•16-37. El andamio S se eleva por el movimiento del rodillo A hacia el pasador B. Si A se aproxima a B con una rapidez de 1.5 pies/s, determine la rapidez a la cual se eleva la plataforma en función de θ. Los largueros de 4 pies están conectados por medio de un pasador en su punto medio.



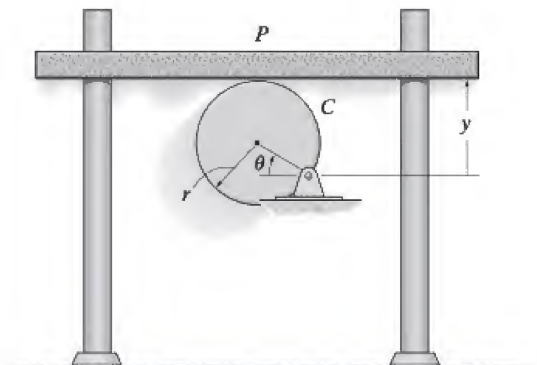
Prob. 16-37

16-38. El bloque se mueve a la izquierda con una velocidad constante $\mathbf{v}_0$. Determine la velocidad y aceleración angulares de la barra en función de θ.



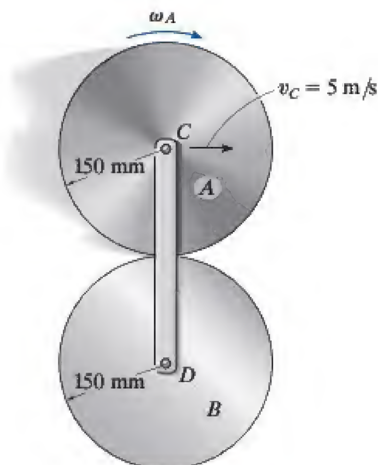
Prob. 16-38

16-39. Determine la velocidad y aceleración de la plataforma P en función del ángulo θ de la leva C si ésta gira a una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$. La conexión de pasador no interfiere con el movimiento de P sobre C. La plataforma está limitada a moverse verticalmente por las guías verticales lisas.



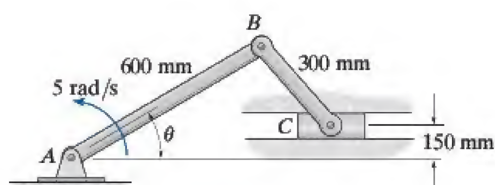
Prob. 16-39

*16-40. El disco A rueda sin deslizarse sobre la superficie del cilindro *fijo* B. Determine la velocidad angular de A si la rapidez de su centro C es $v_C = 5$ m/s. ¿Cuántas revoluciones realizará A alrededor de su centro justo después de que el eslabón DC complete una revolución?



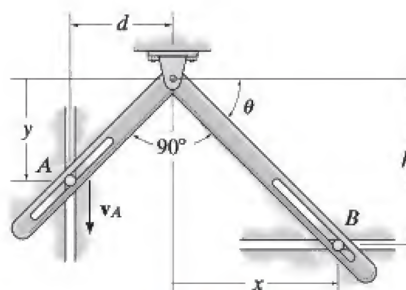
Prob. 16-40

•16-41. La manivela AB gira a una velocidad angular constante de 5 rad/s. Determine la velocidad del bloque C y la velocidad angular del eslabón BC cuando $\theta = 30°$.



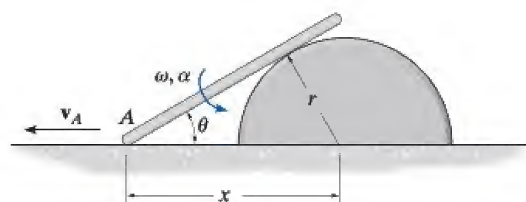
Prob. 16-41

16-42. Los pasadores A y B sólo pueden moverse en los carriles vertical y horizontal. Si el brazo ranurado hace que A baje a $\mathbf{v}_A$, determine la velocidad de B en función de θ.



Prob. 16-42

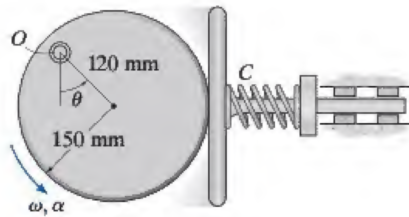
16-43. El extremo A de la barra se mueve a la izquierda a una velocidad constante $\mathbf{v}_A$. Determine la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ en función de su posición x.



Prob. 16-43

16

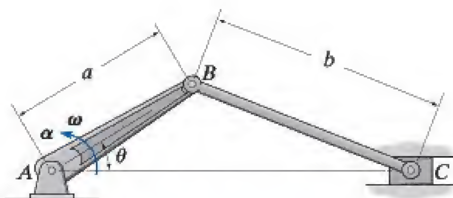
***16-44.** Determine la velocidad y aceleración de la placa cuando $\theta = 30°$, si en este instante la leva circular gira alrededor del punto fijo O a una velocidad angular $\omega = 4$ rad/s y a una aceleración angular $\alpha = 2$ rad/s^2.



Prob. 16-44

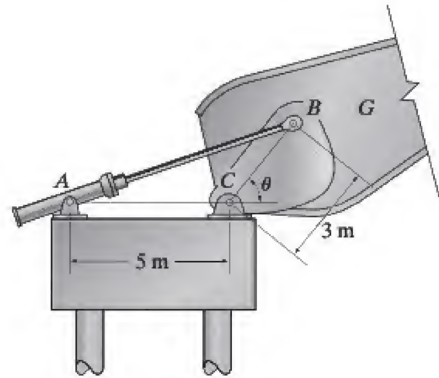
•16-45. Cuando $\theta = 30°$, la manivela AB gira a una velocidad y aceleración angulares de $\omega = 10$ rad/s y $\alpha = 2$ rad/s^2, respectivamente. Determine la velocidad y aceleración del bloque deslizante C en este instante. Considere $a = b = 0.3$ m.

16-46. Cuando $\theta = 30°$, la manivela AB gira a una velocidad y aceleración angulares de $\omega = 10$ rad/s y $\alpha = 2$ rad/s^2, respectivamente. Determine la velocidad y aceleración angulares de la barra de conexión BC en este instante. Considere $a = 0.3$ m y $b = 0.5$ m.



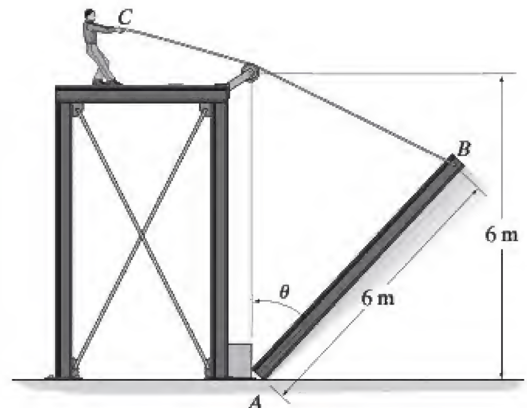
Probs. 16-45/46

16-47. La viga G de un puente levadizo se eleva y baja por medio del mecanismo de mando que se ilustra. Si el cilindro hidráulico AB se acorta a una velocidad constante de 0.15 m/s, determine la velocidad angular de la viga cuando $\theta = 60°$.



Prob. 16-47

***16-48.** El hombre tira de la cuerda a una razón constante de 0.5 m/s. Determine la velocidad y aceleración angulares de la viga AB cuando $\theta = 60°$. La viga gira en torno a A. Ignore el espesor de la viga y el tamaño de la polea.

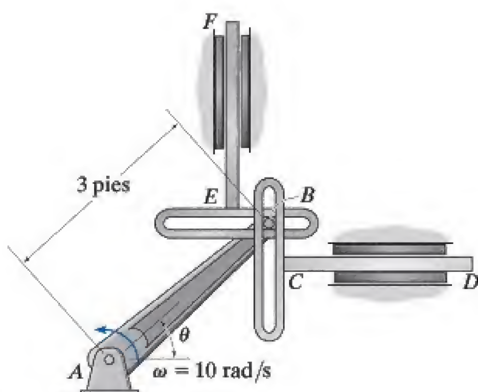


Prob. 16-48

16

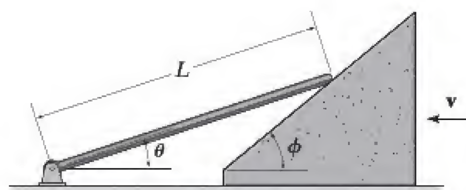
•**16-49.** La clavija B unida a la manivela AB se desliza en las ranuras de las barras seguidoras, las cuales se mueven a lo largo de las guías vertical y horizontal. Si la manivela gira a una velocidad angular constante de $\omega = 10$ rad/s, determine la velocidad y aceleración de la barra CD cuando $\theta = 30°$.

16-50. La clavija B unida a la manivela AB se desliza en las ranuras de las barras seguidoras, las cuales se mueven a lo largo de las guías vertical y horizontal. Si la manivela gira a una velocidad angular constante de $\omega = 10$ rad/s, determine la velocidad y aceleración de la barra EF cuando $\theta = 30°$.



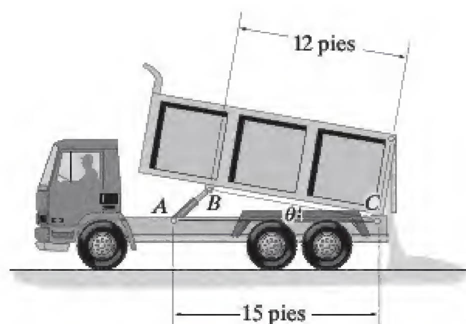
Probs. 16-49/50

*__16-52.__ Si la cuña se mueve a la izquierda a una velocidad constante $\mathbf{v}$, determine la velocidad angular de la barra en función de θ.



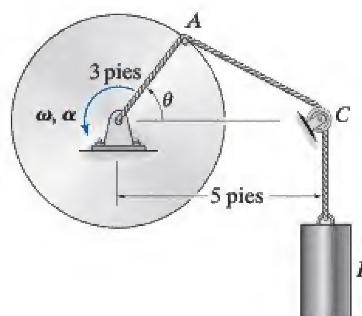
Prob. 16-52

16-51. Si el cilindro hidráulico AB se extiende a una razón constante de 1 pie/s, determine la velocidad angular de la caja de volteo cuando $\theta = 30°$.



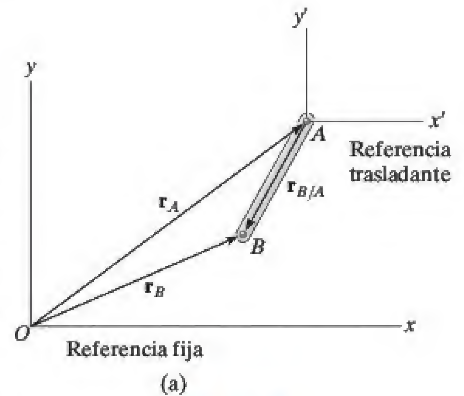
Prob. 16-51

•**16-53.** En el instante que se muestra, el disco gira a una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$. Determine la velocidad y aceleración del cilindro B en este instante. Ignore el tamaño de la polea C.



Prob. 16-53

16.5 Análisis de movimiento relativo: velocidad



(a)

Fig. 16-10

El movimiento plano general de un cuerpo rígido se describe como una *combinación* de traslación y rotación. Para ver estos movimientos "componentes" *por separado* utilizaremos un *análisis de movimiento relativo* que implica dos conjuntos de ejes de coordenadas. El sistema de coordenadas x, y está fijo y mide la posición *absoluta* de dos puntos A y B en el cuerpo, representado aquí como una barra, figura 16-10*a*. Se hará que el origen de los sistemas de coordenadas x', y' coincida con el "punto base" A seleccionado, el cual por lo general tiene un movimiento *conocido*. Los ejes de este sistema de coordenadas se *trasladan* con respecto al marco fijo pero no giran con la barra.

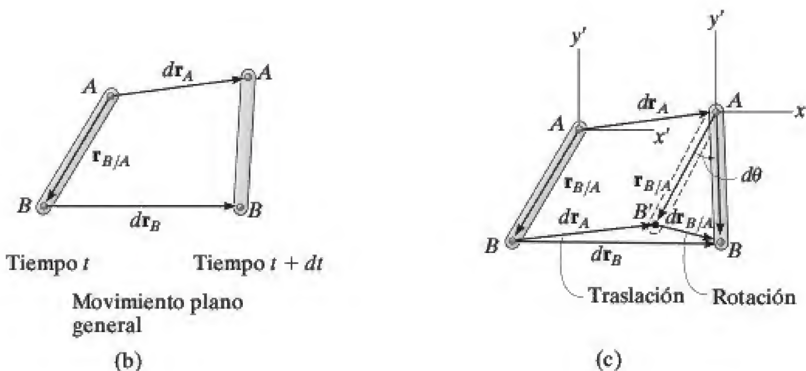
Posición. El vector de posición $\mathbf{r}_A$ en la figura 16-10*a* especifica la ubicación del "punto base" A y el vector de posición relativa $\mathbf{r}_{B/A}$ localiza el punto B con respecto al punto A. Mediante adición vectorial, la *posición* de B es por tanto

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

Desplazamiento. Durante un instante de tiempo dt, los puntos A y B experimentan los desplazamientos $d\mathbf{r}_A$ y $d\mathbf{r}_B$ como se muestra en la figura 16-10*b*. Si consideramos el movimiento plano general por sus partes componentes entonces *toda la barra* primero se *traslada* una cantidad $d\mathbf{r}_A$ de modo que A, el punto base, se mueve a su *posición final* y el punto B a B', figura 16-10*c*. La barra *gira* entonces alrededor de A una cantidad $d\theta$ de modo que B' experimenta un *desplazamiento relativo* $d\mathbf{r}_{B/A}$ y se mueve a su posición final B. Debido a la rotación sobre A, $d\mathbf{r}_{B/A} = r_{B/A}\, d\theta$ y el desplazamiento de B es

$$d\mathbf{r}_B = d\mathbf{r}_A + d\mathbf{r}_{B/A}$$

$d\mathbf{r}_{B/A}$: debido a la rotación alrededor de A
$d\mathbf{r}_A$: debido a la traslación de A
$d\mathbf{r}_B$: debido a la traslación y rotación



(b) (c)



A medida que el bloque corredizo A se desplaza horizontalmente hacia la izquierda a una velocidad $\mathbf{v}_A$, hace girar la manivela CB en sentido contrario al de las manecillas del reloj, de modo que $\mathbf{v}_B$ es tangente a su trayectoria circular, es decir, hacia arriba a la izquierda. La biela AB que conecta está sometida a movimiento plano general y en el instante que se muestra su velocidad angular es $\boldsymbol{\omega}$.

16

Velocidad. Para determinar la relación entre las velocidades de los puntos A y B es necesario considerar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación de posición o simplemente dividir la ecuación de desplazamiento entre dt. De esto resulta

$$\frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

Los términos $d\mathbf{r}_B/dt = \mathbf{v}_B$ y $d\mathbf{r}_A/dt = \mathbf{v}_A$ se miden con respecto a los ejes fijos x, y y representan las *velocidades absolutas* de los puntos A y B, respectivamente. Como el desplazamiento relativo lo provoca una rotación, la magnitud del tercer término es $dr_{B/A}/dt = r_{B/A}\,d\theta/dt = r_{B/A}\dot{\theta} = r_{B/A}\omega$, donde ω es la velocidad angular del cuerpo en el instante considerado. Denotaremos este término como la *velocidad relativa* $\mathbf{v}_{B/A}$, puesto que representa la velocidad de B con respecto a A medida por un observador fijo en los ejes trasladantes x', y'. Dicho de otra manera, *la barra parece moverse como si girara con una velocidad angular* $\boldsymbol{\omega}$ *con respecto al eje* z' *que pasa por* A. Por consiguiente, la magnitud de $\mathbf{v}_{B/A}$ es $v_{B/A} = \omega r_{B/A}$ y su *dirección* es perpendicular a $\mathbf{r}_{B/A}$. Por consiguiente, tenemos

$$\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}} \qquad (16\text{-}15)$$

donde

$\mathbf{v}_B =$ velocidad del punto B
$\mathbf{v}_A =$ velocidad del punto base A
$\mathbf{v}_{B/A} =$ velocidad de B con respecto a A

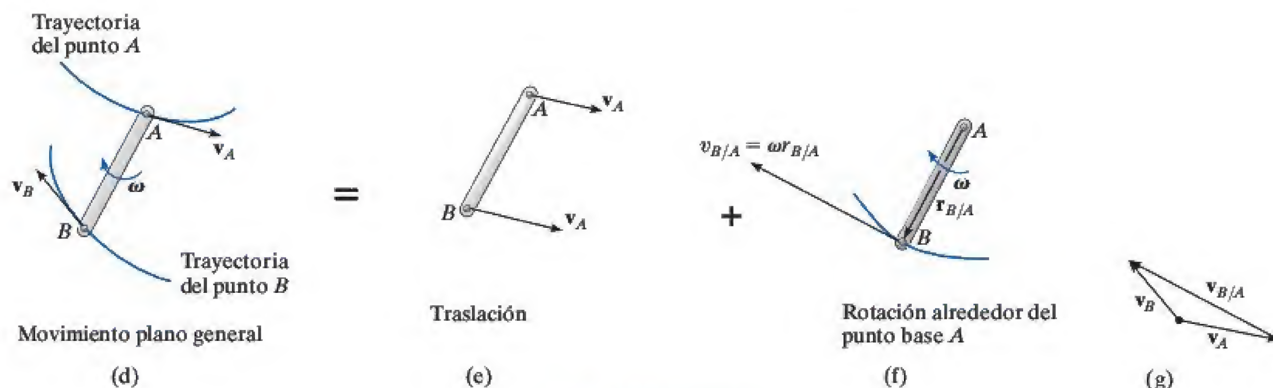


Fig. 16-10 (cont.)

Lo que esta ecuación establece es que la velocidad de B, figura 16-10*d*, se determina al considerar que toda la barra se traslada con una velocidad de $\mathbf{v}_A$, figura 16-10*e* y que gira alrededor de A con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, figura 16-10*f*. La adición vectorial de estos dos efectos, aplicada a B, resulta $\mathbf{v}_B$, como se muestra en la figura 16-10*g*.

Como la velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ representa el efecto del *movimiento circular*, alrededor de A, este término puede expresarse por medio del producto vectorial $\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$, ecuación 16-9. Por consiguiente, para su aplicación mediante un análisis vectorial cartesiano, también podemos escribir la ecuación 16-15 como

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{16-16}$$

donde

$\mathbf{v}_B$ = velocidad de B
$\mathbf{v}_A$ = velocidad del punto base A
$\boldsymbol{\omega}$ = velocidad angular del cuerpo
$\mathbf{r}_{B/A}$ = vector de posición dirigido de A a B

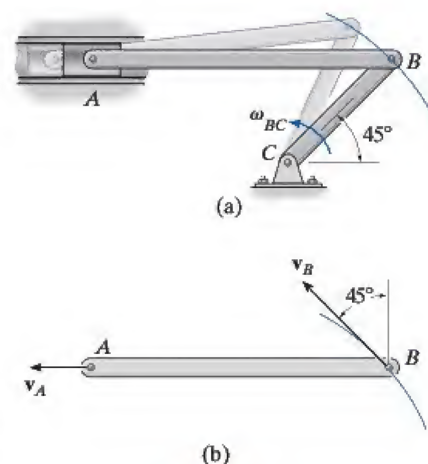


Fig. 16-11

La ecuación de velocidad 16-15 o 16-16 puede usarse de una manera práctica para estudiar el movimiento plano general de un cuerpo rígido el cual está o conectado por pasador a, o en contacto con otros cuerpos en movimiento. Cuando se aplica esta ecuación, los puntos A y B en general deben seleccionarse, como puntos en el cuerpo que están conectados por medio de un pasador a otros cuerpos, o como puntos en contacto con cuerpos adyacentes que tienen un *movimiento conocido*. Por ejemplo, el punto A en el eslabón AB en la figura 16-11*a* debe moverse a lo largo de una trayectoria horizontal, mientras que el punto B lo hace en una trayectoria circular. Por consiguiente pueden establecerse las *direcciones* de $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ puesto que siempre son *tangentes* a sus trayectorias de movimiento, figura 16-11*b*. En el caso de la rueda mostrada en la figura 16-12, la cual rueda *sin deslizarse*, el punto A en ella puede seleccionarse en el suelo. Aquí, la velocidad de A es cero (momentáneamente) puesto que el suelo no se mueve. Además, el centro de la rueda, B, se mueve a lo largo de una trayectoria horizontal de modo que $\mathbf{v}_B$ es horizontal.

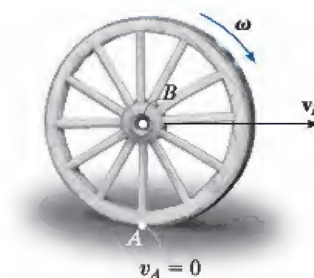


Fig. 16-12

16

16

Procedimiento para el análisis

La ecuación de velocidad relativa puede aplicarse mediante análisis vectorial cartesiano o bien si se escriben directamente las ecuaciones de componentes escalares x y y. Para su aplicación se sugiere el siguiente procedimiento.

Análisis vectorial

Diagrama cinemático.

- Establezca las direcciones de las coordenadas x, y fijas y trace un diagrama cinemático del cuerpo. Indique en él las velocidades $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ de los puntos A y B, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, y el vector de posición relativa $\mathbf{r}_{B/A}$.
- Si las magnitudes de $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ o $\boldsymbol{\omega}$ son incógnitas, puede suponerse el sentido de estos vectores.

Ecuación de velocidad.

- Para aplicar $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$, exprese los vectores en forma vectorial cartesiana y sustitúyalos en la ecuación. Evalúe el producto vectorial y luego iguale los componentes $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ respectivos para obtener dos ecuaciones escalares.
- Si la solución resulta en una respuesta *negativa* para una magnitud *desconocida*, indica que el sentido del vector es opuesto al que se muestra en el diagrama cinemático.

Análisis escalar

Diagrama cinemático.

- Si la ecuación de velocidad se va a aplicar en forma escalar, entonces deben establecerse la magnitud y la dirección de la velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$. Trace un diagrama cinemático como se muestra en la figura 16-10g, el cual muestra el movimiento relativo. Como se considera que el cuerpo debe estar "sujeto por medio de un pasador" momentáneamente en el punto base A, la magnitud de $\mathbf{v}_{B/A}$ es $v_{B/A} = \omega r_{B/A}$. La dirección de $\mathbf{v}_{B/A}$ siempre es perpendicular a $\mathbf{r}_{B/A}$ de acuerdo con el movimiento de rotación $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo.*

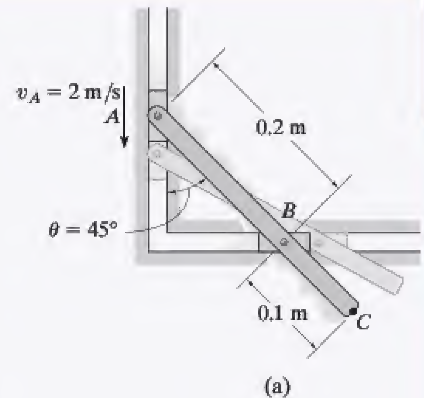
Ecuación de velocidad.

- Escriba la ecuación 16-15 en forma simbólica $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$, y debajo de cada uno de los términos represente los vectores gráficamente de modo que muestren sus magnitudes y direcciones. Las ecuaciones escalares se determinan con los componentes x y y de estos vectores.

*La notación $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A(\text{pasador})}$ puede ser útil para recordar que A está "conectado con un pasador".

EJEMPLO 16.6

El eslabón que se muestra en la figura 16-13*a* está guiado por los bloques A y B, los cuales se mueven en la ranuras fijas. Si la velocidad de A es de 2 m/s hacia abajo, determine la velocidad de B cuando $\theta = 45°$.



SOLUCIÓN (ANÁLISIS VECTORIAL)

Diagrama cinemático. Como los puntos A y B sólo pueden moverse a lo largo de las ranuras fijas y $\mathbf{v}_A$ está dirigida hacia abajo, la velocidad $\mathbf{v}_B$ debe dirigirse horizontalmente hacia la derecha, figura 16-13*b*. Este movimiento hace que el eslabón gire en sentido contrario al de las manecillas del reloj; es decir, de acuerdo con la regla de la mano derecha la dirección de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ es hacia fuera, perpendicular al plano del movimiento. Si se conocen la magnitud y dirección de $\mathbf{v}_A$ y las líneas de acción de $\mathbf{v}_B$ y $\boldsymbol{\omega}$, es posible aplicar la ecuación de velocidad $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ a los puntos A y B para determinar las dos magnitudes desconocidas v_B y ω. Como se necesita $\mathbf{r}_{B/A}$, también se muestra en la figura 16-13*b*.

Ecuación de velocidad. Al expresar cada uno de los vectores en la figura 16-13*b* en función de sus componentes **i, j, k** y aplicar la ecuación 16-16 a A, el punto base, y B, tenemos

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + [\omega\mathbf{k} \times (0.2 \text{ sen } 45°\mathbf{i} - 0.2 \cos 45°\mathbf{j})]$$

$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + 0.2\omega \text{ sen } 45°\mathbf{j} + 0.2\omega \cos 45°\mathbf{i}$$

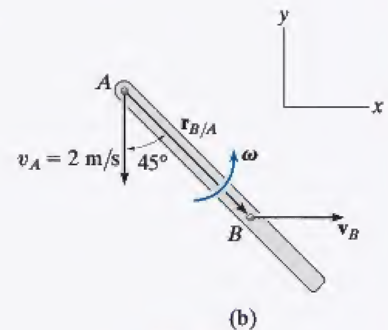


Fig. 16-13

Si se igualan los componentes **i** y **j** se tiene

$$v_B = 0.2\omega \cos 45° \qquad 0 = -2 + 0.2\omega \text{ sen } 45°$$

Por tanto,

$$\omega = 14.1 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$

$$v_B = 2 \text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

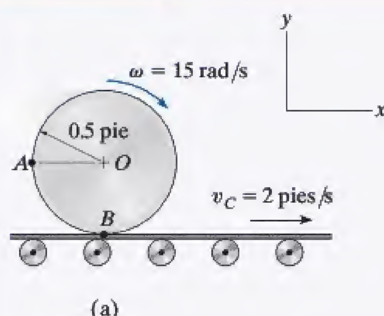
Como ambos resultados son *positivos*, las *direcciones* de $\mathbf{v}_B$ y $\boldsymbol{\omega}$ son las *correctas* como se muestra en la figura 16-13*b*. Debe recalcarse que estos resultados son *válidos sólo* en el instante $\theta = 45°$. Con otro cálculo de $\theta = 44°$ se obtiene $v_B = 2.07$ m/s y $\omega = 14.4$ rad/s; mientras que cuando $\theta = 46°$, $v_B = 1.93$ m/s y $\omega = 13.9$ rad/s, etcétera.

NOTA: una vez *conocidas* la velocidad de un punto (A) en el eslabón y la velocidad angular, se puede determinar la velocidad de cualquier otro punto en el eslabón. A manera de ejercicio, vea si puede aplicar la ecuación 16-16 a los puntos A y C, o a los puntos B y C, y demuestre que cuando $\theta = 45°$, $v_C = 3.16$ m/s, dirigida a un ángulo de 18.4° hacia arriba de la horizontal.

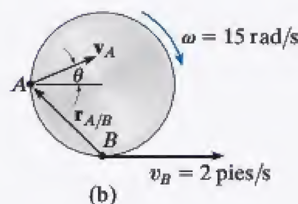
16

16

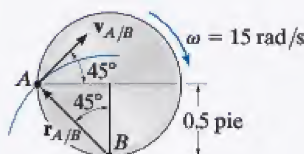
EJEMPLO 16.7



(a)



(b)



Movimiento relativo
(c)

Fig. 16-14

El cilindro de la figura 16-14*a* rueda sin deslizarse sobre la superficie de una banda transportadora, la cual se mueve a 2 pies/s. Determine la velocidad del punto A. El cilindro tiene una velocidad angular en el sentido de las manecillas del reloj $\omega = 15$ rad/s en el instante que se muestra.

SOLUCIÓN I (ANÁLISIS VECTORIAL)

Diagrama cinemático. Como no hay deslizamiento, el punto B en el cilindro tiene la misma velocidad que la transportadora, figura 16-14*b*. Además, la velocidad angular del cilindro es conocida, así que podemos aplicar la ecuación de velocidad a B, el punto base, y A para determinar $\mathbf{v}_A$.

Ecuación de velocidad.

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}$$

$$(v_A)_x\mathbf{i} + (v_A)_y\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + (-15\mathbf{k}) \times (-0.5\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j})$$

$$(v_A)_x\mathbf{i} + (v_A)_y\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + 7.50\mathbf{j} + 7.50\mathbf{i}$$

de modo que

$$(v_A)_x = 2 + 7.50 = 9.50 \text{ pies/s} \quad (1)$$

$$(v_A)_y = 7.50 \text{ pies/s} \quad (2)$$

Por tanto,

$$v_A = \sqrt{(9.50)^2 + (7.50)^2} = 12.1 \text{ pies/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{7.50}{9.50} = 38.3° \measuredangle \qquad \textit{Resp.}$$

SOLUCIÓN II (ANÁLISIS ESCALAR)

Como un procedimiento alternativo, las componentes escalares de $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$ pueden obtenerse directamente. De acuerdo con el diagrama cinemático que muestra el movimiento "circular" relativo, el cual produce $\mathbf{v}_{A/B}$, figura 16-14*c*, tenemos

$$v_{A/B} = \omega r_{A/B} = (15 \text{ rad/s})\left(\frac{0.5 \text{ pie}}{\cos 45°}\right) = 10.6 \text{ pies/s}$$

Por tanto,

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$$

$$\begin{bmatrix}(v_A)_x\\ \rightarrow\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(v_A)_y\\ \uparrow\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 \text{ pies/s}\\ \rightarrow\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}10.6 \text{ pies/s}\\ \measuredangle 45°\end{bmatrix}$$

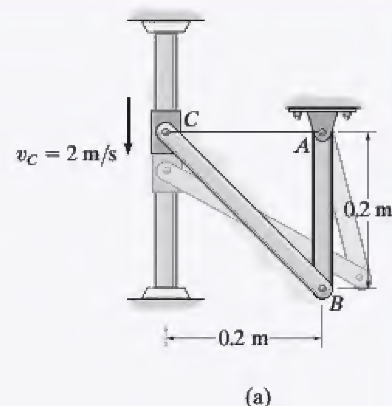
Al igualar las componentes x y y se obtienen los mismos resultados que antes, es decir,

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad (v_A)_x = 2 + 10.6 \cos 45° = 9.50 \text{ pies/s}$$

$$(+\uparrow) \qquad (v_A)_y = 0 + 10.6 \text{ sen } 45° = 7.50 \text{ pies/s}$$

EJEMPLO 16.8

El collarín C de la figura 16-15a desciende a 2 m/s. Determine la velocidad angular de CB en este instante.



(a)

SOLUCIÓN I (ANÁLISIS VECTORIAL)

Diagrama cinemático. El movimiento descendente de C hace que B se mueva a la derecha a lo largo de una trayectoria curva. Además, CB y AB giran en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Ecuación de velocidad. Eslabón CB (movimiento plano general): vea la figura 16-15b.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_{CB} \times \mathbf{r}_{B/C}$$

$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + \omega_{CB}\mathbf{k} \times (0.2\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j})$$

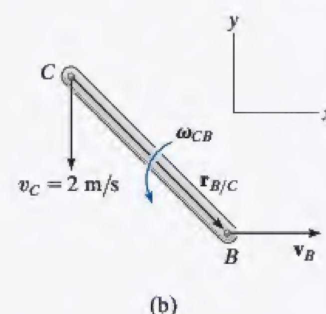
$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + 0.2\omega_{CB}\mathbf{j} + 0.2\omega_{CB}\mathbf{i}$$

$$v_B = 0.2\omega_{CB} \quad (1)$$

$$0 = -2 + 0.2\omega_{CB} \quad (2)$$

$$\omega_{CB} = 10 \text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

$$v_B = 2 \text{ m/s} \rightarrow$$



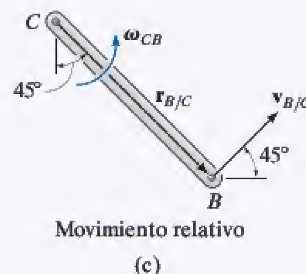
(b)

SOLUCIÓN II (ANÁLISIS ESCALAR)

Las ecuaciones de componentes escalares de $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{B/C}$ se obtienen directamente. El diagrama cinemático en la figura 16-15c muestra el movimiento "circular" relativo producido por $\mathbf{v}_{B/C}$. Tenemos

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{B/C}$$

$$\begin{bmatrix} v_B \\ \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \text{ m/s} \\ \downarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{CB}(0.2\sqrt{2} \text{ m}) \\ \measuredangle 45^\circ \end{bmatrix}$$



Movimiento relativo

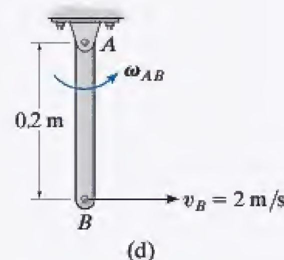
(c)

Al resolver estos vectores en las direcciones x y y se obtiene

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad v_B = 0 + \omega_{CB}(0.2\sqrt{2} \cos 45^\circ)$$

$$(+\uparrow) \qquad 0 = -2 + \omega_{CB}(0.2\sqrt{2} \operatorname{sen} 45^\circ)$$

las cuales son las mismas que las ecuaciones 1 y 2.

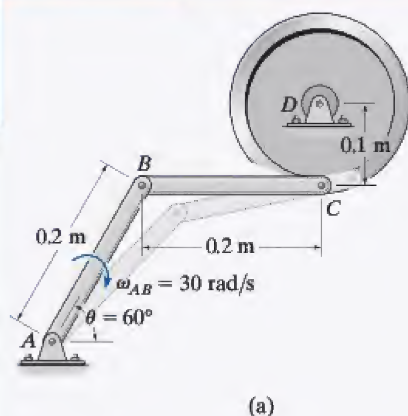


(d)

Fig. 16-15

NOTA: como el eslabón gira alrededor de un eje fijo y v_B es conocida, figura 16-15d, su velocidad angular se determina con $v_B = \omega_{AB} r_{AB}$ o $2 \text{ m/s} = \omega_{AB}(0.2 \text{ m})$, $\omega_{AB} = 10$ rad/s.

EJEMPLO 16.9



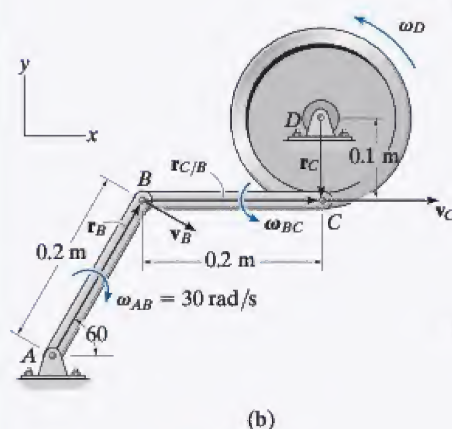
(a)

La barra AB de la articulación que se muestra en la figura 16-16*a* tiene una velocidad angular en el sentido de las manecillas del reloj de 30 rad/s cuando $\theta = 60°$. Determine las velocidades angulares del elemento BC y la rueda en este instante.

SOLUCIÓN (ANÁLISIS VECTORIAL)

Diagrama cinemático. Por inspección, las velocidades de los puntos B y C están definidas por la rotación del eslabón AB y la rueda alrededor de sus ejes fijos. Los vectores de posición y la velocidad angular de cada elemento se muestran en el diagrama cinemático en la figura 16-16*b*. Para llegar a la solución, escribiremos la ecuación cinemática apropiada para cada elemento.

Ecuación de velocidad. Eslabón *AB* (rotación alrededor de un eje fijo):



(b)

Fig. 16-16

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_B$$
$$= (-30\mathbf{k}) \times (0.2 \cos 60°\mathbf{i} + 0.2 \text{ sen } 60°\mathbf{j})$$
$$= \{5.20\mathbf{i} - 3.0\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$

Eslabón *BC* (movimiento plano general):

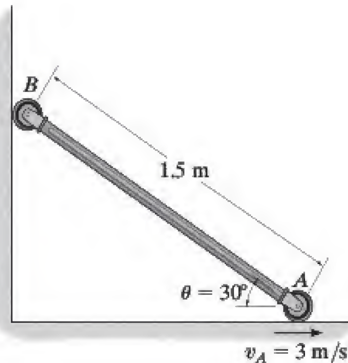
$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B}$$
$$v_C\mathbf{i} = 5.20\mathbf{i} - 3.0\mathbf{j} + (\omega_{BC}\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i})$$
$$v_C\mathbf{i} = 5.20\mathbf{i} + (0.2\omega_{BC} - 3.0)\mathbf{j}$$
$$v_C = 5.20 \text{ m/s}$$
$$0 = 0.2\omega_{BC} - 3.0$$
$$\omega_{BC} = 15 \text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Rueda (rotación alrededor de un eje fijo):

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega}_D \times \mathbf{r}_C$$
$$5.20\mathbf{i} = (\omega_D\mathbf{k}) \times (-0.1\mathbf{j})$$
$$5.20 = 0.1\omega_D$$
$$\omega_D = 52.0 \text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

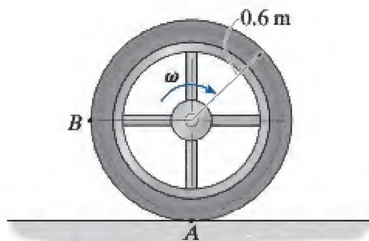
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F16-7. Si el rodillo A se mueve a la derecha a una velocidad constante $v_A = 3$ m/s, determine la velocidad angular del eslabón y la velocidad del rodillo B cuando $\theta = 30°$.



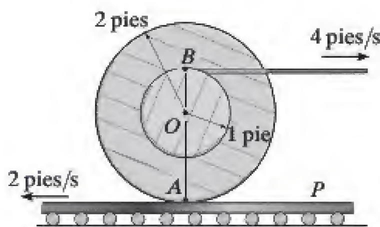
F16-7

F16-8. La rueda gira sin deslizarse con una velocidad angular $\omega = 10$ rad/s. Determine la magnitud de la velocidad en el punto B en el instante que se muestra.



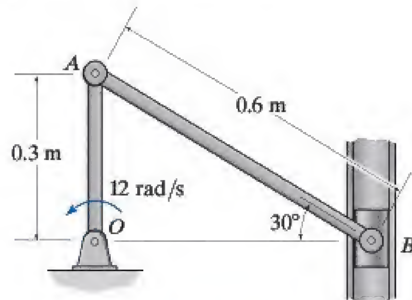
F16-8

F16-9. Determine la velocidad angular del carrete. El cable se enrolla alrededor del núcleo interno y el carrete no se desliza sobre la plataforma P.



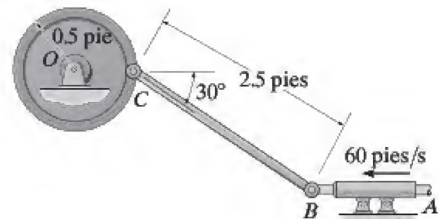
F16-9

F16-10. Si la palanca OA gira con una velocidad angular de $\omega = 12$ rad/s, determine la velocidad del pistón B y la velocidad angular de la barra AB en el instante que se muestra.



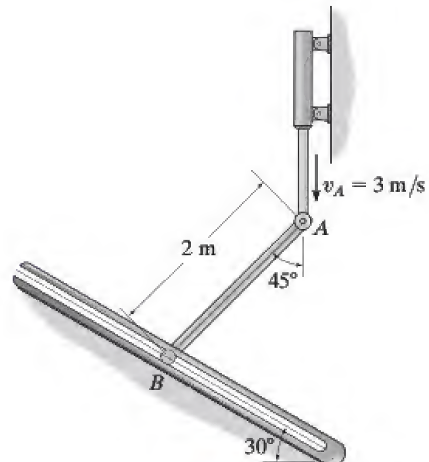
F16-10

F16-11. Si la barra AB se desliza a lo largo de la ranura horizontal con una velocidad de 60 pies/s, determine la velocidad angular del eslabón BC en el instante que se muestra.



F16-11

F16-12. La velocidad del extremo A del eslabón es $v_A = 3$ m/s. Determine la velocidad de la clavija B en este instante. La clavija está restringida a moverse a lo largo de la ranura.

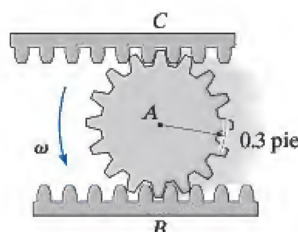


F16-12

PROBLEMAS

16-54. El piñón dentado A rueda sobre la cremallera fija B con una velocidad angular $\omega = 4$ rad/s. Determine la velocidad de la cremallera C.

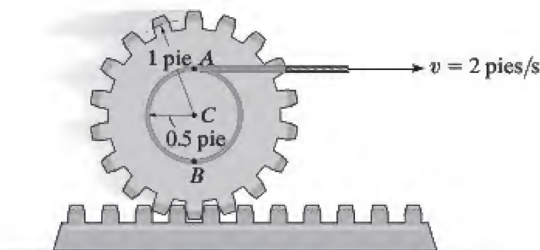
16-55. El piñón dentado A rueda sobre las cremalleras B y C. Si B se desplaza a la derecha a 8 pies/s y C lo hace a la izquierda a 4 pies/s, determine la velocidad angular del piñón dentado y la velocidad de su centro A.



Probs. 16-54/55

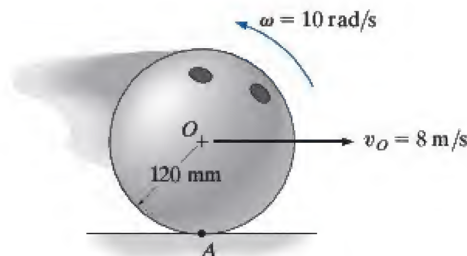
***16-56.** El engrane descansa en una cremallera horizontal fija. Se enrolla una cuerda alrededor del núcleo interno del engrane de modo que permanece tangente de manera horizontal al núcleo interno en A. Si la cuerda se jala a la derecha con una velocidad constante de 2 pies/s, determine la velocidad del centro del engrane, C.

•16-57. Resuelva el problema 16-56 con el supuesto de que la cuerda se enrolla alrededor del engrane en el sentido opuesto, de modo que el extremo de la cuerda permanece tangente de manera horizontal al núcleo interno en B y se jala a la derecha a 2 pies/s.



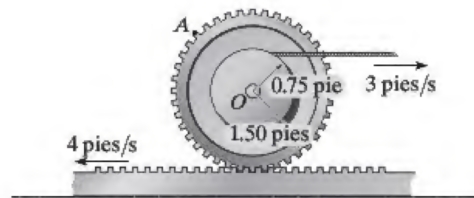
Probs. 16-56/57

16-58. Se lanza una bola de boliche por el "callejón" (pista o bolera) con una rotación inversa de $\omega = 10$ rad/s mientras que su centro O tiene una velocidad hacia delante de $v_O = 8$ m/s. Determine la velocidad del punto A en contacto con el callejón.



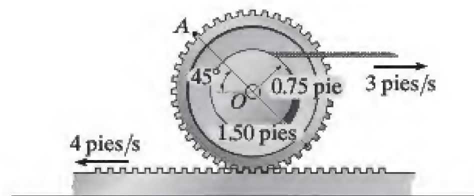
Prob. 16-58

16-59. Determine la velocidad angular del engrane y la velocidad de su centro O en el instante que se muestra.



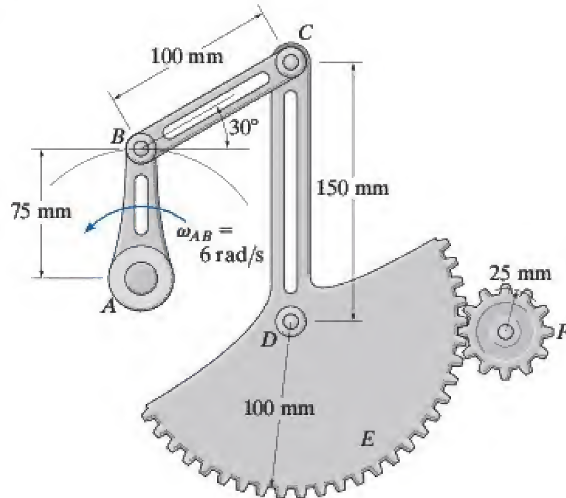
Prob. 16-59

***16-60.** Determine la velocidad del punto A en el borde del engrane en el instante que se muestra.



Prob. 16-60

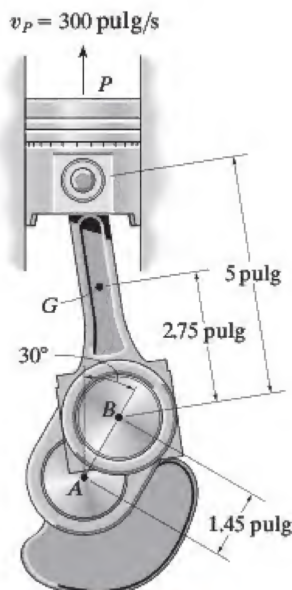
•**16-61.** La rotación del eslabón AB crea un movimiento oscilatorio del engrane F. Si AB tienen una velocidad angular de $\omega_{AB} = 6$ rad/s, determine la velocidad angular del engrane F en el instante que se muestra. El engrane E está rígidamente unido al brazo CD y conectado con un pasador D a un punto fijo.



Prob. 16-61

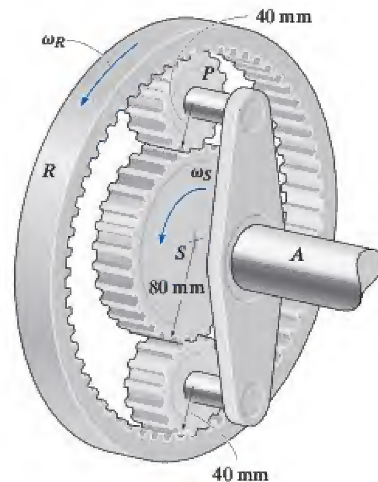
16-62. El pistón P sube con una velocidad de 300 pulg/s en el instante que se muestra. Determine la velocidad angular del cigüeñal AB en este instante.

16-63. Determine la velocidad del centro de gravedad G de la biela en el instante mostrado. El pistón P sube con una velocidad de 300 pulg/s.



Probs. 16-62/63

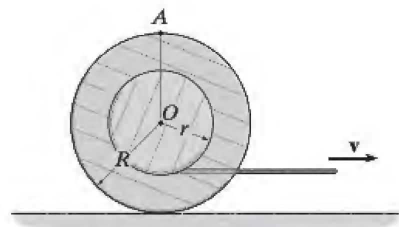
*__16-64.__ El sistema de engranes planetarios se utiliza en la transmisión automática de un automóvil. Bloquear o liberar determinados engranes tiene la ventaja de hacer que el automóvil funcione a diferentes velocidades. Considere el caso en que la corona dentada R se mantiene fija, $\omega_R = 0$ y el engrane sol S está girando a $\omega_S = 5$ rad/s. Determine la velocidad angular de cada uno de los engranes planeta P y la flecha A.



Prob. 16-64

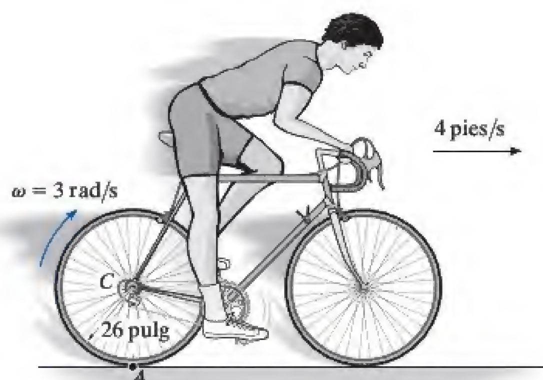
•**16-65.** Determine la velocidad del centro O del carrete cuando el cable se jala hacia la derecha con una velocidad de **v**. El carrete rueda sin deslizarse.

16-66. Determine la velocidad del punto A en el borde externo del carrete en el instante que se muestra cuando se jala el cable hacia la derecha con una velocidad de **v**. El carrete rueda sin deslizarse.



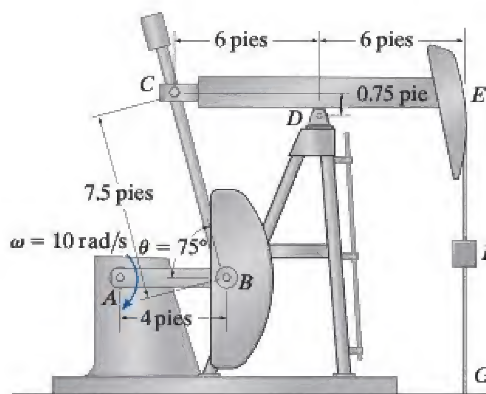
Probs. 16-65/66

16-67. La velocidad de la bicicleta es $v = 4$ pies/s, y en el mismo instante la velocidad angular de la rueda trasera en sentido horario es $\omega = 3$ rad/s, la que hace que patine en su punto de contacto A. Determine la velocidad del punto A.



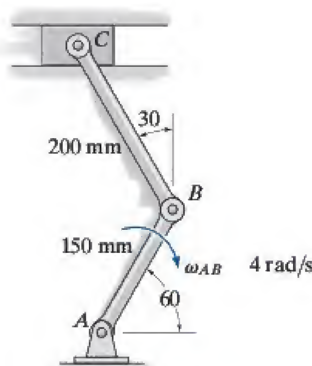
Prob. 16-67

•16-69. La unidad de bombeo se compone de la manivela AB, la biela BC, la viga balancín CDE y el tirante F. Si la manivela gira con una velocidad angular de $\omega = 10$ rad/s, determine la velocidad angular de la viga balancín y la velocidad del tirante EFG en el instante que se muestra.



Prob. 16-69

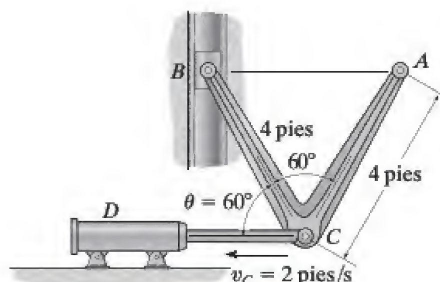
***16-68.** Si la velocidad angular de la barra AB es $\omega_{AB} = 4$ rad/s, determine la velocidad del bloque corredizo C en el instante que se muestra.



Prob. 16-68

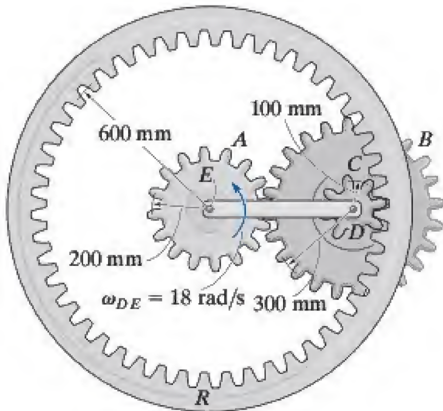
16-70. Si el cilindro hidráulico se acorta a una velocidad constante de $v_C = 2$ pies/s, determine la velocidad angular del eslabón ACB y la velocidad del bloque B en el instante que se muestra.

16-71. Si el cilindro hidráulico se acorta a una velocidad constante de $v_C = 2$ pies/s, determine la velocidad del extremo A del eslabón ACB en el instante que se muestra.



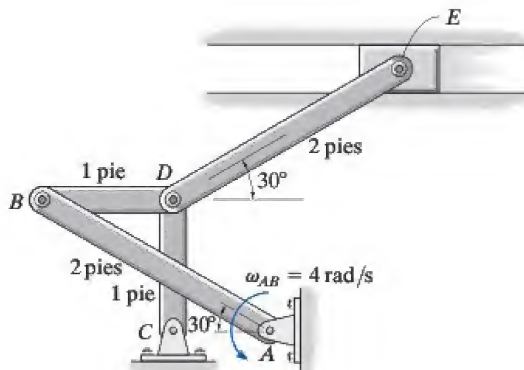
Probs. 16-70/71

***16-72.** El tren de engranes epicíclicos se compone de un engrane sol A el cual está acoplado al engrane planeta B. Este engrane tiene una masa interna C la cual está fija en B y engrana con la corona dentada R. Si el eslabón DE conectado por medio de un pasador a B y C gira a ω_{DE} = 18 rad/s alrededor del pasador E, determine las velocidades angulares de los engranes planeta y sol.



Prob. 16-72

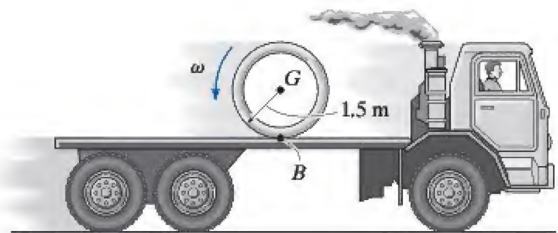
•16-73. Si la velocidad angular del eslabón AB es ω_{AB} = 4 rad/s en el instante que se muestra, determine la velocidad del bloque corredizo E en este instante. También, identifique el tipo de movimiento de cada uno de los cuatro eslabones.



Prob. 16-73

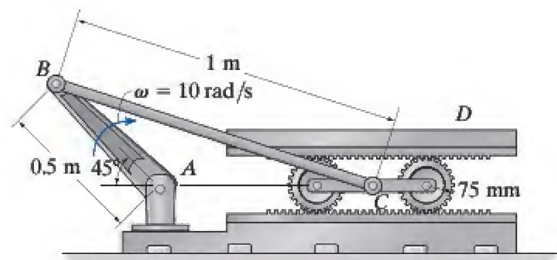
16-74. En el instante que se ilustra, el camión viaja hacia la derecha a 3 m/s, mientras que el tubo rueda en sentido contrario al de las manecillas del reloj a ω = 8 rad/s sin deslizarse en B. Determine la velocidad del centro G del tubo.

16-75. En el instante que se ilustra, el camión viaja hacia la derecha a 8 m/s. Si el tubo no se desliza en B, determine su velocidad angular si parece que su centro de masa G permanece estacionario para un observador en el suelo.



Probs. 16-74/75

***16-76.** El mecanismo de una mesa de impresión oscilante es propulsado por la manivela AB. Si ésta gira con una velocidad angular de ω = 10 rad/s, determine la velocidad del punto C en el instante que se muestra.

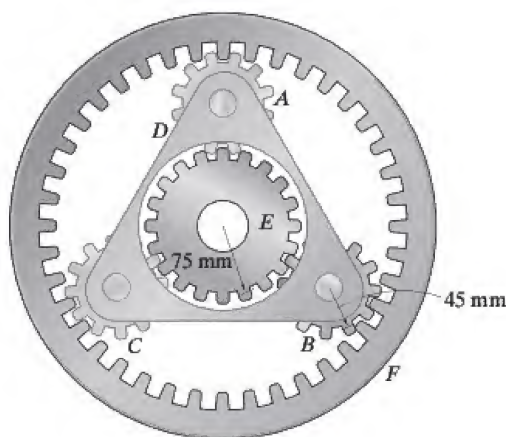


Prob. 16-76

•**16-77.** El sistema de engranes planetarios de una transmisión automática consta de tres engranes planeta A, B y C, montados en un portador D, y acoplados con el engrane sol E y la corona dentada F. Al controlar cuál engrane del sistema planetario gira y cuál recibe la potencia del motor, la transmisión automática puede modificar la velocidad y dirección del automóvil. Si el portador gira con una velocidad angular en sentido contrario al de las manecillas del reloj de $\omega_D = 20$ rad/s, mientras que la corona dentada lo hace con una velocidad angular en el sentido de las manecillas del reloj de $\omega_F = 10$ rad/s, determine la velocidad angular de los engranes planeta y el engrane sol. Los radios de los engranes planeta y el engrane sol son de 45 mm y 75 mm, respectivamente.

16-78. El sistema de engranes planetarios de una transmisión automática consta de tres engranes planeta A, B y C, montados en un portador D, y acoplados con el engrane sol E y la corona dentada F. Al controlar cuál engrane del sistema planetario gira y cuál recibe la potencia del motor, la transmisión automática puede modificar la velocidad y dirección del automóvil. Si la corona se mantiene estacionaria y el portador gira con una velocidad angular en el sentido de las manecillas del reloj de $\omega_D = 20$ rad/s, determine la velocidad angular de los engranes planeta y el engrane sol. Los radios de los engranes planeta y el engrane sol son de 45 mm y 75 mm, respectivamente.

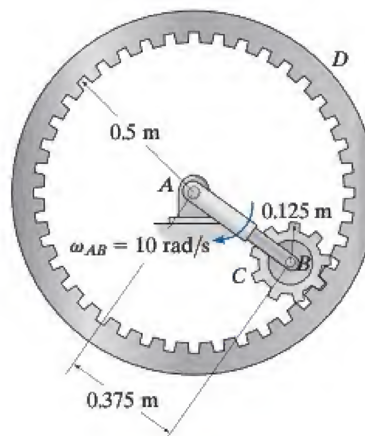
16



Probs. 16-77/78

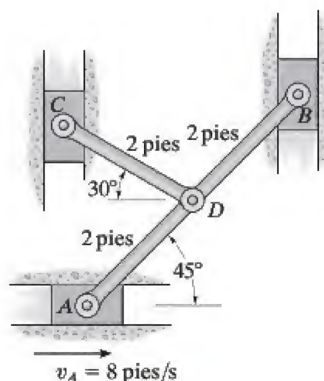
16-79. Si la corona dentada D se mantiene fija y el eslabón AB gira con una velocidad angular de $\omega_{AB} = 10$ rad/s, determine la velocidad angular del engrane C.

***16-80.** Si la corona dentada D gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj con una velocidad angular de $\omega_D = 5$ rad/s mientras el eslabón AB lo hace en el sentido de las manecillas del reloj con una velocidad angular de $\omega_{AB} = 10$ rad/s, determine la velocidad angular del engrane C.



Probs. 16-79/80

•**16-81.** Si el bloque corredizo A se mueve a la derecha a $v_A = 8$ pies/s, determine la velocidad de los bloques B y C en el instante que se muestra. El elemento CD está conectado por medio de un pasador al elemento ADB.



Prob. 16-81

16.6 Centro instantáneo de velocidad cero

La velocidad de cualquier punto B localizado en un cuerpo rígido puede obtenerse de una manera muy directa al seleccionar el punto base A como un punto de *velocidad cero* en el instante considerado. En este caso, $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$ y por consiguiente la ecuación de velocidad, $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$, se vuelve $\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$. En el caso de un cuerpo que tenga movimiento plano general, el punto A así seleccionado se llama *centro instantáneo de velocidad cero (CI)* y se ubica en el *eje instantáneo de velocidad cero*. Este eje siempre es perpendicular al plano de movimiento y la intersección del eje con el plano define la ubicación del *CI*. Como el punto A coincide con el *CI*, entonces $\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/CI}$ y por tanto el punto B se mueve momentáneamente alrededor del *CI* en una *trayectoria circular*; expresado de otra manera, el cuerpo parece girar alrededor del eje instantáneo. La *magnitud* de $\mathbf{v}_B$ es simplemente $v_B = \omega r_{B/CI}$, donde ω es la velocidad angular del cuerpo. Debido al movimiento circular, la *dirección* de $\mathbf{v}_B$ siempre debe ser *perpendicular* a $\mathbf{r}_{B/CI}$.

Por ejemplo, el *CI* de la rueda de la bicicleta de la figura 16-17 está en el punto de contacto con el suelo. Allí los rayos son un tanto visibles, mientras que en la parte superior de rueda se ven borrosos. Si nos imaginamos que la rueda esta momentáneamente fija por medio de un pasador en este punto, se pueden determinar las velocidades de varios puntos con $v = \omega r$. Aquí, las distancias radiales mostradas en la foto, figura 16-17, deben determinarse mediante la geometría de la rueda.

16

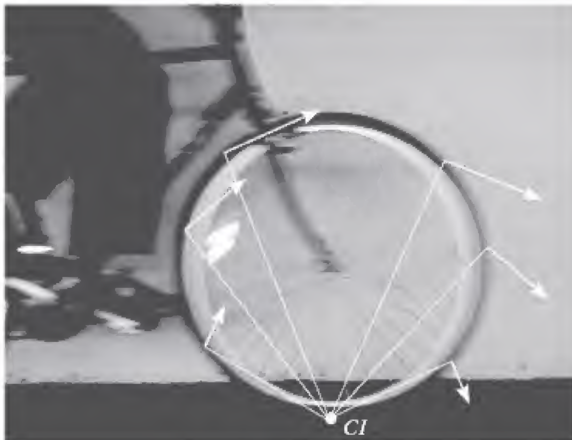
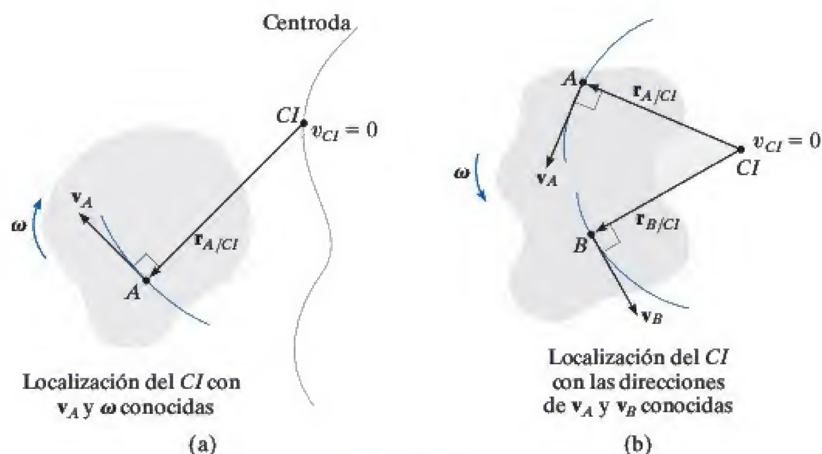


Fig. 16-17



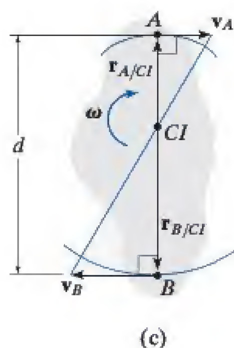
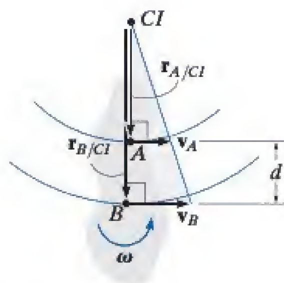


Fig. 16-18

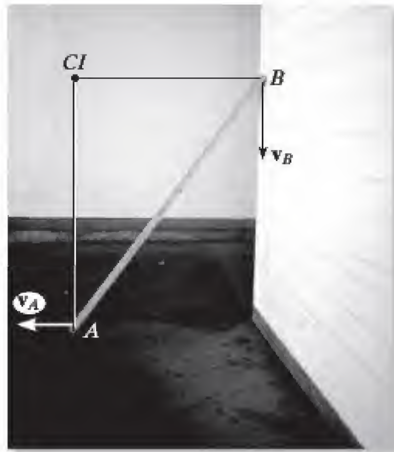


Localización del *CI*. Para localizar el *CI* podemos partir del hecho de que la *velocidad* de un punto en el cuerpo *siempre* es *perpendicular* al *vector de posición relativa* dirigido desde *CI* hacia el punto. Se presentan varias posibilidades:

- *La velocidad* $\mathbf{v}_A$ *de un punto A en el cuerpo y la velocidad angular* $\boldsymbol{\omega}$ *del cuerpo se conocen*, figura 16-18*a*. En este caso, el *CI* se encuentra a lo largo de la línea trazada perpendicular a $\mathbf{v}_A$ en *A*, de modo que la distancia de *A* al *CI* es $r_{A/CI} = v_A/\omega$. Observe que el *CI* queda arriba a la derecha de *A* puesto que $\mathbf{v}_A$ debe provocar una velocidad angular en el sentido de las manecillas del reloj $\boldsymbol{\omega}$ alrededor del *CI*.

- *Las líneas de acción de dos velocidades no paralelas* $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ *se conocen*, figura 16-18*b*. Trace en los puntos *A* y *B* segmentos de línea perpendiculares a $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$. Al extender estas perpendiculares hasta su *punto de intersección* como se muestra, se localiza el *CI* en el instante considerado.

- *La magnitud y dirección de dos velocidades paralelas* $\mathbf{v}_A$ *y* $\mathbf{v}_B$ *se conocen*. En este caso, la ubicación del *CI* se determina por medio de triángulos proporcionales. En las figuras 16-18*c* y *d* se muestran algunos ejemplos. En ambos casos $r_{A/CI} = v_A/\omega$ y $r_{B/CI} = v_B/\omega$. Si *d* es una distancia conocida entre los puntos *A* y *B*, entonces en la figura 16-18*c*, $r_{A/CI} + r_{B/CI} = d$ y en la figura 16-18*d*, $r_{B/CI} - r_{A/CI} = d$.



Cuando la tabla se desliza hacia abajo a la izquierda experimenta un movimiento plano general. Como las direcciones de las velocidades de sus extremos A y B son conocidas, el CI se localiza como se muestra. En este instante la tabla girará momentáneamente alrededor de este punto. Dibuje la tabla en otras varias posiciones y establezca el CI en cada caso.

Dese cuenta que el punto seleccionado como el centro instantáneo de velocidad cero del cuerpo *sólo puede ser utilizado en el instante considerado* puesto que el cuerpo cambia de posición de un instante al siguiente. El lugar geométrico de los puntos que definen la ubicación del CI durante el movimiento del cuerpo se llama *centroda*, figura 16-18*a*, y por tanto cada punto en la centroda actúa como el CI del cuerpo sólo por un instante.

Aun cuando el CI puede ser utilizado con mucho provecho para determinar la velocidad de cualquier punto de un cuerpo, por lo general *no tiene aceleración cero* y en consecuencia *no se le debe* utilizar para determinar las aceleraciones de los puntos de un cuerpo.

16

Procedimiento para el análisis

La velocidad de un punto de un cuerpo sometido a movimiento plano general puede determinarse con referencia a su centro instantáneo de velocidad cero siempre que primero se establezca la ubicación del CI mediante uno de los tres métodos antes descritos.

- Como se muestra en el diagrama cinemático de la figura 16-19, nos imaginamos el cuerpo como "extendido y fijo por medio de un pasador" en el CI de modo que, en el instante considerado, gira alrededor de este pasador con su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$.
- La *magnitud* de la velocidad de cada uno de los puntos arbitrarios A, B y C en el cuerpo puede determinarse por medio de la ecuación $v = \omega r$, donde r es la distancia radial del CI a cada punto.
- La línea de acción de cada vector de velocidad $\mathbf{v}$ es *perpendicular* a su línea radial asociada $\mathbf{r}$, y la velocidad tiene un *sentido de dirección* que tiende a mover el punto de una manera consistente con la rotación angular $\boldsymbol{\omega}$ de la línea radial, figura 16-19.

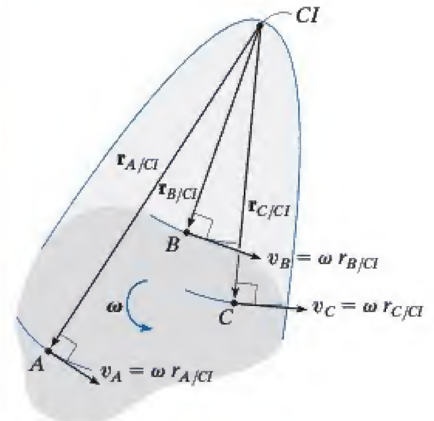
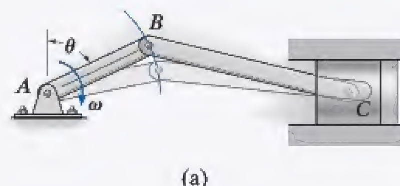


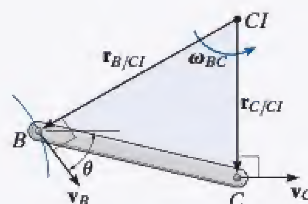
Fig. 16-19

EJEMPLO 16.10

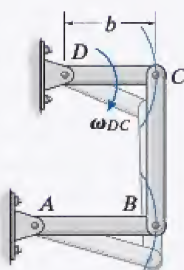
Demuestre cómo se ubica el centro instantáneo de velocidad cero para (a) el elemento BC que se ilustra en la figura 16-20*a* y (b) el eslabón CB que se muestra en la figura 16-20*c*.



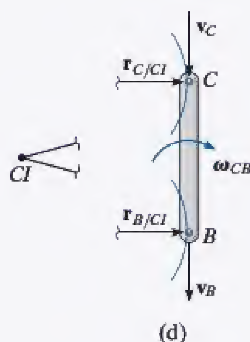
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 16-20

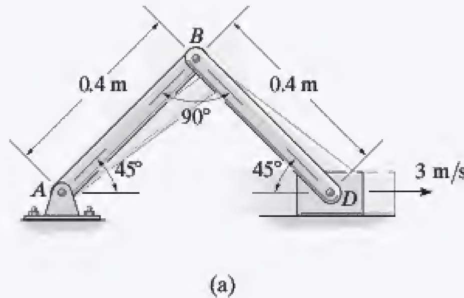
SOLUCIÓN

Parte (a). Como se muestra en la figura 16-20*a*, el punto B describe una trayectoria circular de modo que $\mathbf{v}_B$ es perpendicular a AB. Por consiguiente, actúa a un ángulo θ desde la horizontal como se muestra en la figura 16-20*b*. El movimiento del punto B hace que el pistón se mueva hacia delante *de manera horizontal* con una velocidad $\mathbf{v}_C$. Cuando las líneas se trazan perpendiculares a $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_C$, figura 16-20*b*, se intersecan en el CI.

Parte (b). Los puntos B y C siguen trayectorias circulares de movimiento puesto que cada uno de los eslabones AB y DC se someten a rotación alrededor de un eje fijo, figura 16-20*c*. Como la velocidad siempre es tangente a la trayectoria en el instante considerado, $\mathbf{v}_C$ en la barra DC y $\mathbf{v}_B$ en la barra AB están dirigidas verticalmente hacia abajo, a lo largo del eje del eslabón CB, figura 16-20*d*. Líneas radiales trazadas perpendiculares a estas dos velocidades forman líneas paralelas que se intersecan en "infinito", es decir, $r_{C/CI} \to \infty$ y $r_{B/CI} \to \infty$. Por tanto, $\omega_{CB} = (v_C/r_{C/CI}) \to 0$. Por consiguiente, el eslabón CB *se traslada* momentáneamente. Un instante después, sin embargo, CB quedará en una posición inclinada, lo que hace que el CI se mueva a alguna ubicación finita.

EJEMPLO 16.11

El bloque D en la figura 16-21a se mueve con una rapidez de 3 m/s. Determine las velocidades angulares de los eslabones BD y AB en el instante que se muestra.



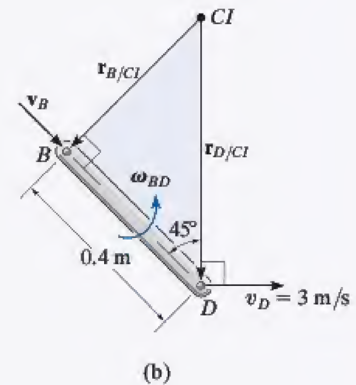
(a)

SOLUCIÓN

A medida que D se mueve a la derecha, hace que AB gire en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del punto A. Por consiguiente, $\mathbf{v}_B$ está dirigida perpendicular a AB. El centro instantáneo de velocidad cero de BD está en la intersección de los segmentos de línea trazados perpendiculares a $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_D$, figura 16-21b. Por la geometría,

$$r_{B/CI} = 0.4 \tan 45° \text{ m} = 0.4 \text{ m}$$

$$r_{D/CI} = \frac{0.4 \text{ m}}{\cos 45°} = 0.5657 \text{ m}$$



(b)

Como la magnitud de $\mathbf{v}_D$ se conoce, la velocidad angular del eslabón BD es

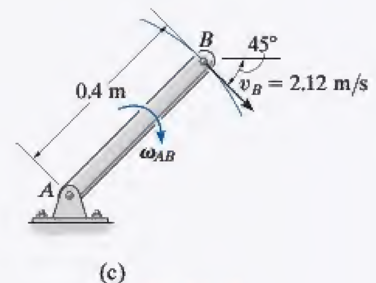
$$\omega_{BD} = \frac{v_D}{r_{D/CI}} = \frac{3 \text{ m/s}}{0.5657 \text{ m}} = 5.30 \text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

La velocidad de B es por consiguiente

$$v_B = \omega_{BD}(r_{B/CI}) = 5.30 \text{ rad/s } (0.4 \text{ m}) = 2.12 \text{ m/s} \quad \measuredangle 45°$$

Según la figura 16-21c, la velocidad angular de AB es

$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{r_{B/A}} = \frac{2.12 \text{ m/s}}{0.4 \text{ m}} = 5.30 \text{ rad/s} \circlearrowright \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$



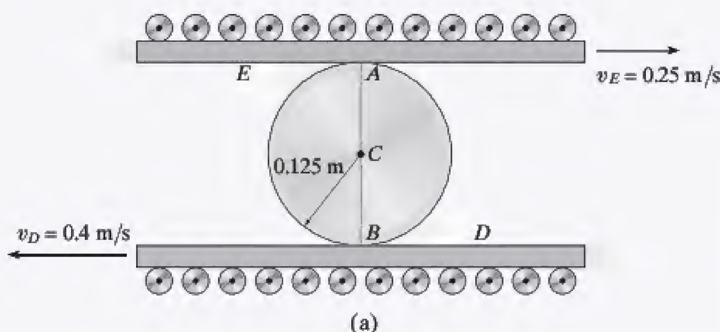
(c)

Fig. 16-21

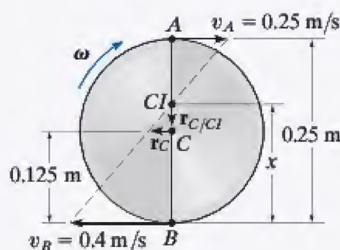
NOTA: trate y resuelva este problema por la aplicación de $\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{D/B}$ al elemento BD.

EJEMPLO 16.12

El cilindro que se muestra en la figura 16-22*a* rueda sin deslizarse entre las dos placas móviles *E* y *D*. Determine la velocidad angular del cilindro y la velocidad de su centro *C*.



(a)



(b)

Fig. 16-22

SOLUCIÓN

Como no hay deslizamiento, los puntos de contacto *A* y *B* en el cilindro tienen las mismas velocidades que las placas *E* y *D*, respectivamente. Además, las velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ son *paralelas*, de modo que por la proporcionalidad de los triángulos rectángulos el *CI* se encuentra en un punto sobre la línea *AB*, figura 16-22*b*. Si suponemos que este punto está a una distancia *x* de *B*, tenemos

$$v_B = \omega x; \qquad 0.4 \text{ m/s} = \omega x$$

$$v_A = \omega(0.25 \text{ m} - x); \qquad 0.25 \text{ m/s} = \omega(0.25 \text{ m} - x)$$

Si se divide una ecuación entre la otra se elimina ω y se obtiene

$$0.4(0.25 - x) = 0.25x$$

$$x = \frac{0.1}{0.65} = 0.1538 \text{ m}$$

Por consiguiente, la velocidad angular del cilindro es

$$\omega = \frac{v_B}{x} = \frac{0.4 \text{ m/s}}{0.1538 \text{ m}} = 2.60 \text{ rad/s} \circlearrowright \qquad \textit{Resp.}$$

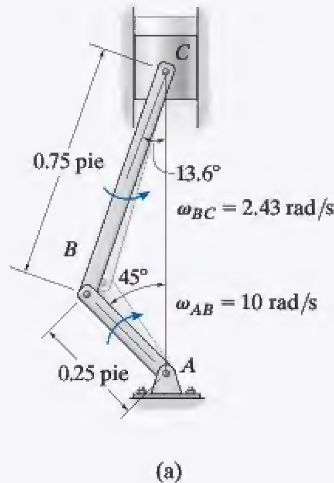
La velocidad del punto *C* es, por consiguiente,

$$v_C = \omega r_{C/CI} = 2.60 \text{ rad/s } (0.1538 \text{ m} - 0.125 \text{ m})$$

$$= 0.0750 \text{ m/s} \leftarrow \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 16.13

El cigüeñal AB gira en el sentido de las manecillas del reloj con una velocidad angular de 10 rad/s, figura 16-23*a*. Determine la velocidad del pistón en el instante que se muestra.



(a)

SOLUCIÓN

El cigüeñal gira alrededor de un eje fijo, y por tanto la velocidad del punto B es

$$v_B = 10 \text{ rad/s } (0.25 \text{ pie}) = 2.50 \text{ pies/s } \measuredangle 45^\circ$$

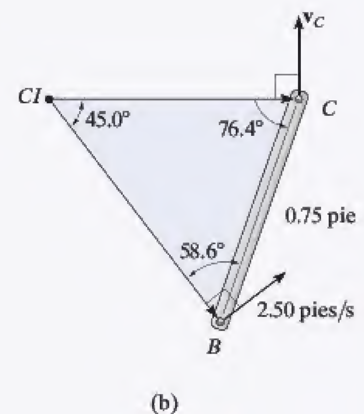
Como las direcciones de las velocidades de B y C se conocen, entonces el CI de biela BC se encuentra en la intersección de las líneas extendidas a partir de estos puntos, perpendiculares a $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_C$, figura 16-23*b*. Las magnitudes de $\mathbf{r}_{B/CI}$ y $\mathbf{r}_{C/CI}$ se obtienen con la geometría del triángulo y la ley de los senos, es decir,

$$\frac{0.75 \text{ pie}}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{r_{B/CI}}{\text{sen } 76.4^\circ}$$

$$r_{B/CI} = 1.031 \text{ pies}$$

$$\frac{0.75 \text{ pie}}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{r_{C/CI}}{\text{sen } 58.6^\circ}$$

$$r_{C/CI} = 0.9056 \text{ pie}$$



(b)

Fig. 16-23

El sentido de rotación de $\boldsymbol{\omega}_{BC}$ debe ser el mismo de la rotación ocasionada por $\mathbf{v}_B$ alrededor del CI, la cual es en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Por consiguiente,

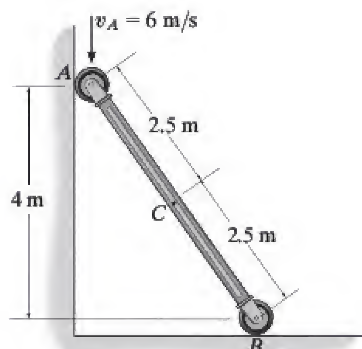
$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{r_{B/CI}} = \frac{2.5 \text{ pies/s}}{1.031 \text{ pies}} = 2.425 \text{ rad/s}$$

Con este resultado, la velocidad del pistón es

$$v_C = \omega_{BC} r_{C/CI} = (2.425 \text{ rad/s})(0.9056 \text{ pie}) = 2.20 \text{ pies/s} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

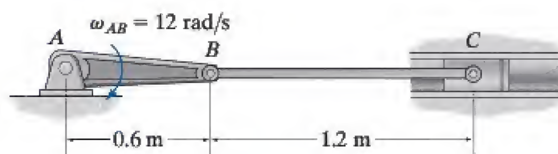
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F16-13. Determine la velocidad angular de la barra y la velocidad del punto C en el instante que se muestra.



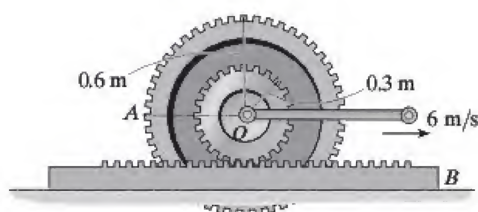
F16-13

F16-14. Determine la velocidad angular del eslabón BC y la velocidad del pistón C en el instante que se muestra.



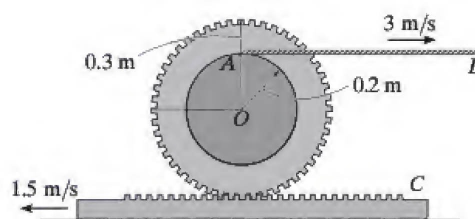
F16-14

F16-15. Si el centro O de la rueda se mueve con una velocidad de $v_O = 6$ m/s, determine la velocidad del punto A en la rueda. La cremallera B está fija.



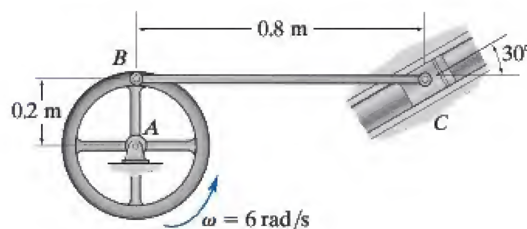
F16-15

F16-16. Si el cable AB se desenrolla con una rapidez de 3 m/s y la de la cremallera C es de 1.5 m/s, determine la velocidad angular del engrane y la velocidad de su centro O.



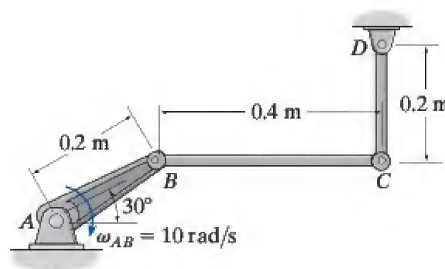
F16-16

F16-17. Determine la velocidad angular del eslabón BC y la velocidad del pistón C en el instante que se muestra.



F16-17

F16-18. Determine la velocidad angular de los eslabones BC y CD en el instante que se muestra.



F16-18

PROBLEMAS

16-82. Resuelva el problema 16-54 con el método de centro instantáneo de velocidad cero.

16-83. Resuelva el problema 16-56 con el método de centro instantáneo de velocidad cero.

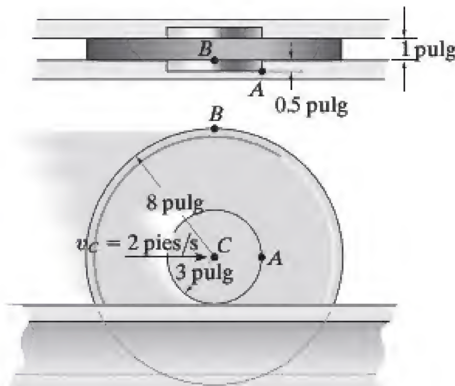
***16-84.** Resuelva el problema 16-64 con el método de centro instantáneo de velocidad cero.

•16-85. Resuelva el problema 16-58 con el método de centro instantáneo de velocidad cero.

16-86. Resuelva el problema 16-67 con el método de centro instantáneo de velocidad cero.

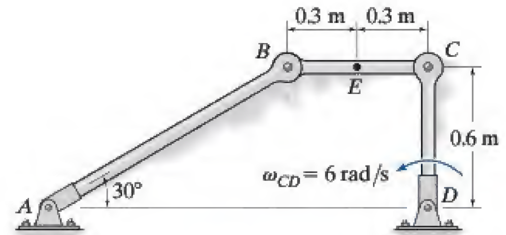
16-87. Resuelva el problema 16-68 con el método de centro instantáneo de velocidad cero.

***16-88.** La rueda gira sobre su maza sin deslizarse sobre la superficie horizontal. Si la velocidad de su centro es $v_C = 2$ pies/s hacia la derecha, determine las velocidades de los puntos A y B en el instante que se muestra.



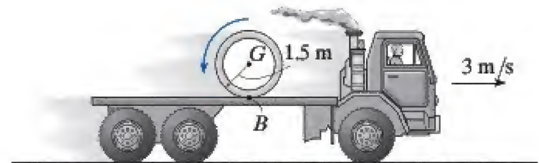
Prob. 16-88

•16-89. Si la velocidad angular del eslabón CD es $\omega_{CD} = 6$ rad/s, determine la velocidad del punto E en el eslabón BC y la velocidad angular del eslabón AB en el instante que se muestra.



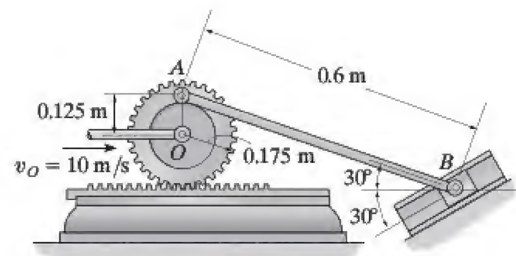
Prob. 16-89

16-90. En el instante que se muestra, el camión viaja hacia la derecha a 3 m/s, mientras que el tubo rueda en sentido contrario al de las manecillas del reloj a $\omega = 6$ rad/s sin deslizarse en B. Determine la velocidad del centro G del tubo.



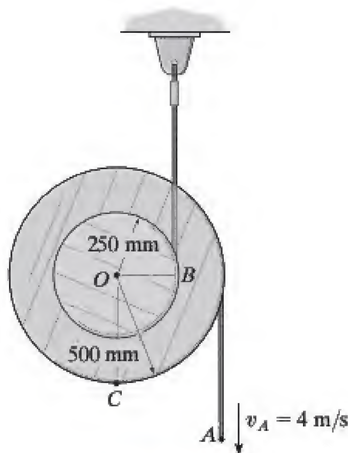
Prob. 16-90

16-91. Si al centro O del engrane se le imprime una velocidad de $v_O = 10$ m/s, determine la velocidad del bloque corredizo B en el instante que se muestra.



Prob. 16-91

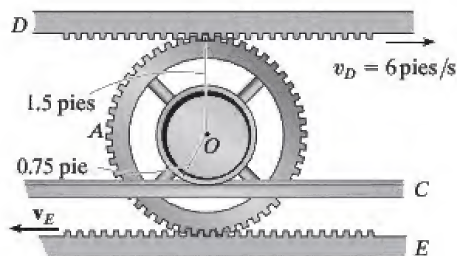
***16-92.** Si se jala hacia abajo el extremo A de la cuerda con una velocidad de $v_A = 4$ m/s, determine la velocidad angular del carrete y la velocidad del punto C localizado en su borde externo.



Prob. 16-92

16-94. La rueda está rígidamente conectada al engrane A, el cual está acoplado con las cremalleras D y E. Si la velocidad de D es $v_D = 6$ pies/s hacia la derecha y la rueda gira sobre la cremallera C sin deslizarse, determine la velocidad de la cremallera E.

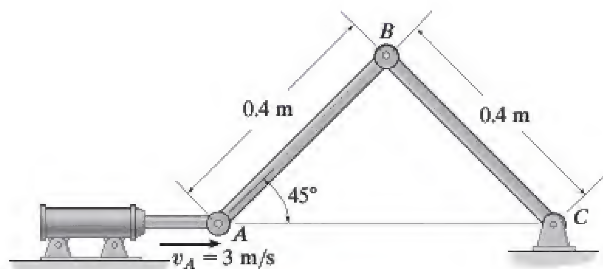
16-95. La rueda está conectada fuertemente al engrane A, el cual está acoplado con las cremalleras D y E. Si las cremalleras tienen una velocidad de $v_D = 6$ pies/s y $v_E = 10$ pies/s, demuestre que es necesario que la rueda se deslice sobre la cremallera fija C. También determine la velocidad angular del engrane y la velocidad de su centro O.



Probs. 16-94/95

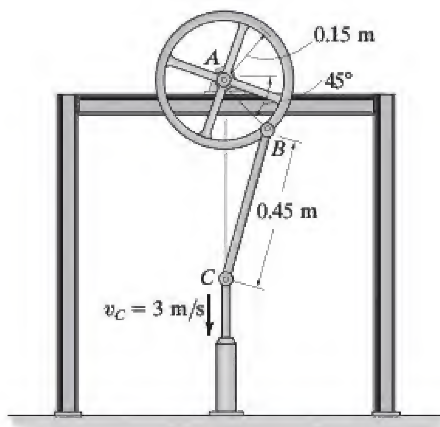
16

•**16-93.** Si el extremo A del cilindro hidráulico se mueve con una velocidad de $v_A = 3$ m/s, determine la velocidad angular de la barra BC en el instante que se muestra.



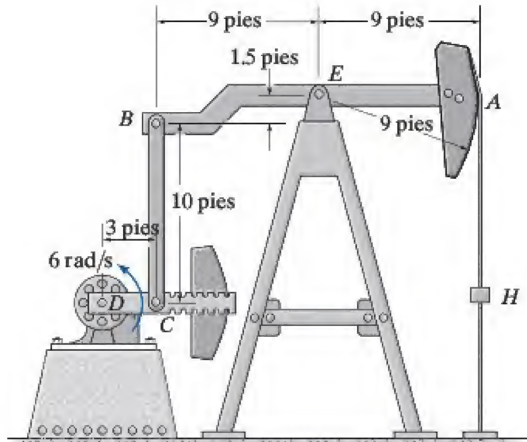
Prob. 16-93

***16-96.** Si la velocidad de C es $v_C = 3$ m/s, determine la velocidad angular de la rueda en el instante que se muestra.



Prob. 16-96

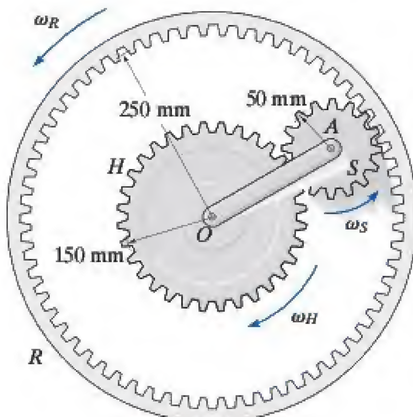
•**16-97.** La unidad de bombeo de petróleo se compone de una viga balancín AB, una biela BC y una manivela CD. Si ésta gira a una velocidad constante de 6 rad/s, determine la velocidad de la barra de suspensión H en el instante que se muestra. *Sugerencia:* el punto B sigue una trayectoria circular alrededor del punto E y por consiguiente la velocidad de B *no* es vertical.



Prob. 16-97

16-98. Si la maza dentada H y la corona dentada R tienen velocidades angulares $\omega_H = 5$ rad/s y $\omega_R = 20$ rad/s, respectivamente, determine la velocidad angular ω_S del engrane recto S y la velocidad angular del brazo OA.

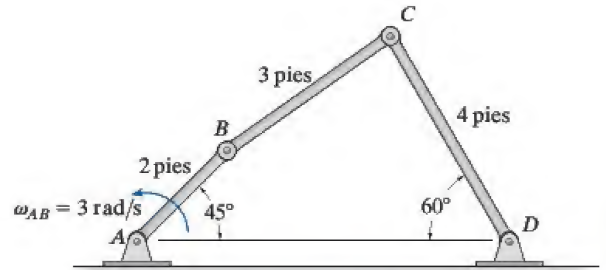
16-99. Si la maza dentada H tiene una velocidad angular $\omega_H = 5$ rad/s, determine la velocidad angular de la corona dentada R de modo que el brazo OA el cual está conectado por medio de un pasador al engrane recto S permanezca estacionario ($\omega_{OA} = 0$). ¿Cuál es la velocidad angular del engrane recto?



Probs. 16-98/99

***16-100.** Si la barra AB gira con una velocidad angular $\omega_{AB} = 3$ rad/s, determine la velocidad angular de la barra BC en el instante que se muestra.

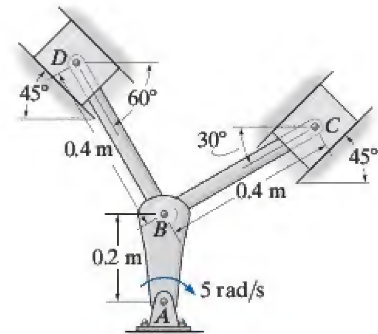
•**16-101.** Si la barra AB gira con una velocidad angular $\omega_{AB} = 3$ rad/s, determine la velocidad angular de la barra CD en el instante que se muestra.



Probs. 16-100/101

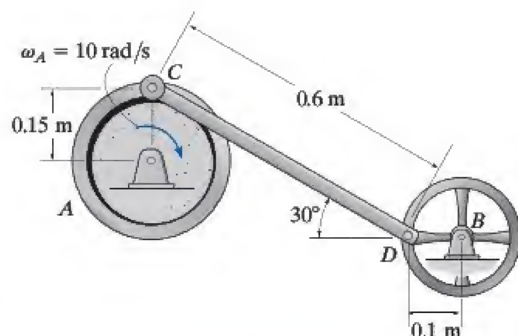
16-102. El mecanismo que se utiliza en un motor marino se compone de una manivela AB y dos bielas BC y BD. Determine la velocidad del pistón en C cuando la manivela está en la posición que se muestra y su velocidad angular es de 5 rad/s.

16-103. El mecanismo que se utiliza en un motor marino se compone de una manivela AB y dos bielas BC y BD. Determine la velocidad del pistón en D cuando la manivela está en la posición que se muestra y su velocidad angular es de 5 rad/s.



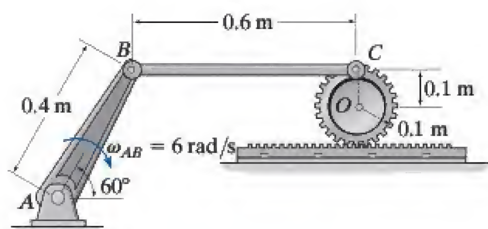
Probs. 16-102/103

***16-104.** Si el volante A gira con una velocidad angular de $\omega_A = 10$ rad/s, determine la velocidad angular de la rueda B en el instante que se muestra.



Prob. 16-104

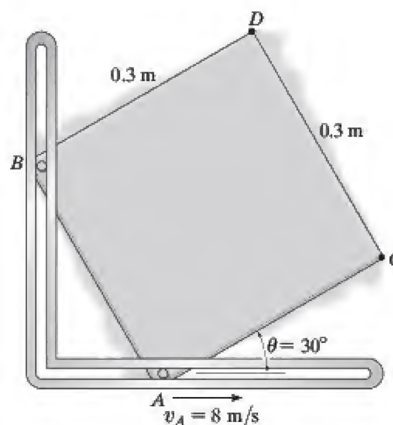
•16-105. Si la manivela AB gira con una velocidad angular de $\omega_{AB} = 6$ rad/s, determine la velocidad del centro O del engrane en el instante que se muestra.



Prob. 16-105

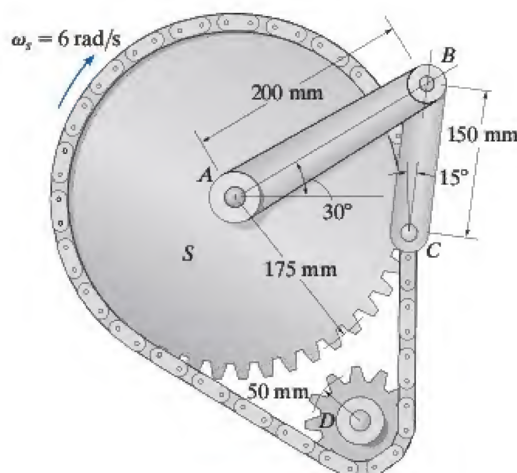
16-106. La placa cuadrada está limitada a moverse en las ranuras en A y B. Cuando $\theta = 30°$, el punto A se mueve a $v_A = 8$ m/s. Determine la velocidad del punto C en el instante que se muestra.

16-107. La placa cuadrada está limitada a moverse en las ranuras en A y B. Cuando $\theta = 30°$, el punto A se mueve a $v_A = 8$ m/s. Determine la velocidad del punto D en el instante que se muestra.



Probs. 16-106/107

***16-108.** El mecanismo produce movimiento intermitente del eslabón AB. Si la rueda dentada S gira con una velocidad angular de $\omega_S = 6$ rad/s, determine la velocidad angular del eslabón AB en este instante. La rueda dentada S está montada en una flecha aparte de una flecha colineal conectada a AB en A. El pasador en C está conectado a uno de los eslabones de la cadena.



Prob. 16-108

16.7 Análisis del movimiento relativo: aceleración

Una ecuación que relacione la aceleración de dos puntos en una barra (cuerpo rígido) sometida a movimiento plano general puede determinarse al diferenciar $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$ con respecto al tiempo. De aquí resulta

$$\frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{B/A}}{dt}$$

Los términos $d\mathbf{v}_B/dt = \mathbf{a}_B$ y $d\mathbf{v}_A/dt = \mathbf{a}_A$ se miden con respecto a un sistema de *ejes x, y fijos* y representan las *aceleraciones absolutas* de los puntos B y A. El último término representa la aceleración de B con respecto a A medida por un observador fijo en los ejes trasladantes x', y' los cuales tienen su origen en el punto base A. En la sección 16.5 se demostró que para este observador el punto B parece moverse a lo largo de un *arco circular* con radio de curvatura $r_{B/A}$. Por consiguiente, $\mathbf{a}_{B/A}$ puede expresarse en función de sus componentes tangencial y normal; es decir, $\mathbf{a}_{B/A} = (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$, donde $(a_{B/A})_t = \alpha r_{B/A}$ y $(a_{B/A})_n = \omega^2 r_{B/A}$. Por tanto, la ecuación de aceleración relativa se escribe en la forma

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n \qquad (16\text{-}17)$$

donde

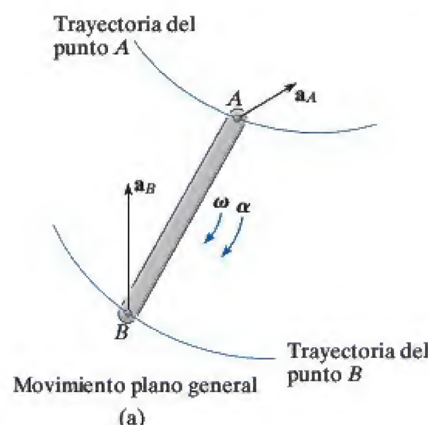
$\mathbf{a}_B$ = aceleración del punto B

$\mathbf{a}_A$ = aceleración del punto A

$(\mathbf{a}_{B/A})_t$ = componente de aceleración tangencial de B con respecto a A. La *magnitud* es $(a_{B/A})_t = \alpha r_{B/A}$ y la *dirección* es perpendicular a $\mathbf{r}_{B/A}$.

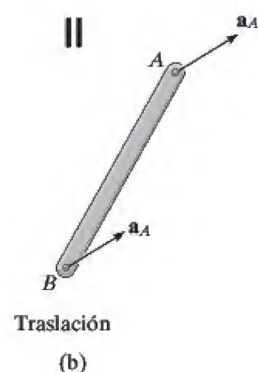
$(\mathbf{a}_{B/A})_n$ = componente de aceleración normal de B con respecto a A. La *magnitud* es $(a_{B/A})_n = \omega^2 r_{B/A}$ y la *dirección* siempre es de B hacia A.

En la figura 16-24 están representados gráficamente los términos de la ecuación 16-17. Aquí se ve que en un instante dado la aceleración de B, figura 16-24*a*, se determina al considerar que la barra se traslada con una aceleración $\mathbf{a}_A$, figura 16-24*b* y simultáneamente gira alrededor del punto base A con una velocidad angular instantánea $\boldsymbol{\omega}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$, figura 16-24*c*. La adición vectorial de estos dos efectos, aplicados a B, resulta en $\mathbf{a}_B$, como se muestra en la figura 16-24*d*. En la figura 16-24*a* se ve que como los puntos A y B se mueven a lo largo de *trayectorias curvas*, la aceleración de estos puntos tendrán *tanto componentes tangenciales como normales*. (Recuerde que la aceleración de un punto es *tangente a la trayectoria sólo* cuando ésta es *rectilínea* o cuando es un punto de inflexión en una curva.)



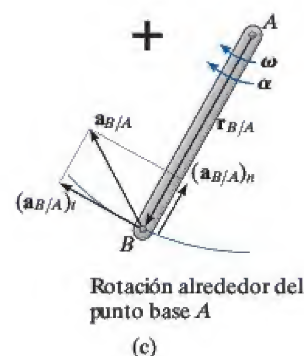
Movimiento plano general

(a)



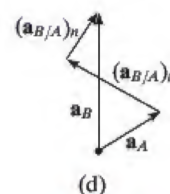
Traslación

(b)



Rotación alrededor del punto base A

(c)



(d)

Fig. 16-24

16

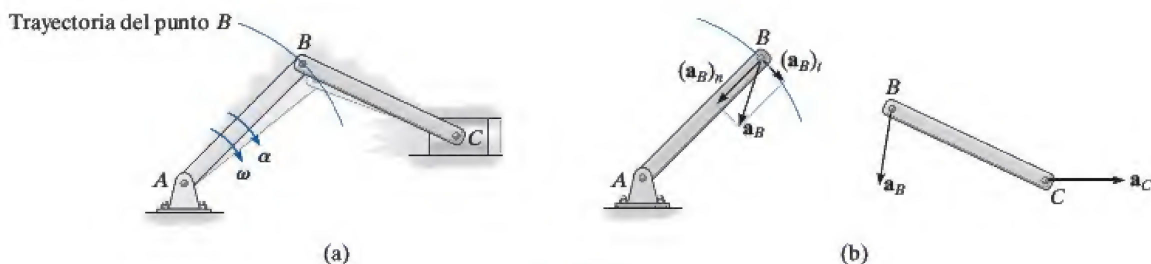


Fig. 16-25

Como los componentes de aceleración relativa representan el efecto de *movimiento circular* observado desde ejes trasladantes que tienen su origen en el punto base A, estos términos pueden expresarse como $(\mathbf{a}_{B/A})_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A}$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_n = -\omega^2\mathbf{r}_{B/A}$, ecuación 16-14. Por tanto, la ecuación 16-17 se escribe

16

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2\mathbf{r}_{B/A} \qquad (16\text{-}18)$$

donde

$\mathbf{a}_B$ = aceleración del punto B

$\mathbf{a}_A$ = aceleración del punto base A

$\boldsymbol{\alpha}$ = aceleración angular del cuerpo

$\boldsymbol{\omega}$ = velocidad angular del cuerpo

$\mathbf{r}_{B/A}$ = vector de posición dirigido de A a B

Si la ecuación 16-17 o la 16-18 se aplican de una manera práctica para estudiar el movimiento acelerado de un cuerpo rígido el cual está *conectado por medio de un pasador* a otros dos cuerpos, habrá que tener en cuenta que los puntos que *coinciden en el pasador* se mueven con la *misma aceleración*, puesto que la trayectoria del movimiento sobre la cual viajan es la *misma*. Por ejemplo, el punto B situado o en la barra BA o en la barra BC del mecanismo de manivelas de la figura 16-25*a* tiene la misma aceleración, puesto que las barras están conectadas por el pasador en B. Aquí el movimiento de B ocurre a lo largo de una *trayectoria circular*, de modo que $\mathbf{a}_B$ puede expresarse en función de sus componentes tangenciales y normales. En el otro extremo de la barra BC el punto C se mueve a lo largo de una *trayectoria de línea recta*, definida por el pistón. Por tanto, $\mathbf{a}_C$ es horizontal, figura 16-25*b*.

Si dos cuerpos se ponen en contacto *sin deslizarse*, y los *puntos en contacto* se mueven a lo largo de *trayectorias diferentes*, entonces las *componentes tangenciales* de su aceleración serán las *mismas*; sin embargo, las *componentes normales* en general *no* serán las mismas. Por ejemplo, considere los dos engranes acoplados en la figura 16-26*a*. El punto A se encuentra en el engrane B y un punto coincidente A' se encuentra en el engrane C. Debido al movimiento de rotación, $(\mathbf{a}_A)_t = (\mathbf{a}_{A'})_t$; sin embargo, como los dos puntos siguen trayectorias circulares diferentes, $(\mathbf{a}_A)_n \neq (\mathbf{a}_{A'})_n$ y por consiguiente $\mathbf{a}_A \neq \mathbf{a}_{A'}$, figura 16-26*b*.

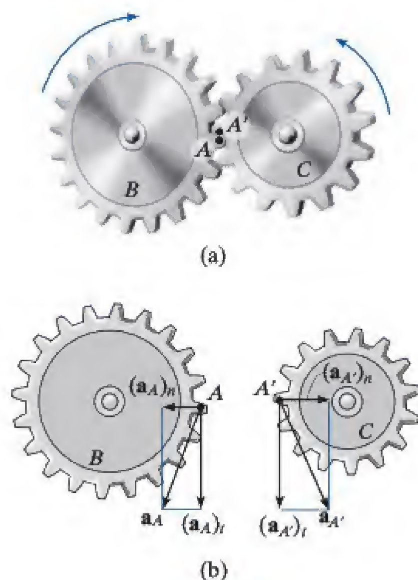


Fig. 16-26

Procedimiento para el análisis

La ecuación de aceleración relativa puede aplicarse entre dos puntos A y B de un cuerpo o por medio de análisis vectorial cartesiano, o escribir las ecuaciones de componentes escalares x y y directamente.

Análisis de la velocidad.

- Determine la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo por la velocidad como se vio en la sección 16.5 o 16.6. Además, determine las velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ de los puntos A y B *si éstos se mueven a lo largo de trayectorias curvas*.

Análisis vectorial

Diagrama cinemático.

- Establezca la dirección de las coordenadas x, y fijas y trace el diagrama cinemático del cuerpo. Indique en él $\mathbf{a}_A$, $\mathbf{a}_B$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\alpha}$ y $\mathbf{r}_{B/A}$.
- Si los puntos A y B se mueven a lo largo de *trayectorias curvas*, entonces sus aceleraciones deben indicarse en función de sus componentes tangenciales y normales, es decir, $\mathbf{a}_A = (\mathbf{a}_A)_t + (\mathbf{a}_A)_n$ y $\mathbf{a}_B = (\mathbf{a}_B)_t + (\mathbf{a}_B)_n$.

Ecuación de aceleración.

- Para aplicar $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2\mathbf{r}_{B/A}$, exprese los vectores en forma vectorial cartesiana y sustitúyalos en la ecuación. Evalúe el producto vectorial (cruz) y luego iguale los respectivos componentes $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ para obtener dos ecuaciones escalares.
- Si la solución resulta una respuesta *negativa* para una magnitud *desconocida*, ello indica que el sentido del vector es opuesto al que aparece en el diagrama cinemático.

Análisis escalar

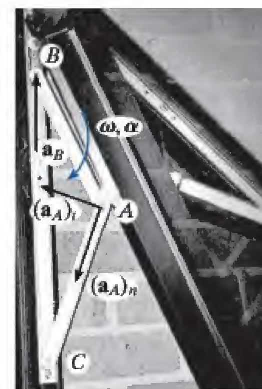
Diagrama cinemático.

- Si la ecuación de aceleración se aplica en forma escalar, entonces deben establecerse las magnitudes y direcciones de los componentes de aceleración relativa $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_n$. Para ello trace un diagrama cinemático como el de la figura 16-24*c*. Puesto que se considera que el cuerpo está momentáneamente "fijo por medio de un pasador" en el punto base A, las *magnitudes* de estos componentes son $(a_{B/A})_t = \alpha r_{B/A}$ y $(a_{B/A})_n = \omega^2 r_{B/A}$. Su *sentido de dirección* se establece a partir del diagrama de modo que $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ actúe perpendicular a $\mathbf{r}_{B/A}$, de acuerdo con el movimiento de rotación $\boldsymbol{\alpha}$ del cuerpo y la dirección de $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ es de B hacia A.*

Ecuación de aceleración.

- Represente los vectores en $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$ gráficamente y muestre sus magnitudes y direcciones debajo de cada término. Las ecuaciones escalares se determinan con los componentes x y y de estos vectores.

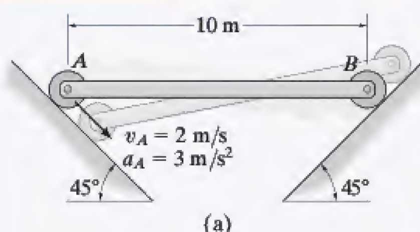
*La notación $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A(\text{pasador})})_t + (\mathbf{a}_{B/A(\text{pasador})})_n$ puede ser útil para recordar que se supone que A está conectado con un pasador.



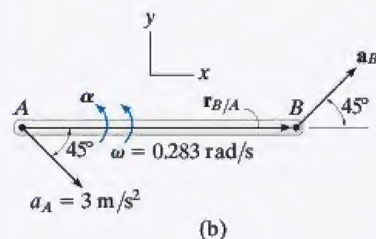
Se muestra el mecanismo de una ventana. Aquí CA gira alrededor de un eje fijo a través de C, y AB experimenta movimiento plano general. Como el punto A se mueve a lo largo de una trayectoria curva tiene dos componentes de aceleración, en tanto que el punto B se mueve a lo largo de una corredera recta y la dirección de su aceleración está especificada.

16

EJEMPLO 16.14



(a)



(b)

La barra AB de la figura 16-27a está confinada a moverse a lo largo de los planos inclinados en A y B. Si la aceleración del punto A es de 3 m/s² y su velocidad de 2 m/s, ambas dirigidas hacia abajo del plano en el instante en que la barra está horizontal, determine la aceleración angular de la barra en este instante.

SOLUCIÓN I (ANÁLISIS VECTORIAL)

Aplicaremos la ecuación de aceleración en los puntos A y B de la barra. Para hacerlo primero se tiene que determinar la velocidad angular de la barra. Demuestre que es $\omega = 0.283$ rad/s ↻ por la ecuación de velocidad o el método de centros instantáneos.

Diagrama cinemático. Como los puntos A y B se mueven a lo largo de trayectorias de línea recta, *no* tienen componentes de aceleración normales a las trayectorias. En la figura 16-27b hay dos incógnitas, es decir, a_B y α.

Ecuación de aceleración.

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2\mathbf{r}_{B/A}$$

$$a_B \cos 45°\mathbf{i} + a_B \operatorname{sen} 45°\mathbf{j} = 3\cos 45°\mathbf{i} - 3\operatorname{sen} 45°\mathbf{j} + (\alpha\mathbf{k}) \times (10\mathbf{i}) - (0.283)^2(10\mathbf{i})$$

Al realizar el producto vectorial e igualar los componentes **i** y **j** se obtiene

$$a_B \cos 45° = 3\cos 45° - (0.283)^2(10) \quad (1)$$

$$a_B \operatorname{sen} 45° = -3\operatorname{sen} 45° + \alpha(10) \quad (2)$$

Al resolver, tenemos

$$a_B = 1.87 \text{ m/s}^2 \angle 45°$$

$$\alpha = 0.344 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

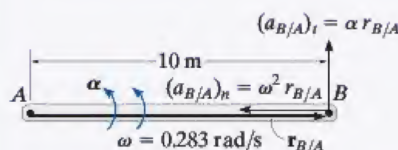
SOLUCIÓN II (ANÁLISIS ESCALAR)

Con el diagrama cinemático, que muestra los componentes de aceleración relativa $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_n$, figura 16-27c, tenemos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$$

$$\begin{bmatrix} a_B \\ \angle 45° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \text{ m/s}^2 \\ \searrow 45° \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha(10 \text{ m}) \\ \uparrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (0.283 \text{ rad/s})^2(10 \text{ m}) \\ \leftarrow \end{bmatrix}$$

Al igualar los componentes x y y se obtienen las ecuaciones 1 y 2, y la solución prosigue como antes.

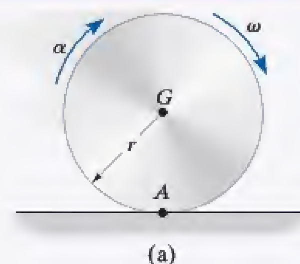


(c)

Fig. 16-27

EJEMPLO 16.15

En un instante dado, el cilindro de radio r, de la figura 16-28a, tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$. Determine la velocidad y aceleración de su centro G y la aceleración del punto de contacto en A si rueda sin deslizarse.



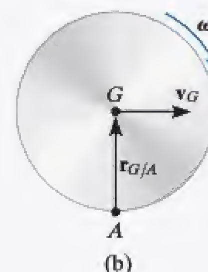
(a)

SOLUCIÓN (ANÁLISIS VECTORIAL)

Análisis de velocidad. Como no ocurre deslizamiento en el instante en que A toca el suelo, $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$. Por tanto, de acuerdo con el diagrama cinemático en la figura 16-28b tenemos

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{G/A}$$
$$v_G\mathbf{i} = \mathbf{0} + (-\omega\mathbf{k}) \times (r\mathbf{j})$$
$$v_G = \omega r \qquad (1) \quad \textit{Resp.}$$

Este mismo resultado también puede obtenerse directamente si se observa que el punto A representa el centro instantáneo de velocidad cero.



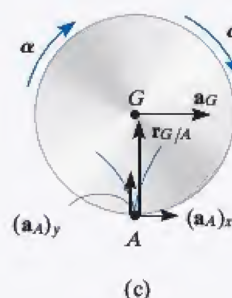
(b)

Diagrama cinemático. Como el movimiento de G siempre es a lo largo de una *línea recta*, entonces su aceleración se determina al considerar la derivada con respecto al tiempo de su velocidad, de lo cual resulta

$$a_G = \frac{dv_G}{dt} = \frac{d\omega}{dt}r$$
$$a_G = \alpha r \qquad (2) \quad \textit{Resp.}$$

Ecuación de aceleración. La magnitud y dirección de $\mathbf{a}_A$ es desconocida, figura 16-28c.

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{G/A} - \omega^2\mathbf{r}_{G/A}$$
$$\alpha r\,\mathbf{i} = (a_A)_x\mathbf{i} + (a_A)_y\mathbf{j} + (-\alpha\mathbf{k}) \times (r\mathbf{j}) - \omega^2(r\mathbf{j})$$



(c)

Fig. 16-28

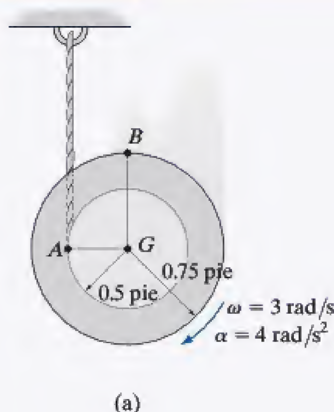
Si evaluamos el producto vectorial e igualamos las componentes **i** y **j**, tenemos

$$(a_A)_x = 0 \qquad \textit{Resp.}$$
$$(a_A)_y = \omega^2 r \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: los resultados, de que $v_G = \omega r$ y $a_G = \alpha r$, pueden aplicarse a cualquier objeto circular: bola, cilindro, disco, etcétera, que ruede *sin* deslizarse. Además, el hecho de que $a_A = \omega^2 r$ indica que el centro instantáneo de velocidad cero, el punto A, *no* es un punto de aceleración cero.

16

EJEMPLO 16.16



(a)

El carrete que se ilustra en la figura 16-29*a* se desenreda de la cuerda, de modo que en el instante que se muestra tiene una velocidad angular de 3 rad/s y una aceleración angular de 4 rad/s². Determine la aceleración del punto *B*.

SOLUCIÓN I (ANÁLISIS VECTORIAL)

"Parece" que el carrete rueda hacia abajo sin deslizarse en el punto *A*. Por consiguiente, podemos utilizar los resultados del ejemplo 16.15 para determinar la aceleración del punto *G*, es decir,

$$a_G = \alpha r = (4\,\text{rad/s}^2)(0.5\,\text{pies}) = 2\,\text{pies/s}^2$$

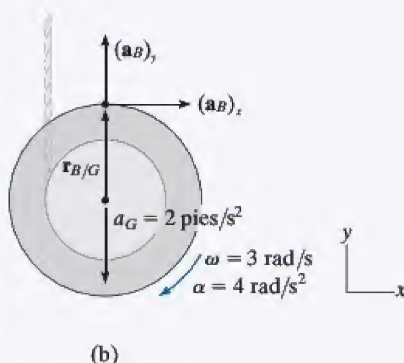
Aplicaremos la ecuación de aceleración a los puntos *G* y *B*.

Diagrama cinemático. El punto *B* se mueve a lo largo de una *trayectoria curva* de radio de curvatura *desconocido*.* Su aceleración estará representada por sus componentes *x* y *y* desconocidas, como se muestra en la figura 16-29*b*.

Ecuación de aceleración.

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_G + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/G} - \omega^2\mathbf{r}_{B/G}$$

$$(a_B)_x\mathbf{i} + (a_B)_y\mathbf{j} = -2\mathbf{j} + (-4\mathbf{k}) \times (0.75\mathbf{j}) - (3)^2(0.75\mathbf{j})$$



(b)

Al igualar los términos **i** y **j**, las ecuaciones de componentes son

$$(a_B)_x = 4(0.75) = 3\,\text{pies/s}^2 \rightarrow \qquad (1)$$

$$(a_B)_y = -2 - 6.75 = -8.75\,\text{pies/s}^2 = 8.75\,\text{pies/s}^2\downarrow \qquad (2)$$

La magnitud y dirección de $\mathbf{a}_B$ son, por consiguiente,

$$a_B = \sqrt{(3)^2 + (8.75)^2} = 9.25\,\text{pies/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{8.75}{3} = 71.1^\circ \qquad \textit{Resp.}$$

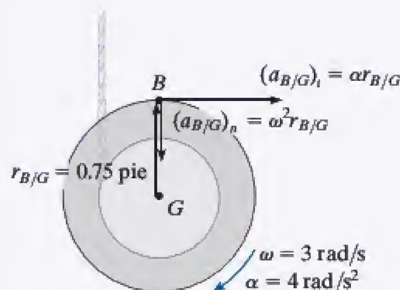
SOLUCIÓN II (ANÁLISIS ESCALAR)

Este problema se resuelve si se escriben directamente las ecuaciones de componentes escalares. El diagrama cinemático de la figura 16-29*c* muestra las componentes de aceleración relativa $(\mathbf{a}_{B/G})_t$ y $(\mathbf{a}_{B/G})_n$. Por tanto,

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_G + (\mathbf{a}_{B/G})_t + (\mathbf{a}_{B/G})_n$$

$$\begin{bmatrix}(a_B)_x\\ \rightarrow\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(a_B)_y\\ \uparrow\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\,\text{pies/s}^2\\ \downarrow\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\,\text{rad/s}^2\,(0.75\,\text{pie})\\ \rightarrow\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(3\,\text{rad/s})^2(0.75\,\text{pie})\\ \downarrow\end{bmatrix}$$

Los componentes *x* y *y* dan las ecuaciones 1 y 2 anteriores.



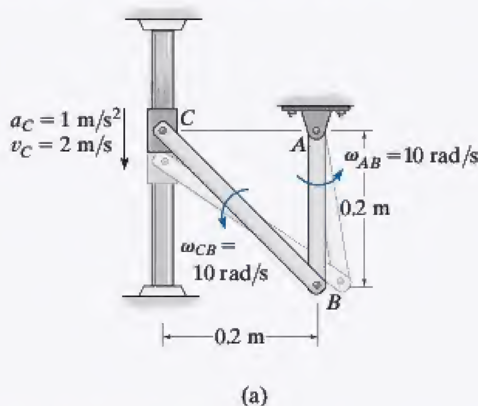
(c)

Fig. 16-29

*Dese cuenta que el radio de curvatura *ρ* no es igual al radio del carrete, puesto que éste no gira alrededor del punto *G*. Además, *ρ* no se define como la distancia de *A* (*CI*) a *B*, puesto que la ubicación del *CI* depende solamente de la velocidad de un punto y no de la geometría de su trayectoria.

EJEMPLO 16.17

El collarín C en la figura 16-30a se mueve hacia abajo con una aceleración de 1 m/s^2. En el instante que se muestra, su rapidez es de 2 m/s, la cual imprime a las articulaciones CB y AB una velocidad angular $\omega_{AB} = \omega_{CB} = 10$ rad/s (vea el ejemplo 16.8). Determine la aceleración angular de CB y AB en este instante.



(a)

SOLUCIÓN (ANÁLISIS VECTORIAL)

Diagrama cinemático. Los diagramas cinemáticos de *ambos* eslabones AB y CB se muestran en la figura 16-30b. Para la solución, aplicaremos la ecuación cinemática apropiada a cada eslabón.

Ecuación de aceleración.

Eslabón AB (rotación alrededor de un eje fijo):

$$\mathbf{a}_B = \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_B - \omega_{AB}^2 \mathbf{r}_B$$

$$\mathbf{a}_B = (\alpha_{AB}\mathbf{k}) \times (-0.2\mathbf{j}) - (10)^2(-0.2\mathbf{j})$$

$$\mathbf{a}_B = 0.2\alpha_{AB}\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$$

Observe que $\mathbf{a}_B$ tiene componentes n y t puesto que se mueve a lo largo de una *trayectoria circular*.

Eslabón BC (movimiento plano general): con el resultado de $\mathbf{a}_B$ y si aplicamos la ecuación 16-18, tenemos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\alpha}_{CB} \times \mathbf{r}_{B/C} - \omega_{CB}^2 \mathbf{r}_{B/C}$$

$$0.2\alpha_{AB}\mathbf{i} + 20\mathbf{j} = -1\mathbf{j} + (\alpha_{CB}\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j}) - (10)^2(0.2\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j})$$

$$0.2\alpha_{AB}\mathbf{i} + 20\mathbf{j} = -1\mathbf{j} + 0.2\alpha_{CB}\mathbf{j} + 0.2\alpha_{CB}\mathbf{i} - 20\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$$

Por tanto,

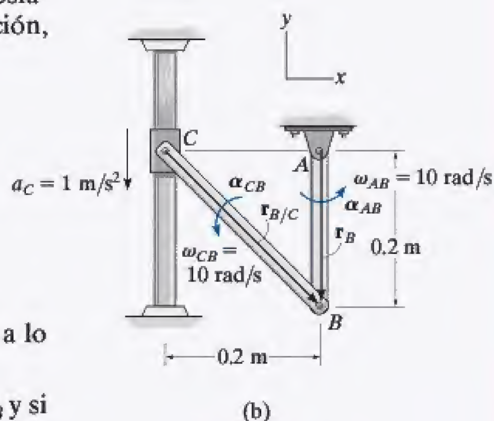
$$0.2\alpha_{AB} = 0.2\alpha_{CB} - 20$$

$$20 = -1 + 0.2\alpha_{CB} + 20$$

Al resolver,

$$\alpha_{CB} = 5 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$\alpha_{AB} = -95 \text{ rad/s}^2 = 95 \text{ rad/s}^2 \circlearrowright \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

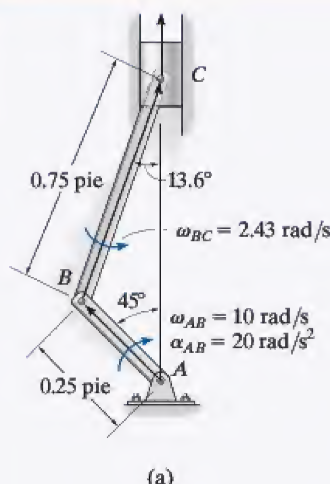


(b)

Fig. 16-30

16

EJEMPLO 16.18



(a)

El cigüeñal AB gira con una aceleración angular en sentido horario de 20 rad/s^2, figura 16-31*a*. Determine la aceleración del pistón cuando AB está en la posición que se ilustra. En este instante $\omega_{AB} = 10$ rad/s y $\omega_{BC} = 2.43$ rad/s (vea el ejemplo 16.13) .

SOLUCIÓN (ANÁLISIS VECTORIAL)

Diagrama cinemático. Los diagramas cinemáticos de AB y BC se muestran en la figura 16-31*b*. Aquí $\mathbf{a}_C$ es vertical puesto que C se mueve a lo largo de una trayectoria de línea recta.

Ecuación de aceleración. Mediante la expresión de cada uno de los vectores de posición en forma vectorial cartesiana

$$\mathbf{r}_B = \{-0.25 \text{ sen } 45°\mathbf{i} + 0.25 \cos 45°\mathbf{j}\} \text{ pies} = \{-0.177\mathbf{i} + 0.177\mathbf{j}\} \text{ pies}$$
$$\mathbf{r}_{C/B} = \{0.75 \text{ sen } 13.6°\mathbf{i} + 0.75 \cos 13.6°\mathbf{j}\} \text{ pies} = \{0.177\mathbf{i} + 0.729\mathbf{j}\} \text{ pies}$$

Cigüeñal *AB* (rotación alrededor de un eje fijo):

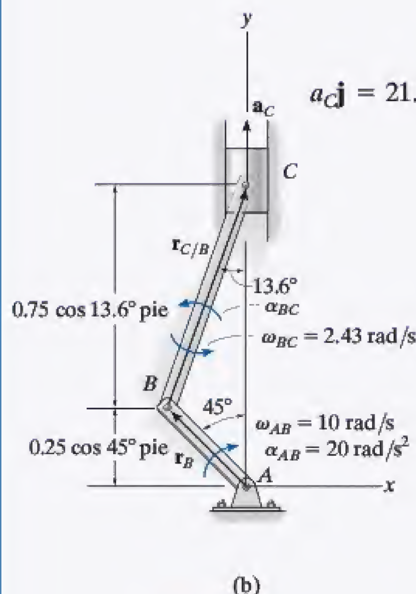
$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_B - \omega_{AB}^2\mathbf{r}_B \\ &= (-20\mathbf{k}) \times (-0.177\mathbf{i} + 0.177\mathbf{j}) - (10)^2(-0.177\mathbf{i} + 0.177\mathbf{j}) \\ &= \{21.21\mathbf{i} - 14.14\mathbf{j}\} \text{ pies/s}^2\end{aligned}$$

Biela *BC* (movimiento plano general): con el resultado de $\mathbf{a}_B$ y si observamos que $\mathbf{a}_C$ está en la dirección vertical, tenemos

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B} - \omega_{BC}^2\mathbf{r}_{C/B}$$
$$a_C\mathbf{j} = 21.21\mathbf{i} - 14.14\mathbf{j} + (\alpha_{BC}\mathbf{k}) \times (0.177\mathbf{i} + 0.729\mathbf{j}) - (2.43)^2(0.177\mathbf{i} + 0.729\mathbf{j})$$
$$a_C\mathbf{j} = 21.21\mathbf{i} - 14.14\mathbf{j} + 0.177\alpha_{BC}\mathbf{j} - 0.729\alpha_{BC}\mathbf{i} - 1.04\mathbf{i} - 4.30\mathbf{j}$$
$$0 = 20.17 - 0.729\alpha_{BC}$$
$$a_C = 0.177\alpha_{BC} - 18.45$$

Al resolver tenemos

$$\alpha_{BC} = 27.7 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$$
$$a_C = -13.5 \text{ pies/s}^2 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$



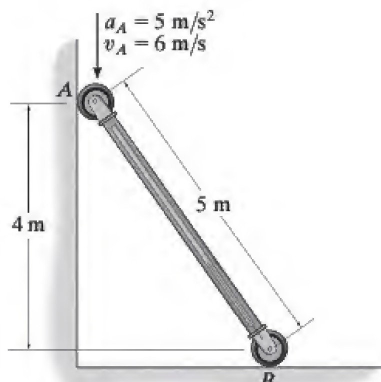
(b)

Fig. 16-31

NOTA: como el pistón se mueve hacia arriba, el signo negativo de a_C indica que el pistón se desacelera, es decir, $\mathbf{a}_C = \{-13.5\mathbf{j}\}$ pies/s^2. Esto hace que la rapidez del pistón se reduzca hasta que AB está casi vertical, momento en el cual el pistón está momentáneamente en reposo.

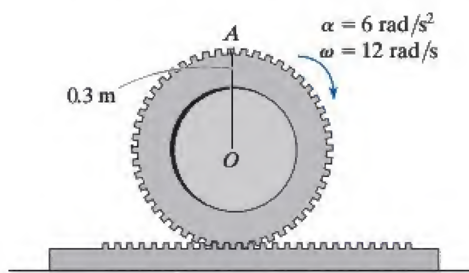
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F16-19. En el instante que se presenta, el extremo A de la barra tiene la velocidad y aceleración que se muestran. Determine la aceleración angular de la barra y la aceleración del extremo B de la barra.



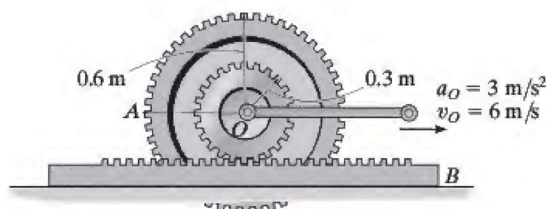
F16-19

F16-20. El engrane rueda sobre la cremallera fija con una velocidad angular de $\omega = 12$ rad/s y una aceleración angular de $\alpha = 6$ rad/s^2. Determine la aceleración del punto A.



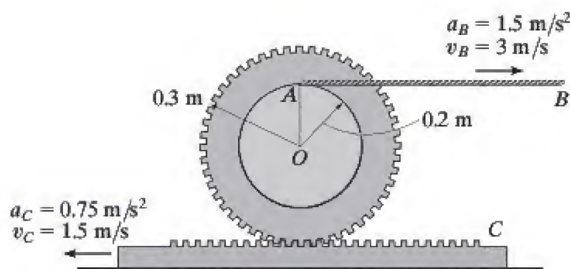
F16-20

F16-21. El engrane rueda sobre la cremallera fija B. En el instante que se muestra, el centro O del engrane se mueve con una velocidad de $v_O = 6$ m/s y una aceleración de $a_O = 3$ m/s^2. Determine la aceleración angular del engrane y la aceleración del punto A en este instante.



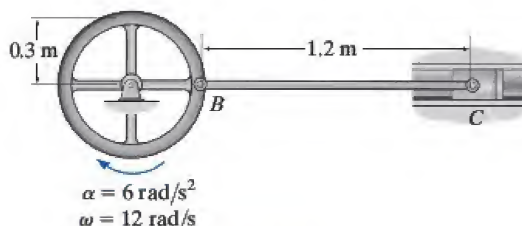
F16-21

F16-22. En el instante que se muestra, la velocidad del cable AB es de 3 m/s y su aceleración de 1.5 m/s^2, mientras que la velocidad de la cremallera es de 1.5 m/s y su aceleración de 0.75 m/s^2. Determine la aceleración angular del engrane en este instante.



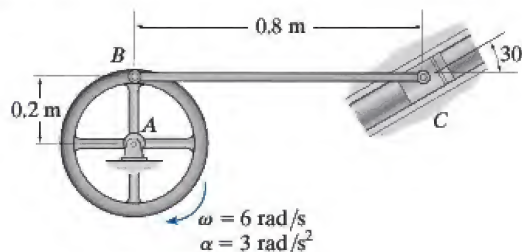
F16-22

F16-23. En el instante que se muestra, la rueda hace un movimiento de rotación con una velocidad angular de $\omega = 12$ rad/s y una aceleración angular de $\alpha = 6$ rad/s^2. Determine la aceleración angular del eslabón BC y la aceleración del pistón C en este instante.



F16-23

F16-24. En el instante que se muestra, la rueda A hace un movimiento de rotación con una velocidad angular de $\omega = 6$ rad/s y una aceleración angular de $\alpha = 3$ rad/s^2. Determine la aceleración angular del eslabón BC y la aceleración del pistón C.

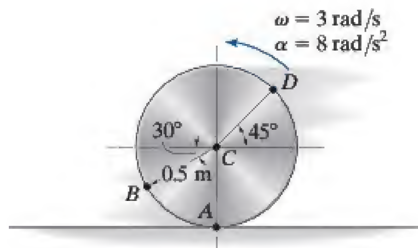


F16-24

PROBLEMAS

•**16-109.** El disco se mueve hacia la izquierda con una aceleración angular $\alpha = 8$ rad/s^2 y una velocidad angular $\omega = 3$ rad/s en el instante que se muestra. Si no se desliza en A, determine la aceleración del punto B.

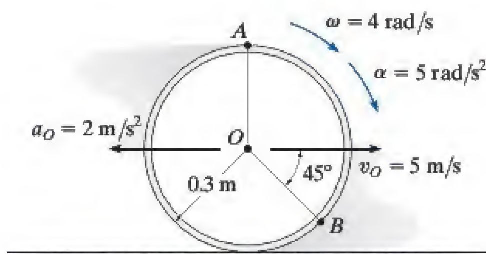
16-110. El disco se mueve hacia la izquierda con una aceleración angular $\alpha = 8$ rad/s^2 y una velocidad angular $\omega = 3$ rad/s en el instante que se muestra. Si no se desliza en A, determine la aceleración del punto D.



Probs. 16-109/110

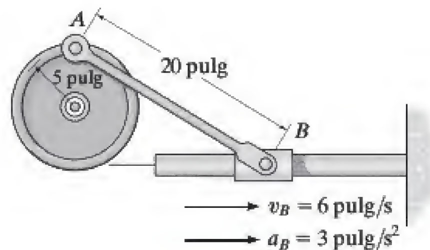
16-111. Se lanza el aro sobre la superficie áspera de modo que tenga una velocidad angular $\omega = 4$ rad/s y una aceleración angular $\alpha = 5$ rad/s^2. Además, su centro tiene una velocidad de $v_O = 5$ m/s y una desaceleración de $a_O = 2$ m/s^2. Determine la aceleración del punto A en este instante.

***16-112.** Se lanza el aro sobre la superficie áspera de modo que tenga una velocidad angular $\omega = 4$ rad/s y una aceleración angular $\alpha = 5$ rad/s^2. Además, su centro tiene una velocidad de $v_O = 5$ m/s y una desaceleración de $a_O = 2$ m/s^2. Determine la aceleración del punto B en este instante.



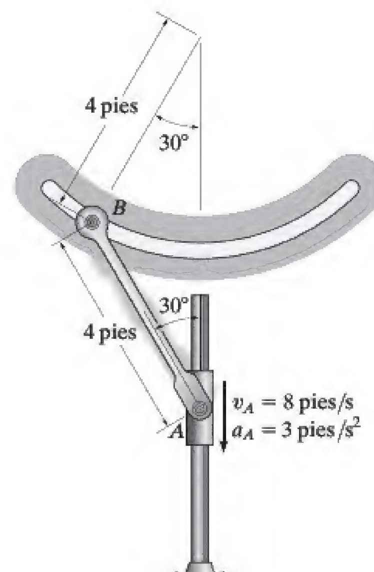
Probs. 16-111/112

•**16-113.** En el instante que se muestra, el bloque corredizo B está en un desplazamiento hacia la derecha con la velocidad y aceleración que se muestran. Determine la aceleración angular de la rueda en este instante.



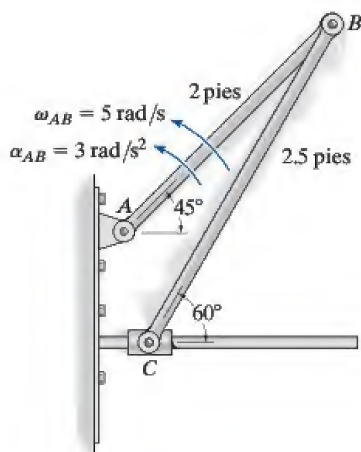
Prob. 16-113

16-114. Los extremos de la barra AB están confinados a moverse a lo largo de las trayectorias que se muestran. En un instante dado, A tiene una velocidad de 8 pies/s y una aceleración de 3 pies/s^2. Determine la velocidad y aceleración angulares de AB en este instante.



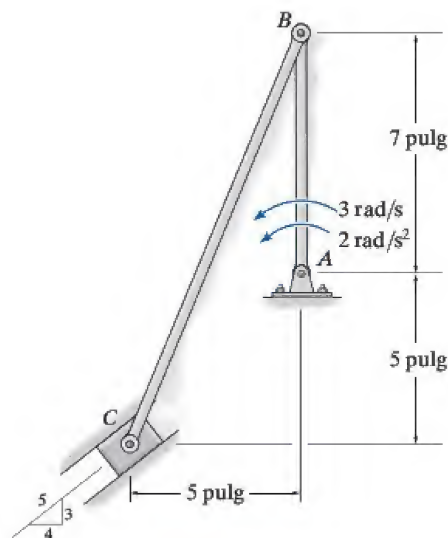
Prob. 16-114

16-115. La barra AB tiene el movimiento angular que se muestra. Determine la aceleración del collarín C en este instante.



Prob. 16-115

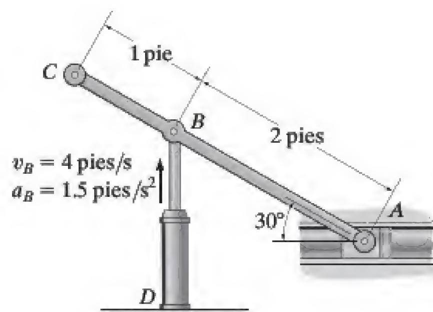
*16-116. En el instante dado el elemento AB tiene el movimiento angular que se muestra. Determine la velocidad y aceleración del bloque corredizo C en este instante.



Prob. 16-116

•16-117. El cilindro hidráulico D se extiende con una velocidad de $v_B = 4$ pies/s y una aceleración de $a_B = 1.5$ pies/s^2. Determine la aceleración de A en el instante que se muestra.

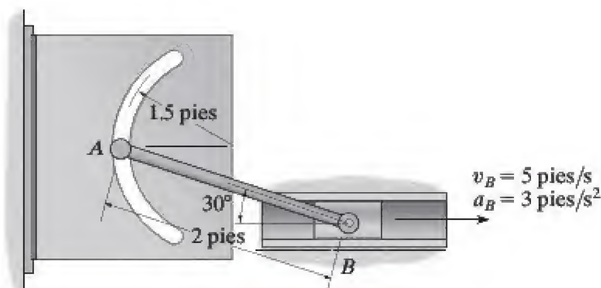
16-118. El cilindro hidráulico D se extiende con una velocidad de $v_B = 4$ pies/s y una aceleración de $a_B = 1.5$ pies/s^2. Determine la aceleración de C en el instante que se muestra.



Probs. 16-117/118

16-119. El bloque corredizo se mueve con una velocidad de $v_B = 5$ pies/s y una aceleración de $a_B = 3$ pies/s^2. Determine la aceleración angular de la barra AB en el instante que se muestra.

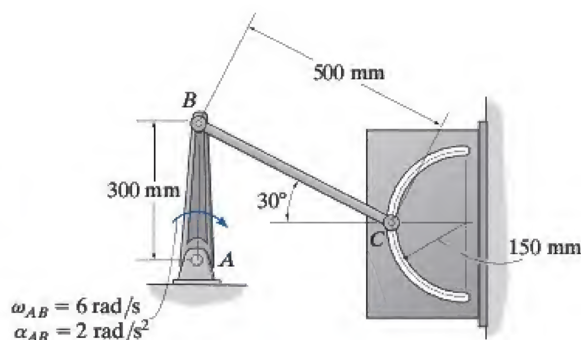
*16-120. El bloque corredizo se mueve con una velocidad de $v_B = 5$ pies/s y una aceleración de $a_B = 3$ pies/s^2. Determine la aceleración angular de A en el instante que se muestra.



Probs. 16-119/120

16

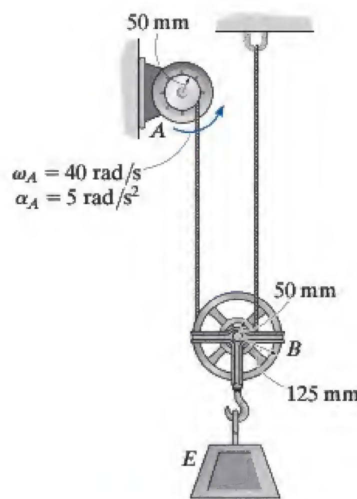
•16-121. La manivela AB gira con una velocidad angular de $\omega_{AB} = 6$ rad/s y una aceleración angular de $\alpha_{AB} = 2$ rad/s^2. Determine la aceleración de C y la aceleración angular de BC en el instante que se muestra.



Prob. 16-121

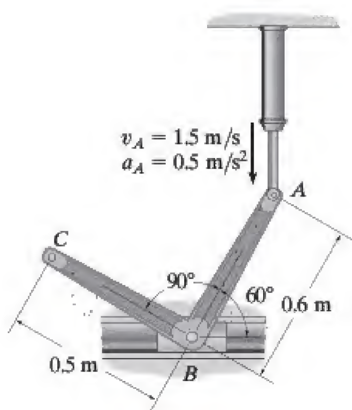
16-123. La polea A gira con la velocidad y aceleración angulares que se indican. Determine la aceleración angular de la polea B en el instante que se muestra.

*16-124. La polea A gira con velocidad y aceleración angulares que se indican. Determine la aceleración angular del bloque E en el instante que se muestra.



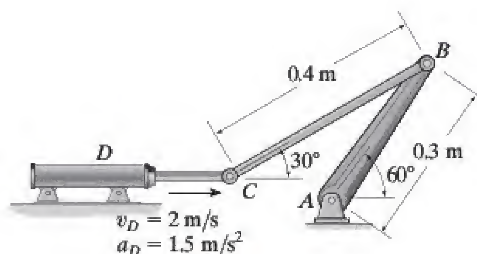
Probs. 16-123/124

16-122. El cilindro hidráulico se extiende con una velocidad de $v_A = 1.5$ m/s y una aceleración de $a_A = 0.5$ m/s^2. Determine la aceleración angular del eslabón ABC y la aceleración del extremo C en el instante que se muestra. El punto B está conectado por medio de un pasador al bloque corredizo.



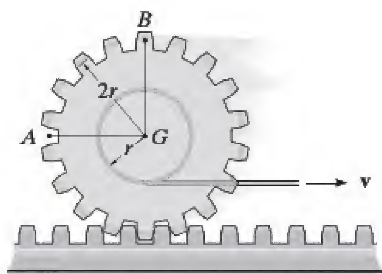
Prob. 16-122

•16-125. El cilindro hidráulico se extiende con la velocidad y aceleración que se indican. Determine la aceleración angular de la manivela AB y el eslabón BC en el instante que se muestra.



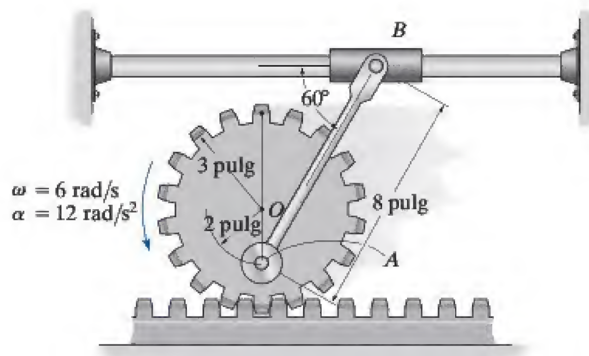
Prob. 16-125

16-126. Se enrolla una cuerda alrededor del carrete interno del engrane. Si se jala con una velocidad constante **v**, determine las velocidades y aceleración de los puntos A y B. El engrane rueda sobre la cremallera fija.



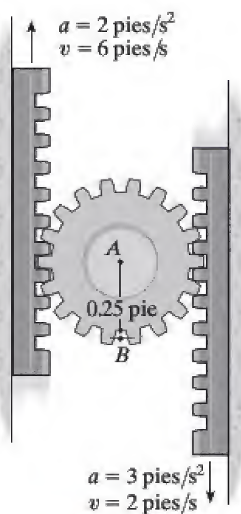
Prob. 16-126

***16-128.** En un instante dado, el engrane tiene el movimiento angular mostrado. Determine las aceleraciones de los puntos A y B en el eslabón y la aceleración angular de éste en este instante.



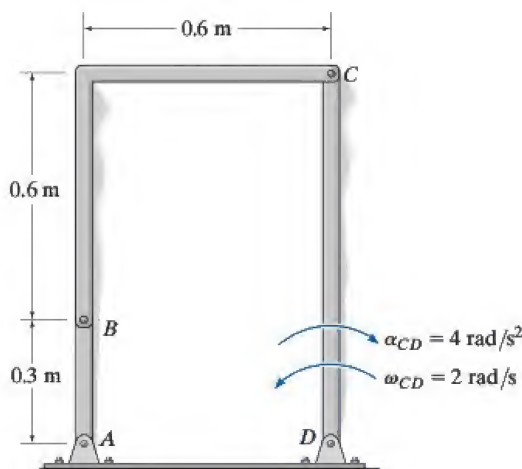
Prob. 16-128

16-127. En un instante dado, las cremalleras tienen las velocidades y aceleraciones que se muestran. Determine la aceleración de los puntos A y B.



Prob. 16-127

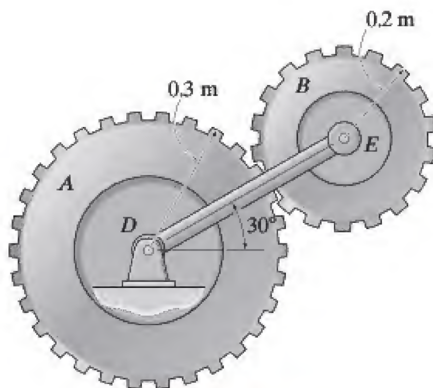
•16-129. Determine la aceleración angular del eslabón AB si el eslabón CD tiene la velocidad y desaceleración angulares que se muestran.



Prob. 16-129

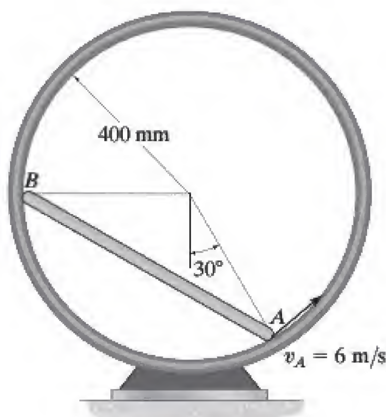
16-130. El engrane A se mantiene fijo y el brazo DE gira en el sentido de las manecillas del reloj con una velocidad angular de $\omega_{DE} = 6$ rad/s y una aceleración angular de $\alpha_{DE} = 3$ rad/s^2. Determine la aceleración angular del engrane B en el instante que se muestra.

16-131. El engrane A gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj con una velocidad angular constante de $\omega_A = 10$ rad/s, en tanto que el brazo DE lo hace en el sentido de las manecillas del reloj con una velocidad angular de $\omega_{DE} = 6$ rad/s y una aceleración angular de $\alpha_{DE} = 3$ rad/s^2. Determine la aceleración angular del engrane B en el instante que se muestra.



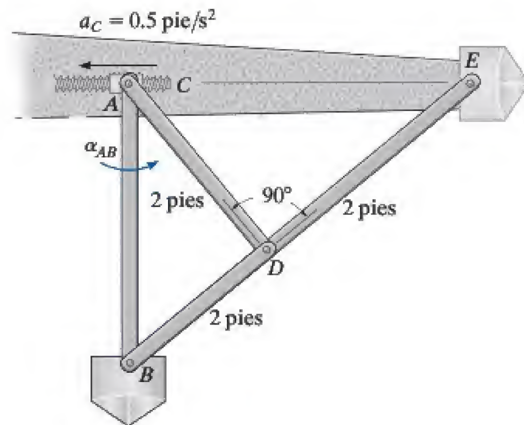
Probs. 16-130/131

*16-132. Si el extremo A de la barra se mueve con una velocidad constante de $v_A = 6$ m/s, determine la velocidad y aceleración angulares de la barra y la aceleración del extremo B en el instante que se muestra.



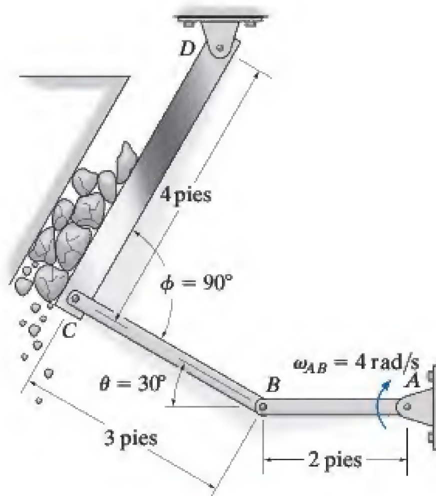
Prob. 16-132

•**16-133.** El flotador de punta de ala retráctil se utiliza en un avión habilitado para acuatizar. Determine las aceleraciones angulares α_{CD}, α_{BD} y α_{AB} en el instante que se muestra si el gorrón C se desplaza a lo largo del tornillo rotatorio horizontal con una aceleración de $a_C = 0.5$ pie/s^2. En la posición indicada, $v_C = 0$. Además, los puntos A y E están conectados por medio del pasador al ala, y los puntos A y C coinciden en el instante que se muestra.



Prob. 16-133

16-134. Determine la velocidad y aceleración angulares de la placa CD del mecanismo quebrador de roca en el instante en que AB está horizontal. En este instante $\theta = 30°$ y $\phi = 90°$. El eslabón impulsor AB gira con una velocidad angular constante de $\omega_{AB} = 4$ rad/s.



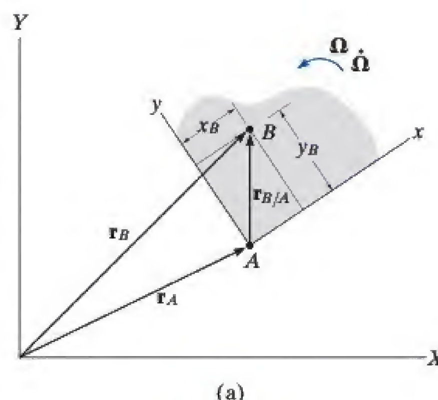
Prob. 16-134

16.8 Análisis del movimiento relativo por medio de ejes rotatorios

En las secciones anteriores se describió el análisis del movimiento relativo en cuanto a velocidad y aceleración por medio de un sistema de coordenadas trasladante. Este tipo de análisis es útil para determinar el movimiento de puntos situados en el *mismo* cuerpo rígido, o el movimiento de puntos localizados en varios cuerpos conectados por un pasador. Sin embargo, en algunos problemas, los cuerpos rígidos (mecanismos) están construidos para que sus conexiones se *deslicen*. El análisis cinemático de casos como esos se lleva mejor a cabo si el movimiento se analiza por medio de un sistema de coordenadas que se *traslade* y *rote*. Además, este marco de referencia es útil para analizar los movimientos de dos puntos en un mecanismo que *no* están en el *mismo* cuerpo y para especificar la cinemática del movimiento de una partícula cuando ésta se mueve a lo largo de una trayectoria rotatoria.

En el análisis siguiente se desarrollarán dos ecuaciones, las cuales relacionan la velocidad y aceleración de dos puntos, uno de los cuales es el origen de un marco de referencia móvil sometido tanto a traslación como a rotación en el plano.*

Posición. Considere los dos puntos A y B de la figura 16-32*a*. Los vectores de posición $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ especifican su ubicación, los cuales se miden con respecto al sistema de coordenadas X, Y, Z fijo. Como se muestra en la figura, el "punto base" A representa el origen del sistema de coordenadas x, y, z, el cual se supone que se traslada y rota con respecto al sistema X, Y, Z. El vector de posición relativa $\mathbf{r}_{B/A}$ especifica la posición de B con respecto a A. Las componentes de este vector pueden expresarse o en función de vectores unitarios a lo largo de los ejes X, Y, es decir, $\mathbf{I}$ y $\mathbf{J}$ o en función de vectores a lo largo de los ejes x, y, es decir, $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$. Para el desarrollo siguiente, $\mathbf{r}_{B/A}$ se medirá con respecto al marco de referencia x, y móvil. Por tanto, si las coordenadas de B son (x_B, y_B), figura 16-32*a*, entonces



(a)

Fig. 16-32

$$\mathbf{r}_{B/A} = x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}$$

Por adición vectorial, los tres vectores de posición en la figura 16-32*a* están relacionados por la ecuación

$$\boxed{\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}} \qquad (16\text{-}19)$$

En el instante considerado, la velocidad del punto A es $\mathbf{v}_A$ y su aceleración $\mathbf{a}_A$, en tanto que la velocidad y aceleración angulares de los ejes x y y son $\mathbf{\Omega}$ (omega) y $\dot{\mathbf{\Omega}} = d\mathbf{\Omega}/dt$, respectivamente.

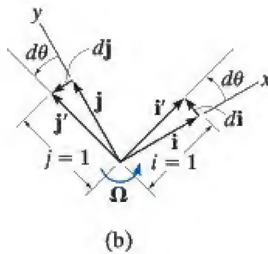
*El movimiento tridimensional más general de los puntos se desarrolla en la sección 20.4.

Velocidad. La velocidad del punto B se determina al considerar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 16-19, de lo cual resulta

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} \tag{16-20}$$

El último término de la ecuación se evalúa como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} &= \frac{d}{dt}(x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}) \\ &= \frac{dx_B}{dt}\mathbf{i} + x_B\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dy_B}{dt}\mathbf{j} + y_B\frac{d\mathbf{j}}{dt} \\ &= \left(\frac{dx_B}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy_B}{dt}\mathbf{j}\right) + \left(x_B\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y_B\frac{d\mathbf{j}}{dt}\right)\end{aligned} \tag{16-21}$$



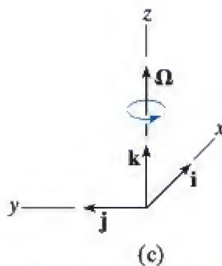
(b)

Los dos términos en el primer par de paréntesis representan las componentes de velocidad del punto B medidas por un observador situado en el sistema de coordenadas móvil x, y, z. Estos términos serán denotados por el vector $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$. En el segundo par de paréntesis el cambio instantáneo con respecto al tiempo de los vectores unitarios $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ es medido por un observador localizado en el sistema de coordenadas fijo X, Y, Z. Estos cambios, $d\mathbf{i}$ y $d\mathbf{j}$, se deben *sólo* a la *rotación* $d\theta$ de los ejes x, y, z, que hace que $\mathbf{i}$ se vuelva $\mathbf{i}' = \mathbf{i} + d\mathbf{i}$ y que $\mathbf{j}$ se vuelva $\mathbf{j}' = \mathbf{j} + d\mathbf{j}$, figura 16-32*b*. Como se muestra, las *magnitudes* tanto de $d\mathbf{i}$ como de $d\mathbf{j}$ son igual a 1 $d\theta$, puesto que $i = i' = j = j' = 1$. La *dirección* de $d\mathbf{i}$ está definida por $+\mathbf{j}$, puesto que $d\mathbf{i}$ es tangente a la trayectoria descrita por la punta de flecha de $\mathbf{i}$ en el límite a medida que $\Delta t \rightarrow dt$. Asimismo, $d\mathbf{j}$ actúa en la dirección $-\mathbf{i}$, figura 16-32*b*. Por consiguiente,

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(\mathbf{j}) = \Omega\mathbf{j} \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(-\mathbf{i}) = -\Omega\mathbf{i}$$

Si vemos los ejes en tres dimensiones, figura 16-32*c* y observamos que $\mathbf{\Omega} = \Omega\mathbf{k}$, podemos expresar las derivadas anteriores en función del producto vectorial como

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{i} \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{j} \tag{16-22}$$



(c)

Fig. 16-32 (cont.)

Al sustituir estos resultados en la ecuación 16-21 y utilizar la propiedad distributiva del producto vectorial, obtenemos

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times (x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}) = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{16-23}$$

Por tanto, la ecuación 16-20 se escribe

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} \qquad (16\text{-}24)$$

donde

$\mathbf{v}_B$ = velocidad de B, medida con respecto al marco de referencia X, Y, Z

$\mathbf{v}_A$ = velocidad del origen A del marco de referencia x, y, z medida con respecto al marco de referencia X, Y, Z

$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = velocidad de "B con respecto a A", medida por un observador situado en el marco de referencia rotatorio x, y, z

$\boldsymbol{\Omega}$ = velocidad angular del marco de referencia x, y, z medida con respecto al marco de referencia X, Y, Z

$\mathbf{r}_{B/A}$ = posición de B con respecto a A

Al comparar la ecuación 16-24 con la ecuación 16-16 ($\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$), la cual es válida para un marco de referencia trasladante, se ve que la única diferencia entre estas dos ecuaciones está representada por el término $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$.

Cuando se aplica la ecuación 16-24 suele ser útil entender lo que representa cada uno de los términos. En orden de aparición, son los siguientes:

$\mathbf{v}_B$ { velocidad absoluta de B } movimiento de B observado desde el marco de referencia X, Y, Z

(es igual a)

$\mathbf{v}_A$ { la velocidad absoluta del origen del marco de referencia x, y, z

(más)

$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ { el efecto de velocidad angular provocado por la rotación del marco de referencia x, y, z } movimiento del marco de referencia x, y, z observado desde el marco de referencia X, Y, Z

(más)

$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ { velocidad de B con respecto a A } movimiento de B observado desde el marco de referencia x, y, z

Aceleración. La aceleración de B, observada desde el sistema de coordenadas X, Y, Z, puede expresarse en función de su movimiento medido con respecto al sistema rotatorio de coordenadas si se considera la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 16-24.

$$\frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} \tag{16-25}$$

En este caso $\dot{\mathbf{\Omega}} = d\mathbf{\Omega}/dt$ es la aceleración angular del sistema de coordenadas x, y, z. Como $\mathbf{\Omega}$ siempre es perpendicular al plano de movimiento, entonces $\dot{\mathbf{\Omega}}$ mide *sólo el cambio de magnitud* de $\mathbf{\Omega}$. La derivada $d\mathbf{r}_{B/A}/dt$ está definida por la ecuación 16-23, de modo que

$$\mathbf{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \tag{16-26}$$

Se determina la derivada con respecto al tiempo de $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} = (v_{B/A})_x\mathbf{i} + (v_{B/A})_y\mathbf{j}$,

$$\frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} = \left[\frac{d(v_{B/A})_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{d(v_{B/A})_y}{dt}\mathbf{j}\right] + \left[(v_{B/A})_x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + (v_{B/A})_y\frac{d\mathbf{j}}{dt}\right]$$

Los dos términos en el primer par de paréntesis representan los componentes de aceleración del punto B medida por un observador situado en el sistema de coordenadas rotatorio. Estos términos serán denotados por $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$. Los términos en el segundo par de paréntesis pueden simplificarse con las ecuaciones 16-22.

$$\frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} = (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

Al sustituir ésta y la ecuación 16-26 en la ecuación 16-25 y reordenar los términos,

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} \tag{16-27}$$

donde

$\mathbf{a}_B$ = aceleración de B, medida con respecto al marco de referencia X, Y, Z

$\mathbf{a}_A$ = aceleración del origen A del marco de referencia x, y, z, medida con respecto al marco de referencia X, Y, Z

$(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}, (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = aceleración y velocidad de B con respecto a A, medida por un observador situado en el marco de referencia *rotatorio* x, y, z

$\dot{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{\Omega}$ = aceleración y velocidad angulares del marco de referencia x, y, z, medidas con respecto al marco de referencia X, Y, Z

$\mathbf{r}_{B/A}$ = posición de B con respecto a A

Si se compara la ecuación 16-27 con la ecuación 16-18, escrita en la forma $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$, la cual es válida para un marco de referencia trasladante, se ve que la diferencia entre estas dos ecuaciones está representada por los términos $2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$. En particular, $2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ se llama *aceleración de Coriolis*, en honor del ingeniero francés G.C. Coriolis, quien fue el primero en determinarlo. Este término representa la diferencia de la aceleración de B medida desde ejes x, y, z no rotatorios y rotatorios. Como se indica mediante el producto vectorial, la aceleración de Coriolis *siempre* será perpendicular tanto a $\mathbf{\Omega}$ como a $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$. Es una componente importante de la aceleración la cual debe considerarse siempre que se utilizan marcos de referencia rotatorios. Esto ocurre con frecuencia, por ejemplo, cuando se estudian las aceleraciones y fuerzas que actúan en cohetes, proyectiles de largo alcance, u otros cuerpos que tienen movimientos cuyas mediciones se ven significativamente afectadas por la rotación de la Tierra.

La siguiente interpretación de los términos de la ecuación 16-27 puede ser útil cuando se aplica esta ecuación a la solución de problemas.

16

$\mathbf{a}_B$	aceleración absoluta de B	movimiento de B observado desde el marco de referencia X, Y, Z
	(es igual a)	
$\mathbf{a}_A$	aceleración absoluta del origen del marco de referencia x, y, z	movimiento del marco de referencia x, y, z observado desde el marco de referencia X, Y, Z
	(más)	
$\dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A}$	el efecto de la aceleración angular provocado por la rotación del marco de referencia x, y, z	
	(más)	
$\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$	el efecto de velocidad angular provocado por la rotación del marco de referencia x, y, z	
	(más)	
$2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$	el efecto combinado de B al moverse con respecto a las coordenadas x, y, z y a la rotación del marco de referencia x, y, z	movimiento interactuante
	(más)	
$(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$	la aceleración de B con respecto a A	movimiento de B observado desde el marco de referencia x, y, z

16

Procedimiento para el análisis

Las ecuaciones 16-24 y 16-27 pueden aplicarse a la solución de problemas que implican el movimiento plano de partículas o cuerpos rígidos por el siguiente procedimiento.

Ejes de coordenadas.

- Seleccione un lugar adecuado para el origen y la orientación apropiada de los ejes tanto para los marcos de referencia fijos X, Y, Z como móviles x, y, z.
- Con mucha frecuencia las soluciones son fáciles de obtener si en el instante considerado:
  1. los orígenes coinciden
  2. los ejes correspondientes son colineales
  3. los ejes correspondientes son paralelos
- El marco móvil debe seleccionarse fijo en el cuerpo o dispositivo a lo largo del cual ocurre el movimiento relativo.

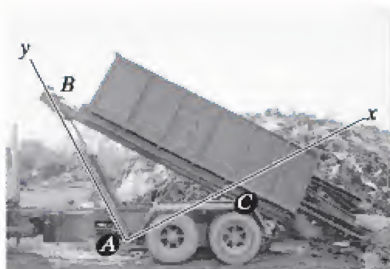
Ecuaciones cinemáticas.

- Después de definir el origen A de la referencia móvil y de especificar el punto en movimiento B, las ecuaciones 16-24 y 16-27 deben escribirse en forma simbólica

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

- Las componentes cartesianas de todos estos vectores pueden expresarse a lo largo de los ejes X, Y, Z o los ejes x, y, z. La selección es arbitraria siempre que se utilice un conjunto consistente de vectores unitarios.
- El movimiento de la referencia móvil se expresa por $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{a}_A$, $\boldsymbol{\Omega}$ y $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$; al movimiento de B con respecto a la referencia móvil lo expresa $\mathbf{r}_{B/A}$, $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$.



La rotación de la caja de volteo del camión alrededor del punto C funciona por la extensión del cilindro hidráulico AB. Para determinar la rotación de la caja producida por esta extensión, podemos utilizar las ecuaciones de movimiento relativo y determinar los ejes x, y en el cilindro para que el movimiento relativo de la extensión del cilindro ocurra a lo largo del eje y.

EJEMPLO 16.19

En el instante $\theta = 60°$, la barra que se muestra en la figura 16-33 tiene una velocidad angular de 3 rad/s y una aceleración angular de 2 rad/s^2. En este mismo instante, el collarín se desplaza hacia fuera a lo largo de la barra de modo que cuando $x = 0.2$ m la velocidad es de 2 m/s y la aceleración de 3 m/s^2, medidas ambas con respecto a la barra. Determine la aceleración de Coriolis y la velocidad y aceleración del collarín en este instante.

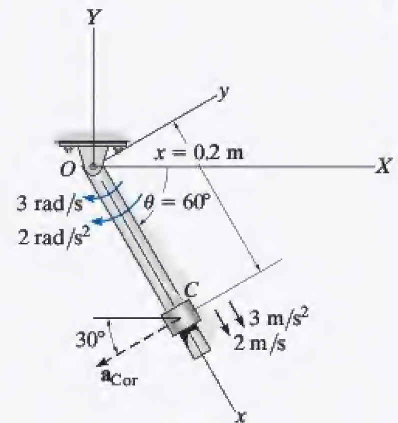


Fig. 16-33

SOLUCIÓN

Ejes de coordenadas. El origen de los dos sistemas de coordenadas se encuentra en el punto O, figura 16-33. Como el movimiento del collarín se reporta con respecto a la barra, el marco de referencia x, y, z móvil se *fija* a ésta.

Ecuaciones cinemáticas.

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_O + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O} + (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} \quad (1)$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_O + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/O} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/O})_{xyz} \quad (2)$$

Será más sencillo expresar los datos en función de vectores de componentes **i**, **j**, **k** que de componentes **I**, **J**, **K**. Por tanto,

Movimiento de la referencia móvil	Movimiento de C con respecto a la referencia móvil
$\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$	$\mathbf{r}_{C/O} = \{0.2\mathbf{i}\}$ m
$\mathbf{a}_O = \mathbf{0}$	$(\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} = \{2\mathbf{i}\}$ m/s
$\mathbf{\Omega} = \{-3\mathbf{k}\}$ rad/s	$(\mathbf{a}_{C/O})_{xyz} = \{3\mathbf{i}\}$ m/s^2
$\dot{\mathbf{\Omega}} = \{-2\mathbf{k}\}$ rad/s^2	

La aceleración de Coriolis se define como

$$\mathbf{a}_{Cor} = 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} = 2(-3\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i}) = \{-12\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Éste es el vector de rayas que aparece en la figura 16-33. Si se desea, puede dividirse en componentes **I**, **J** que actúan a lo largo de los ejes X y Y, respectivamente.

La velocidad y aceleración del collarín se determinan mediante la sustitución de los datos en las ecuaciones 1 y 2 y la evaluación de los productos vectoriales, de lo cual resulta

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_O + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O} + (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz}$$
$$= \mathbf{0} + (-3\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i}) + 2\mathbf{i}$$
$$= \{2\mathbf{i} - 0.6\mathbf{j}\} \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_O + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/O} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/O})_{xyz}$$
$$= \mathbf{0} + (-2\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i}) + (-3\mathbf{k}) \times [(-3\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i})] + 2(-3\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i}) + 3\mathbf{i}$$
$$= \mathbf{0} - 0.4\mathbf{j} - 1.80\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 3\mathbf{i}$$
$$= \{1.20\mathbf{i} - 12.4\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 16.20

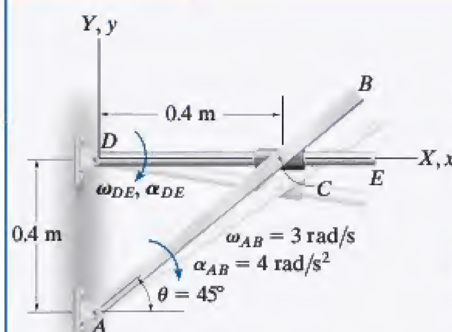


Fig. 16-34

La barra AB mostrada en la figura 16-34, gira en el sentido de las manecillas del reloj con una velocidad angular $\omega_{AB} = 3$ rad/s y una aceleración angular $\alpha_{AB} = 4$ rad/s^2 cuando $\theta = 45°$. Determine el movimiento angular de la barra DE en este instante. El collarín en C está conectado por medio de un pasador a AB y se desliza sobre la barra DE.

SOLUCIÓN

Ejes de coordenadas. El origen tanto de los marcos de referencia fijos como móviles se encuentra en D, figura 16-34. Además, la referencia x, y, z está fija en y gira con la barra DE de modo que el movimiento relativo del collarín es fácil de seguir.

Ecuaciones cinemáticas.

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D} + (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} \quad (1)$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/D} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/D})_{xyz} \quad (2)$$

Todos los vectores se expresarán en función de componentes **i**, **j**, **k**.

Movimiento de la referencia móvil	Movimiento de C con respecto a la referencia móvil
$\mathbf{v}_D = \mathbf{0}$	$\mathbf{r}_{C/D} = \{0.4\mathbf{i}\}$m
$\mathbf{a}_D = \mathbf{0}$	$(\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} = (v_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$
$\boldsymbol{\Omega} = -\omega_{DE}\mathbf{k}$	$(\mathbf{a}_{C/D})_{xyz} = (a_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$
$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = -\alpha_{DE}\mathbf{k}$	

Movimiento de C: como el collarín se mueve a lo largo de una *trayectoria circular* de radio AC, su velocidad y aceleración se determinan con las ecuaciones 16-9 y 16-14.

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{C/A} = (-3\mathbf{k}) \times (0.4\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}) = \{1.2\mathbf{i} - 1.2\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$

$$\mathbf{a}_C = \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_{C/A} - \omega_{AB}^2\mathbf{r}_{C/A}$$
$$= (-4\mathbf{k}) \times (0.4\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}) - (3)^2(0.4\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}) = \{-2\mathbf{i} - 5.2\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$$

Al sustituir los datos en las ecuaciones 1 y 2, tenemos

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D} + (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz}$$
$$1.2\mathbf{i} - 1.2\mathbf{j} = \mathbf{0} + (-\omega_{DE}\mathbf{k}) \times (0.4\mathbf{i}) + (v_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$$
$$1.2\mathbf{i} - 1.2\mathbf{j} = \mathbf{0} - 0.4\omega_{DE}\mathbf{j} + (v_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$$
$$(v_{C/D})_{xyz} = 1.2 \text{ m/s}$$
$$\omega_{DE} = 3 \text{ rad/s} \circlearrowright \qquad \textit{Resp.}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/D} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/D})_{xyz}$$
$$-2\mathbf{i} - 5.2\mathbf{j} = \mathbf{0} + (-\alpha_{DE}\mathbf{k}) \times (0.4\mathbf{i}) + (-3\mathbf{k}) \times [(-3\mathbf{k}) \times (0.4\mathbf{i})]$$
$$+ 2(-3\mathbf{k}) \times (1.2\mathbf{i}) + (a_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$$
$$-2\mathbf{i} - 5.2\mathbf{j} = -0.4\alpha_{DE}\mathbf{j} - 3.6\mathbf{i} - 7.2\mathbf{j} + (a_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$$
$$(a_{C/D})_{xyz} = 1.6 \text{ m/s}^2$$
$$\alpha_{DE} = -5 \text{ rad/s}^2 = 5 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 16.21

Los aviones A y B vuelan a la misma altura y con los movimientos que se muestran en la figura 16-35. Determine la velocidad y aceleración de A medidas por el piloto de B.

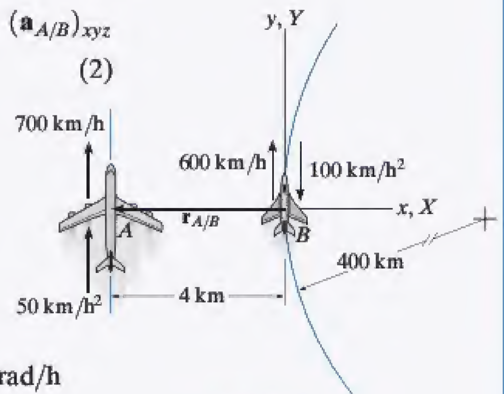


Fig. 16-35

SOLUCIÓN

Ejes de coordenadas. Como se busca el movimiento relativo de A con respecto al piloto de B, los ejes x, y, z se fijan al avión B, figura 16-35. En el *instante* considerado, el origen B coincide con el origen del marco fijo X, Y, Z.

Ecuaciones cinemáticas.

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B} + (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} \quad (1)$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{A/B} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz} \quad (2)$$

Movimiento de la referencia móvil:

$$\mathbf{v}_B = \{600\mathbf{j}\} \text{ km/h}$$

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(600)^2}{400} = 900 \text{ km/h}^2$$

$$\mathbf{a}_B = (\mathbf{a}_B)_n + (\mathbf{a}_B)_t = \{900\mathbf{i} - 100\mathbf{j}\} \text{ km/h}^2$$

$$\Omega = \frac{v_B}{\rho} = \frac{600 \text{ km/h}}{400 \text{ km}} = 1.5 \text{ rad/h} \curvearrowright \qquad \mathbf{\Omega} = \{-1.5\mathbf{k}\} \text{ rad/h}$$

$$\dot{\Omega} = \frac{(a_B)_t}{\rho} = \frac{100 \text{ km/h}^2}{400 \text{ km}} = 0.25 \text{ rad/h}^2 \curvearrowleft \qquad \dot{\mathbf{\Omega}} = \{0.25\mathbf{k}\} \text{ rad/h}^2$$

Movimiento de A con respecto a la referencia móvil:

$$\mathbf{r}_{A/B} = \{-4\mathbf{i}\} \text{ km} \quad (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} = ? \quad (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz} = ?$$

Al sustituir los datos en las ecuaciones 1 y 2, y como $\mathbf{v}_A = \{700\mathbf{j}\}$ km/h y $\mathbf{a}_A = \{50\mathbf{j}\}$ km/h^2, tenemos

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B} + (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz}$$

$$700\mathbf{j} = 600\mathbf{j} + (-1.5\mathbf{k}) \times (-4\mathbf{i}) + (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz}$$

$$(\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} = \{94\mathbf{j}\} \text{ km/h} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{A/B} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz}$$

$$50\mathbf{j} = (900\mathbf{i} - 100\mathbf{j}) + (0.25\mathbf{k}) \times (-4\mathbf{i})$$
$$+ (-1.5\mathbf{k}) \times [(-1.5\mathbf{k}) \times (-4\mathbf{i})] + 2(-1.5\mathbf{k}) \times (94\mathbf{j}) + (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz}$$

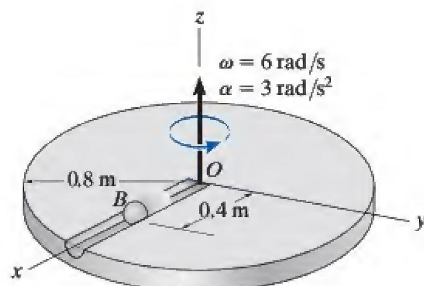
$$(\mathbf{a}_{A/B})_{xyz} = \{-1191\mathbf{i} + 151\mathbf{j}\} \text{ km/h}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: la solución de este problema deberá compararse con la del ejemplo 12.26, donde se ve que $(v_{B/A})_{xyz} \neq (v_{A/B})_{xyz}$ y $(a_{B/A})_{xyz} \neq (a_{A/B})_{xyz}$.

16

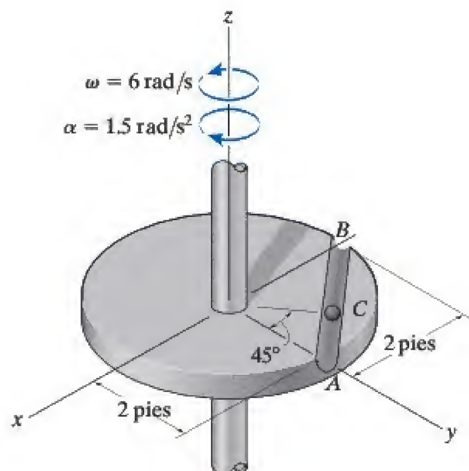
PROBLEMAS

16-135. En el instante que se muestra, la bola B rueda a lo largo de la ranura en el disco con una velocidad de 600 mm/s y una aceleración de 150 mm/s^2, ambas medidas con respecto al disco y al alejarse de O. Si en el mismo instante el disco tiene la velocidad y aceleración angulares que se muestran, determine la velocidad y aceleración de la bola en este instante.



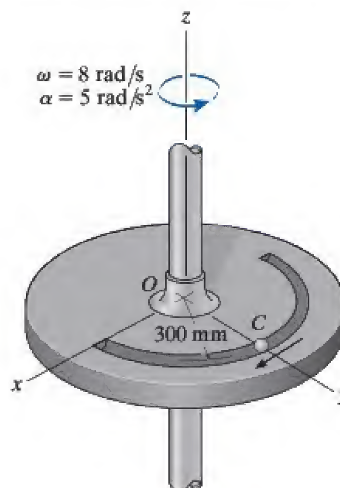
Prob. 16-135

*16-136. La bola C se mueve a lo largo de la ranura de A a B con una rapidez de 3 pies/s, la cual se incrementa a 1.5 pies/s^2, ambas medidas con respecto a la placa circular. En este mismo instante la placa gira con la velocidad y desaceleración angulares que se muestran. Determine la velocidad y aceleración de la bola en este instante.



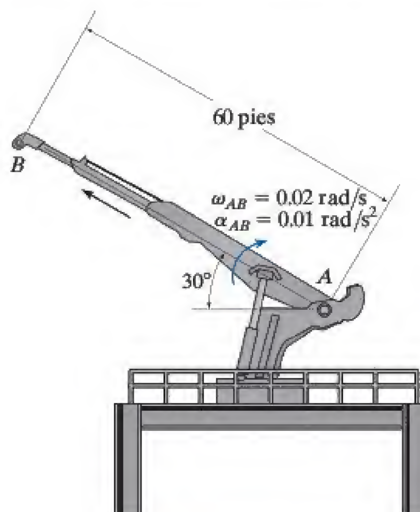
Prob. 16-136

•**16-137.** La bola C se mueve con una velocidad de 3 m/s, la cual se incrementa a una razón constante de 1.5 m/s^2, ambas medidas con respecto a la placa circular y dirigidas como se muestra. Al mismo tiempo, la placa gira con la velocidad y aceleración angulares que se indican. Determine la velocidad y aceleración de la bola en este instante.



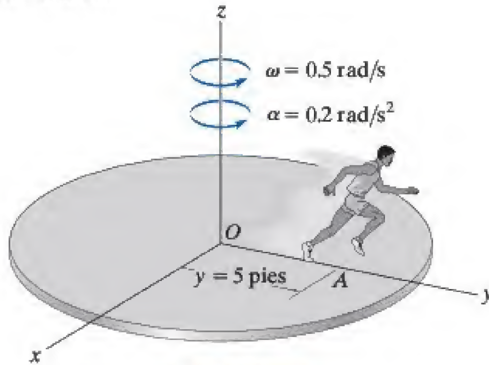
Prob. 16-137

16-138. La pluma telescópica de la grúa gira con la velocidad y aceleración angulares que se muestran. Al mismo tiempo, la pluma se extiende con una velocidad constante de 0.5 pie/s, medida con respecto a sí misma. Determine las magnitudes de la velocidad y aceleración del punto B en este instante.



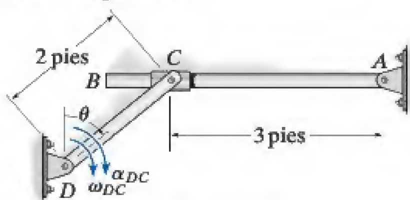
Prob. 16-138

16-139. El hombre se para en el centro O de la plataforma y corre hacia el borde de modo que cuando llega a A, $y = 5$ pies, su centro de masa tiene una velocidad de 2 pies/s y una aceleración de 3 pies/s^2, ambas medidas con respecto a la plataforma y dirigidas a lo largo del eje positivo y. Si la plataforma tiene los movimientos que se muestran, determine la velocidad y aceleración de su centro de masa en este instante.



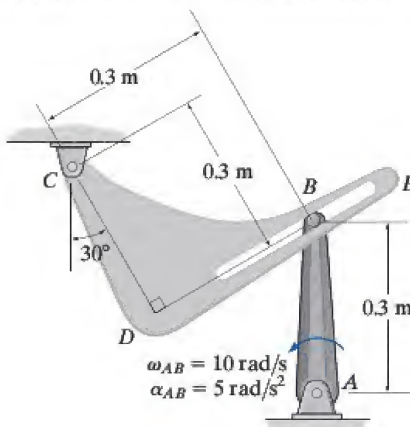
Prob. 16-139

***16-140.** Cuando $\theta = 45°$, la velocidad angular del eslabón DC es $\omega_{DC} = 4$ rad/s y una aceleración angular de $\alpha_{DC} = 2$ rad/s^2. Determine la velocidad y aceleración angulares de la barra AB en este instante. El collarín en C está conectado a DC por medio de un pasador y se desliza libremente a lo largo de AB.



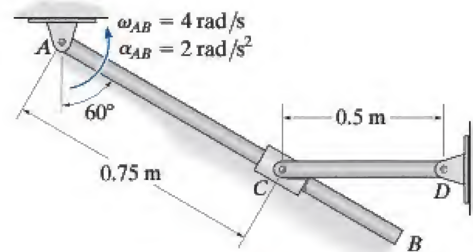
Prob. 16-140

•**16-141.** La clavija B fija en la manivela AB se desliza libremente a lo largo de la ranura en el elemento CDE. Si AB gira con el movimiento que se indica, determine la velocidad angular de CDE en el instante que se muestra.



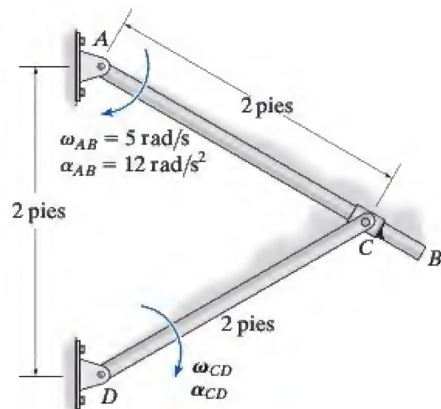
Prob. 16-141

16-142. En el instante que se muestra la barra AB tiene una velocidad angular $\omega_{AB} = 4$ rad/s y una aceleración angular $\alpha_{AB} = 2$ rad/s^2. Determine la velocidad y aceleración angulares de la barra CD en este instante. El collarín C está conectado a CD por medio de un pasador y se desliza libremente a lo largo de AB.



Prob. 16-142

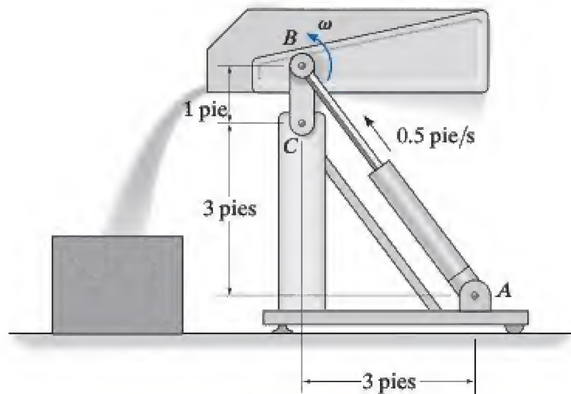
16-143. En un instante dado, la barra AB tiene los movimientos angulares que se muestran. Determine la velocidad y aceleración angulares de la barra CD en este instante. Hay un collarín en C.



Prob. 16-143

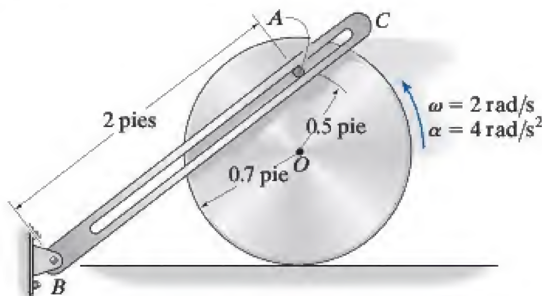
16

***16-144.** La tolva de volteo gira alrededor de C y es operada por el cilindro hidráulico AB. Si éste se extiende a una velocidad constante de 0.5 pie/s, determine la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la tolva cuando está en la posición horizontal que se muestra.



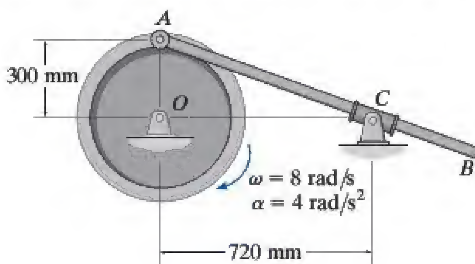
Prob. 16-144

•16-145. El disco rueda sin deslizarse y en un instante dado su velocidad y aceleración angular es la que se muestra. Determine la velocidad y aceleración angulares del eslabón ranurado BC en este instante. La clavija A está fija al disco.



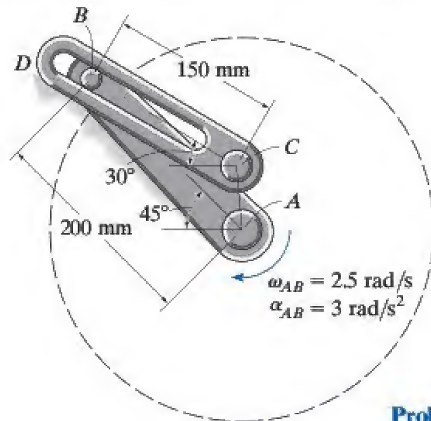
Prob. 16-145

16-146. La rueda gira con la velocidad y aceleración angulares en el instante que se muestra. Determine la velocidad y aceleración angulares de la barra en este instante. La barra se desliza libremente a través del collarín liso.



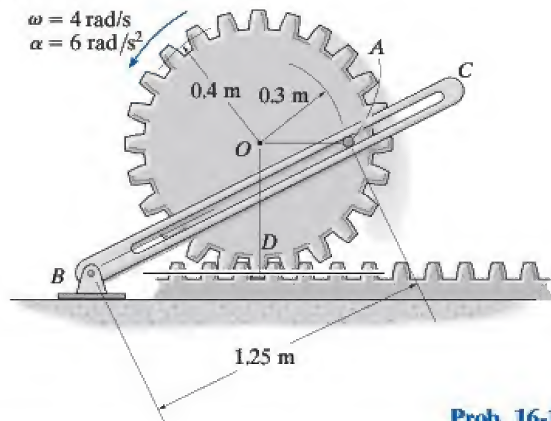
Prob. 16-146

16-147. El mecanismo de dos eslabones sirve para amplificar el movimiento angular. El eslabón AB tiene un pasador en B el cual está confinado a moverse en la ranura del eslabón CD. Si en el instante que se muestra, AB (entrada) tiene una velocidad angular de $\omega_{AB} = 2.5$ rad/s y una aceleración angular de $\alpha_{AB} = 3$ rad/s^2, determine la velocidad y aceleración angulares de CD (salida) en este instante.



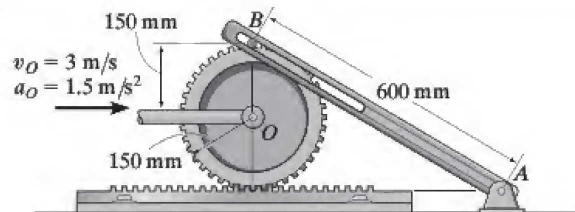
Prob. 16-147

***16-148.** El engrane tiene el movimiento angular que se muestra. Determine la velocidad y aceleración angulares del eslabón ranurado BC en este instante. La clavija A está fija al engrane.



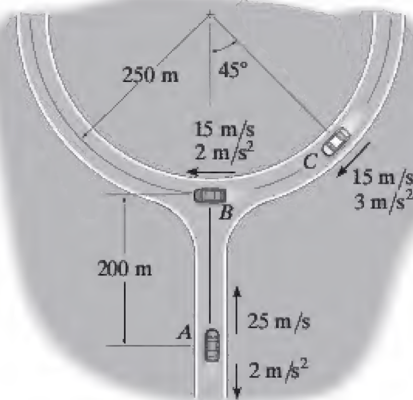
Prob. 16-148

•16-149. La clavija B fija en el engrane se desliza libremente a lo largo de la ranura del eslabón AB. Si el centro O del engrane se mueve con la velocidad y aceleración que se indican, determine la velocidad y aceleración angulares del eslabón en este instante.



Prob. 16-149

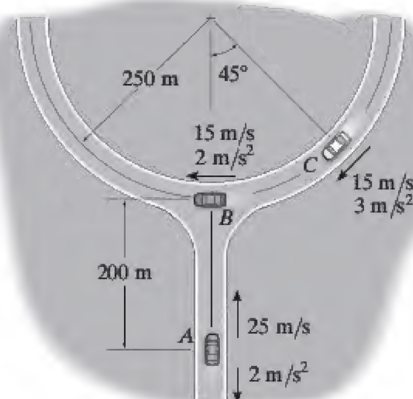
16-150. En el instante que se muestra, el automóvil A viaja a una velocidad de 25 m/s, la cual se reduce a una razón constante de 2 m/s^2, mientras que el automóvil B viaja a una velocidad de 15 m/s, la cual se incrementa a una razón constante de 2 m/s^2. Determine la velocidad y aceleración del automóvil A con respecto al automóvil B.



Prob. 16-150

16-151. En el instante que se muestra, el automóvil A viaja a una velocidad de 25 m/s, la cual se reduce a una razón constante de 2 m/s^2, mientras que el automóvil C viaja a una velocidad de 15 m/s, la cual se incrementa a una razón constante de 3 m/s^2. Determine la velocidad y aceleración del automóvil A con respecto al automóvil C.

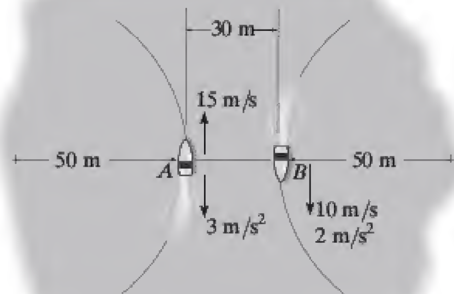
***16-152.** En el instante que se muestra, el automóvil B viaja a una velocidad de 15 m/s, la cual se incrementa a una razón constante de 2 m/s^2, mientras que el automóvil C viaja a una velocidad de 15 m/s, la cual se incrementa a una razón constante de 3 m/s^2. Determine la velocidad y aceleración del automóvil B con respecto al automóvil C.



Probs. 16-151/152

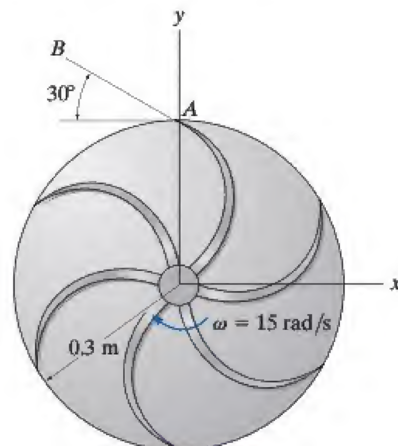
•16-153. En el instante que se muestra, el bote A viaja a una rapidez de 15 m/s, la cual se reduce a una razón constante de 3 m/s^2, mientras que el bote B viaja a una rapidez de 10 m/s, la cual se incrementa a una razón constante de 2 m/s^2. Determine la velocidad y aceleración del bote A con respecto al bote B en este instante.

16-154. En el instante que se muestra, el bote A viaja a una rapidez de 15 m/s, la cual se reduce a una razón constante de 3 m/s^2, mientras que el bote B viaja a una rapidez de 10 m/s, la cual se incrementa a una razón constante de 2 m/s^2. Determine la velocidad y aceleración del bote B con respecto al bote A en este instante.



Probs. 16-153/154

16-155. El agua sale del impulsor de la bomba centrífuga con una velocidad de 25 m/s y una aceleración de 30 m/s^2, ambas medidas con respecto al impulsor a lo largo de la línea del aspa AB. Determine la velocidad y aceleración de una partícula de agua en A cuando sale del impulsor en el instante que se muestra. El impulsor gira a una velocidad angular constante de $\omega = 15$ rad/s.

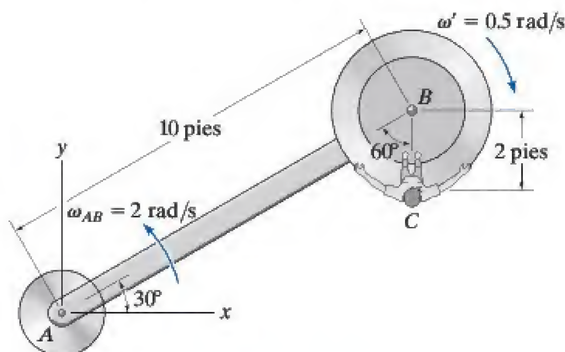


Prob. 16-155

16

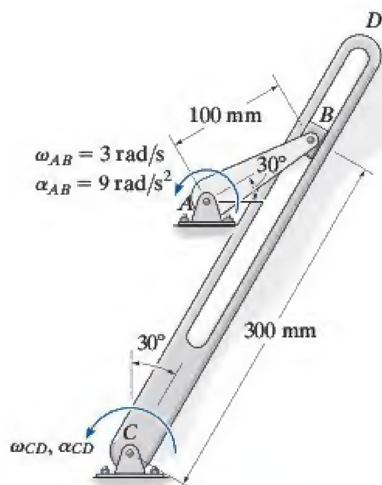
*16-156. Un juego mecánico de un parque de diversiones se compone de un brazo rotatorio AB que gira a una velocidad angular constante de $\omega_{AB} = 2$ rad/s, alrededor del punto A y un carro montado en el extremo del brazo, el cual tiene una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}' = \{-0.5\mathbf{k}\}$ rad/s, medida con respecto al brazo. En el instante que se muestra, determine la velocidad y aceleración del pasajero en C.

•16-157. Un juego mecánico de un parque de diversiones se compone de un brazo rotatorio AB que gira a una aceleración angular constante de $\alpha_{AB} = 1$ rad/s^2 cuando $\omega_{AB} = 2$ rad/s en el instante que se muestra. Además, en este instante el carro montado en el extremo del brazo tiene una aceleración angular constante de $\boldsymbol{\alpha}' = \{-0.6\mathbf{k}\}$ rad/s^2 y una velocidad angular de $\boldsymbol{\omega}' = \{-0.5\mathbf{k}\}$ rad/s, medidas con respecto al brazo. Determine la velocidad y aceleración del pasajero en C en este instante.



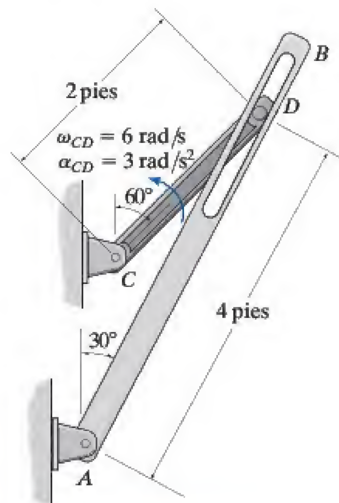
Probs. 16-156/157

16-158. El mecanismo de "retorno rápido" consta de una manivela AB, un bloque corredizo B y un eslabón ranurado CD. Si la manivela tiene el movimiento angular que se indica, determine el movimiento angular del eslabón ranurado en este instante.



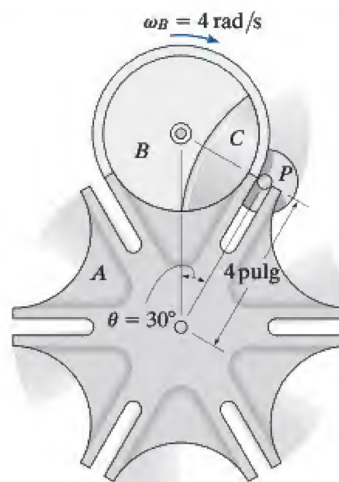
Prob. 16-158

16-159. El mecanismo de "retorno rápido" consta de la manivela CD y el brazo ranurado AB. Si la manivela gira con la velocidad y aceleración angulares en el instante que se muestra, determine la velocidad y aceleración angulares de AB en este instante.



Prob. 16-159

*16-160. El mecanismo Ginebra se utiliza en un sistema empacador para convertir el movimiento angular constante en movimiento angular intermitente. La rueda de estrella A realiza un sexto de revolución por cada revolución completa de la rueda propulsora B y la guía anexa C. Para hacer esto, el perno P, el cual está fijo en B, se desliza hacia dentro de una de las ranuras radiales de A, por lo que la rueda A gira y luego sale de la ranura. Si B tiene una velocidad angular constante de $\omega_B = 4$ rad/s, determine $\boldsymbol{\omega}_A$ y $\boldsymbol{\alpha}_A$ de la rueda A en el instante que se muestra.



Prob. 16-160

PROBLEMAS CONCEPTUALES

P16-1. Un motor eléctrico hace girar la llanta A a una velocidad angular constante y la fricción hace que la rueda gire sin deslizarse sobre el borde interno de la rueda de la fortuna. Con los valores numéricos apropiados, determine la magnitud de la velocidad y aceleración de los pasajeros en una de las canastas. ¿Los pasajeros en las demás canastas experimentan este mismo movimiento? Explique.



P16-1

P16-2. La manivela AB gira en sentido contrario a las manecillas del reloj a una velocidad constante ω que hace que el brazo de conexión CD y el balancín DE se muevan. Trace un bosquejo que muestre la ubicación del CI del brazo de conexión cuando $\theta = 0°, 90°, 180°$ y $270°$. Además, ¿cómo se determinó la curvatura de la cabeza E y por qué está curvada de esta manera?



P16-2

P16-3. La puerta plegadiza del hangar se abre por medio de cables que se mueven hacia arriba a una velocidad constante. Determine la posición θ del panel BC cuando la velocidad angular de BC es igual pero opuesta a la velocidad angular de AB. Además, ¿cuál es esta velocidad angular? El panel BC está sujeto en C por medio de un pasador y su altura es diferente de la de BA. Use valores numéricos apropiados para explicar su resultado.



P16-3

P16-4. Si las llantas no patinan en el pavimento, determine los puntos en la llanta que tienen una velocidad máxima y mínima y los puntos que tienen una aceleración máxima y mínima. Use valores numéricos apropiados para la velocidad del automóvil y el tamaño de las llantas para explicar su resultado.

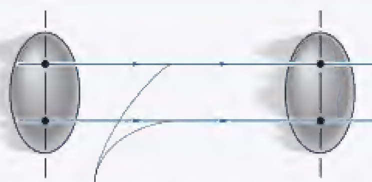


P16-4

REPASO DEL CAPÍTULO

Movimiento plano de un cuerpo rígido

Un cuerpo rígido experimenta tres tipos de movimiento plano: traslación, rotación alrededor de un eje fijo y movimiento plano general.



Trayectoria de traslación rectilínea

Traslación

Cuando un cuerpo se traslada en línea recta, todas sus partículas viajan a lo largo de trayectorias en línea recta paralelas. Si las trayectorias tienen el mismo radio de curvatura, entonces la traslación es curvilínea. Siempre que conozcamos el movimiento de una de las partículas, entonces también conoceremos el movimiento de todas las demás.



Trayectoria de traslación curvilínea

16

Rotación alrededor de un eje fijo

En este tipo de movimiento, todas las partículas se mueven a lo largo de trayectorias circulares. Aquí, todos los segmentos de línea en el cuerpo experimentan un desplazamiento angular, una velocidad angular y una aceleración angular iguales.

Una vez que se conoce el movimiento angular del cuerpo, entonces puede obtenerse la velocidad de cualquier partícula situada a una distancia r del eje.

La aceleración de cualquier partícula tiene dos componentes. La componente tangencial responde al cambio de la magnitud de la velocidad y el componente normal del cambio de la dirección de la velocidad.



Rotación alrededor de un eje fijo

$$\omega = d\theta/dt \qquad \omega = \omega_0 + \alpha_c t$$

$$\alpha = d\omega/dt \quad \text{o} \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2$$

$$\alpha\, d\theta = \omega\, d\omega \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

α_c constante

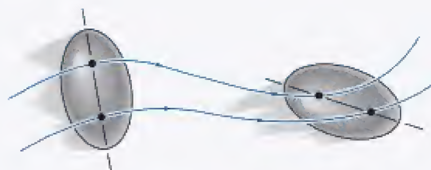
$$v = \omega r \qquad a_t = \alpha r, \quad a_n = \omega^2 r$$

Movimiento plano general

Cuando un cuerpo experimenta movimiento plano general, se traslada y gira al mismo tiempo. Se cuenta con varios tipos de métodos para analizar este movimiento.

Análisis de movimiento absoluto

Si se conoce el movimiento de un punto o el movimiento angular de una línea en el cuerpo, entonces es posible relacionar este movimiento con el de otro punto o línea por medio de un análisis de movimiento absoluto. Para hacerlo, se establecen coordenadas de posición lineal s o coordenadas de posición angular θ (medidas con respecto a un punto o línea fija). Estas coordenadas de posición se relacionan entonces por medio de la geometría del cuerpo. La derivada con respecto al tiempo de esta ecuación da la relación entre las velocidades y/o las velocidades angulares. Una segunda derivada con respecto al tiempo relaciona la aceleración y/o las aceleraciones angulares.



Movimiento plano general

Movimiento relativo mediante ejes trasladantes

El movimiento plano general también puede analizarse por medio de un análisis de movimiento relativo entre dos puntos A y B localizados en el cuerpo. Este método considera el movimiento en partes: primero una traslación del punto base seleccionado A, enseguida una "rotación" relativa del cuerpo alrededor del punto A, el cual se mide con respecto a un eje trasladante. Como el movimiento relativo se ve como movimiento circular alrededor del punto base, el punto B tendrá una velocidad $\mathbf{v}_{B/A}$ tangente al círculo. También tiene dos componentes de aceleración, $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_n$. Además, es importante darse cuenta que $\mathbf{a}_A$ y $\mathbf{a}_B$ tendrán componentes tangenciales y normales si estos puntos se mueven a lo largo de trayectorias curvas.

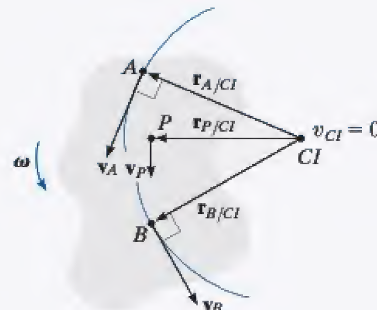
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$$

Centro instantáneo de velocidad cero

Si se considera que el punto base A tiene una velocidad cero, entonces la ecuación de velocidad relativa se escribe $\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$. En este caso, parece que el cuerpo girará alrededor de un eje instantáneo que pasa por A.

El centro instantáneo de rotación (CI) puede establecerse siempre que se conozcan las direcciones de las velocidades y la velocidad angular de dos puntos cualesquiera del cuerpo. Como una línea radial r siempre será perpendicular a cada velocidad, entonces el CI está en el punto de intersección de estas dos líneas radiales. Su ubicación medida se determina con la geometría del cuerpo. Una vez que se establece, entonces puede determinarse la velocidad de cualquier punto P del cuerpo con $v = \omega r$, donde r se extiende del CI al punto P.



Movimiento relativo por medio de ejes rotatorios

Los problemas que implican elementos conectados que se deslizan uno con respecto al otro o puntos que no están en el mismo cuerpo pueden analizarse por medio de un análisis de movimiento relativo con respecto a un marco rotatorio. Esto da lugar al término $2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ conocido como aceleración de Coriolis.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$



Las fuerzas que actúan en este dragster cuando empieza a acelerar son muy intensas y deben tomarse en cuenta en el diseño de su estructura.

Cinética plana de un cuerpo rígido: fuerza y aceleración

17

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Presentar los métodos utilizados para determinar el momento de inercia de masa de un cuerpo.
- Desarrollar las ecuaciones de movimiento de cinética plana de un cuerpo rígido simétrico.
- Analizar las aplicaciones de estas ecuaciones a cuerpos que experimentan traslación, rotación alrededor de un eje fijo y movimiento plano general.

17.1 Momento de inercia de masa

Como un cuerpo tiene tamaño y forma definidos, un sistema de fuerzas no concurrentes puede hacer que el cuerpo se traslade y rote. Los aspectos de traslación del movimiento se estudiaron en el capítulo 13 y están regidos por la ecuación $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. En la siguiente sección se demostrará que los aspectos de rotación provocados por un momento $\mathbf{M}$, están regidos por una ecuación de la forma $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\alpha}$. El símbolo I en esta ecuación se denomina momento de inercia de masa. Por comparación, el *momento de inercia* mide la resistencia de un cuerpo a la *aceleración angular* ($\mathbf{M} = I\boldsymbol{\alpha}$) del mismo modo que la *masa* mide la resistencia de un cuerpo a la *aceleración* ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$).

El volante del motor de este tractor genera un momento grande de inercia con respecto a su eje de rotación. Una vez que se ponga en movimiento, será difícil detenerlo, lo cual también evitará que el motor se pare y por tanto le permitirá mantener una potencia constante.



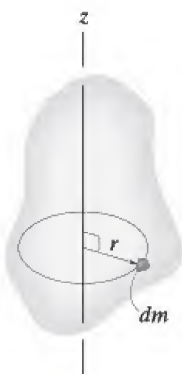


Fig. 17-1

17

Definimos el *momento de inercia* como la integral del "segundo momento" alrededor del eje de todos los elementos de masa dm los cuales componen el cuerpo.* Por ejemplo, el momento de inercia del cuerpo alrededor del eje z en la figura 17-1 es

$$I = \int_m r^2\, dm \qquad (17\text{-}1)$$

En este caso el "brazo de momento" r es la distancia perpendicular del eje z al elemento arbitrario dm. Como la fórmula implica r, el valor de I es diferente con cada eje con respecto al cual se calcula. En el estudio de cinética plana, por lo general el eje seleccionado para el análisis pasa por el centro de masa G del cuerpo y siempre es perpendicular al plano de movimiento. El momento de inercia con respecto a este eje se denotará como I_G. Como r está elevado al cuadrado en la ecuación 17-1, el momento de inercia de masa siempre es una cantidad *positiva*. Las unidades comunes para medirlo son $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ o $\text{slug} \cdot \text{pie}^2$.

Si el cuerpo se compone de material de densidad variable, $\rho = \rho(x, y, z)$, la masa elemental dm del cuerpo puede expresarse en función de su densidad y volumen como $dm = \rho\, dV$. Si se sustituye dm en la ecuación 17-1, entonces se calcula el momento de inercia del cuerpo con *elementos de volumen* en la integración, es decir,

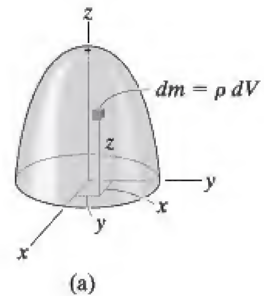
$$I = \int_V r^2 \rho\, dV \qquad (17\text{-}2)$$

*Otra propiedad del cuerpo que mide la simetría de su masa con respecto a un sistema de coordenadas, es el producto de inercia. Esta propiedad se aplica para el movimiento tridimensional de un cuerpo y se analizará en el capítulo 21.

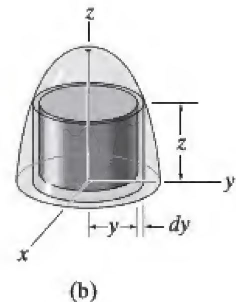
En el caso especial en que ρ sea una *constante*, este término se saca de la integral y la integración es entonces puramente una función de geometría.

$$I = \rho \int_V r^2 \, dV \tag{17-3}$$

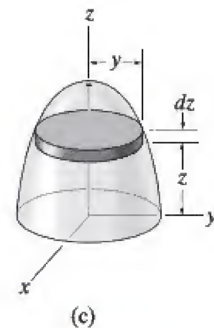
Cuando el elemento de volumen seleccionado para la integración tiene dimensiones infinitesimales en las tres direcciones, figura 17-2*a*, el momento de inercia del cuerpo se determina por medio de una "integración triple". Sin embargo, el proceso de integración puede simplificarse a una *integración simple* siempre que el elemento de volumen seleccionado tenga un tamaño o espesor diferencial en sólo *una dirección*. Para este propósito a menudo se utilizan elementos en forma de casquillo o de disco.



(a)



(b)



(c)

Fig. 17-2

17

Procedimiento para el análisis

Para obtener el momento de inercia por integración, consideraremos sólo cuerpos de volúmenes generados al hacer girar una curva alrededor de un eje. Un ejemplo de un cuerpo como ese aparece en la figura 17-2*a*. Pueden elegirse dos tipos de elementos diferenciales.

Elemento en forma de casquillo.

- Si para la integración se selecciona un *elemento en forma de casquillo* de altura z, radio $r = y$, espesor dy, figura 17-2*b*, entonces el volumen es $dV = (2\pi y)(z)dy$.
- Este elemento puede utilizarse en la ecuación 17-2 o 17-3 para determinar el momento de inercia I_z del cuerpo con respecto al eje z, puesto que *todo el elemento* debido a su "espesor" queda a la *misma* distancia perpendicular $r = y$ del eje z (vea el ejemplo 17.1).

Elemento en forma de disco.

- Si para la integración se selecciona un elemento en forma de disco de radio y y espesor dz, figura 17-2*c*, entonces el volumen es $dV = (\pi y^2)dz$.
- Este elemento es *finito* en la dirección radial, y por consiguiente *no* todas su partes quedan a la *misma distancia radial* r del eje z. Por consiguiente, *no puede* utilizarse la ecuación 17-2 o 17-3 para determinar I_z directamente. En su lugar, para realizar la integración primero es necesario determinar el momento de inercia *del elemento* con respecto al eje z y luego integrar este resultado (vea el ejemplo 17.2).

EJEMPLO 17.1

Determine el momento de inercia del cilindro que se muestra en la figura 17-3*a* con respecto al eje *z*. La densidad del material, ρ, es constante.

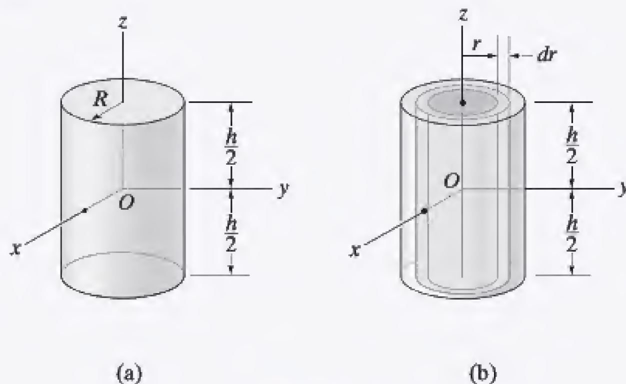


Fig. 17-3

17

SOLUCIÓN

Elemento en forma de casquillo. Este problema puede resolverse con el *elemento en forma de casquillo* que se muestra en la figura 17-3*b* y una integración simple. El volumen del elemento es $dV = (2\pi r)(h)\,dr$, de modo que su masa es $dm = \rho\,dV = \rho(2\pi hr\,dr)$. Como *todo el elemento* queda a la misma distancia *r* del eje *z*, el momento de inercia *del elemento* es

$$dI_z = r^2 dm = \rho 2\pi h r^3\,dr$$

Al integrar a lo largo de toda la región del cilindro se obtiene

$$I_z = \int_m r^2\,dm = \rho 2\pi h \int_0^R r^3\,dr = \frac{\rho\pi}{2}R^4 h$$

La masa del cilindro es

$$m = \int_m dm = \rho 2\pi h \int_0^R r\,dr = \rho\pi h R^2$$

de modo que

$$I_z = \frac{1}{2}mR^2$$ ***Resp.***

EJEMPLO 17.2

Si la densidad del material es de 5 slug/pie^3, determine el momento de inercia del sólido que se muestra en la figura 17-4*a* con respecto al eje *y*.

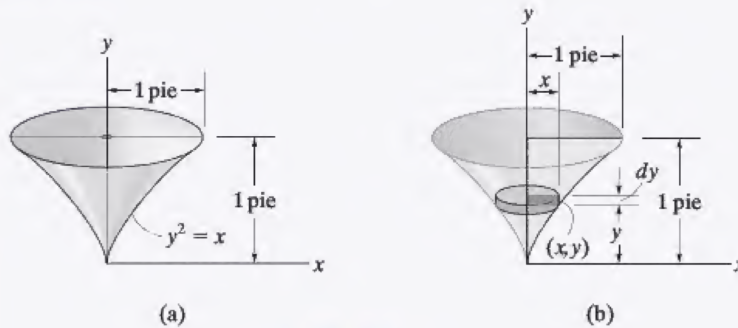


Fig. 17-4

SOLUCIÓN

Elemento en forma de disco. El momento de inercia se determinará con un *elemento en forma de disco*, como se muestra en la figura 17-4*b*. En este caso el elemento corta la curva en el punto arbitrario (x, y) y su masa es

$$dm = \rho\, dV = \rho(\pi x^2)\, dy$$

Aunque *no* todas las partes del elemento se encuentran a la misma distancia del eje *y*, aún así es posible determinar el momento de inercia dI_y *del elemento* con respecto al eje *y*. En el ejemplo anterior se demostró que el momento de inercia de un cilindro con respecto a su eje longitudinal es $I = \frac{1}{2}mR^2$, donde m y R son la masa y el radio del cilindro. Como la altura no interviene en esta fórmula, el disco puede ser considerado como un cilindro. Por tanto, para el elemento del disco de la figura 17-4*b*, tenemos

$$dI_y = \tfrac{1}{2}(dm)x^2 = \tfrac{1}{2}[\rho(\pi x^2)\, dy]x^2$$

Si sustituimos $x = y^2$, $\rho = 5$ slug/pie^3, e integramos con respecto a y, desde $y = 0$ hasta $y = 1$ pie, obtenemos el momento de inercia de todo el sólido.

$$I_y = \frac{\pi(5\text{ slug/pie}^3)}{2}\int_0^{1\text{ pie}} x^4\, dy = \frac{\pi(5)}{2}\int_0^{1\text{ pie}} y^8\, dy = 0.873\text{ slug}\cdot\text{pie}^2 \quad \textbf{\textit{Resp.}}$$

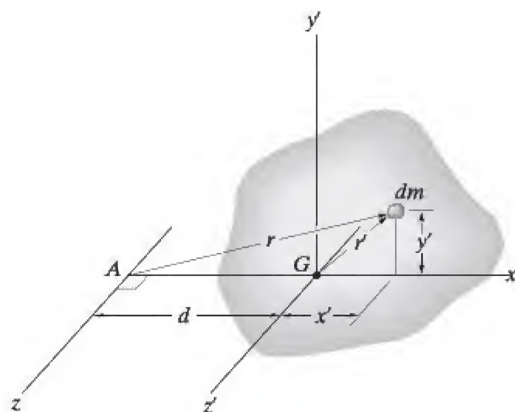


Fig. 17-5

17

Teorema de ejes paralelos. Si se conoce el momento de inercia del cuerpo con respecto a un eje que pasa por su centro de masa, entonces puede determinarse el momento de inercia con respecto a cualquier otro *eje paralelo* por medio del *teorema de los ejes paralelos*. Este teorema se deriva de la consideración del cuerpo que se muestra en la figura 17-5. Aquí el eje z' pasa por el centro de masa G, mientras que el *eje z paralelo* correspondiente queda a una distancia d. Al seleccionar el elemento de masa diferencial dm, localizado en el punto (x', y') y utilizar el teorema de Pitágoras, $r^2 = (d + x')^2 + y'^2$, podemos expresar el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje z como

$$I = \int_m r^2\, dm = \int_m [(d + x')^2 + y'^2]\, dm$$

$$= \int_m (x'^2 + y'^2)\, dm + 2d\int_m x'\, dm + d^2\int_m dm$$

Dado que $r'^2 = x'^2 + y'^2$, la primera integral representa I_G. La segunda es igual a *cero*, puesto que el eje z' pasa por el centro de masa del cuerpo, es decir, $\int x'dm = \overline{x}'m = 0$ puesto que $\overline{x}' = 0$. Por último,

la tercera integral representa la masa total m del cuerpo. Por tanto, el momento de inercia con respecto al eje z puede escribirse como

$$I = I_G + md^2 \tag{17-4}$$

donde

I_G = momento de inercia con respecto al eje z' que pasa por el centro de masa G
m = masa del cuerpo
d = distancia perpendicular entre los ejes paralelos z y z'

Radio de giro. De vez en cuando, el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje especificado se reporta en manuales por medio del *radio de giro*, k. Éste es una propiedad geométrica que tiene unidades de longitud. Cuando se conocen el radio de giro y la masa m del cuerpo, el momento de inercia del cuerpo se determina con la ecuación

$$I = mk^2 \quad \text{o} \quad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \tag{17-5}$$

Observe la *similitud* entre la definición de k en esta fórmula y r en la ecuación $dI = r^2dm$, la cual define el momento de inercia de una masa elemental dm del cuerpo con respecto a un eje.

Cuerpos compuestos. Si un cuerpo se compone de varias formas simples como discos, esferas y barras, su momento de inercia con respecto a cualquier eje se determina por la suma algebraica de los momentos de inercia de todas las formas compuestas calculadas con respecto al eje. La adición algebraica es necesaria puesto que una parte compuesta debe considerarse como una cantidad negativa si ya se contó como una pieza de otra de parte —por ejemplo, un "agujero" restado de una placa sólida. El teorema de los ejes paralelos se requiere para los cálculos si el centro de masa de cada parte compuesta no queda en el eje. Para el cálculo, entonces, $I = \Sigma(I_G + md^2)$. Aquí, el I_G de cada una de las partes compuesta se determina por integración, o por formas simples, como barras y discos, que puede hallarse en una tabla, como la que se da en la cubierta posterior interna de este libro.

EJEMPLO 17.3

Si la placa que se muestra en la figura 17-6*a* tiene una densidad de 8 000 kg/m³ y un espesor de 10 mm, determine su momento de inercia con respecto a un eje dirigido perpendicular a la página que pasa por el punto *O*.

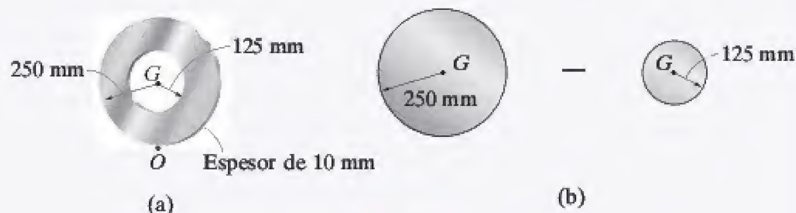


Fig. 17-6

SOLUCIÓN

La placa consta de dos partes compuestas, el disco de 250 mm de radio *menos* un disco de 125 mm de radio, figura 17-6*b*. El momento de inercia con respecto a *O* se determina calculando el momento de inercia de cada una de estas partes con respecto a *O* y luego sumando los resultados *algebraicamente*. Los cálculos se realizan por el teorema de los ejes paralelos junto con los datos enlistados en la tabla que aparece en la cubierta posterior interna de este libro.

Disco. El momento de inercia de un disco con respecto al eje centroidal perpendicular al plano del disco es $I_G = \frac{1}{2}mr^2$. El centro de masa del disco se encuentra a una distancia de 0.25 m del punto *O*. Por tanto,

$$m_d = \rho_d V_d = 8000 \text{ kg/m}^3 [\pi(0.25 \text{ m})^2(0.01 \text{ m})] = 15.71 \text{ kg}$$

$$(I_d)_O = \tfrac{1}{2}m_d r_d^2 + m_d d^2$$

$$= \frac{1}{2}(15.71 \text{ kg})(0.25 \text{ m})^2 + (15.71 \text{ kg})(0.25 \text{ m})^2$$

$$= 1.473 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Agujero. Para el disco (agujero) de 125 mm de radio, tenemos

$$m_h = \rho_h V_h = 8000 \text{ kg/m}^3 [\pi(0.125 \text{ m})^2(0.01 \text{ m})] = 3.927 \text{ kg}$$

$$(I_h)_O = \tfrac{1}{2}m_h r_h^2 + m_h d^2$$

$$= \frac{1}{2}(3.927 \text{ kg})(0.125 \text{ m})^2 + (3.927 \text{ kg})(0.25 \text{ m})^2$$

$$= 0.276 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

El momento de inercia de la placa con respecto al punto *O* es por consiguiente

$$I_O = (I_d)_O - (I_h)_O$$

$$= 1.473 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 - 0.276 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$= 1.20 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

EJEMPLO 17.4

El péndulo de la figura 17-7 cuelga del perno en O y se compone de dos barras delgadas de 10 lb de peso cada una. Determine el momento de inercia del péndulo con respecto a un eje que pasa por (a) el punto O y (b) el centro de masa G del péndulo.

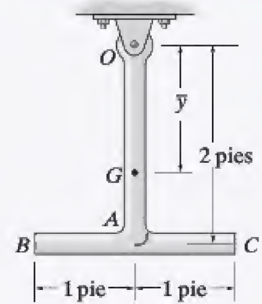


Fig. 17-7

SOLUCIÓN

Parte (a). Al usar la tabla que aparece en la cubierta posterior interna de este libro, el momento de inercia de la barra OA con respecto al eje perpendicular a la página que pasa por el punto O de la barra es $I_O = \frac{1}{3}ml^2$. Por tanto,

$$(I_{OA})_O = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{10 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(2 \text{ pies})^2 = 0.414 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2$$

Este mismo valor se obtiene con $I_G = \frac{1}{12}ml^2$ y el teorema de los ejes paralelos,

$$(I_{OA})_O = \frac{1}{12}ml^2 + md^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{10 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(2 \text{ pies})^2 + \left(\frac{10 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(1 \text{ pie})^2$$
$$= 0.414 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2$$

Para la barra BC tenemos

$$(I_{BC})_O = \frac{1}{12}ml^2 + md^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{10 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(2 \text{ pies})^2 + \left(\frac{10 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(2 \text{ pies})^2$$
$$= 1.346 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2$$

El momento de inercia del péndulo con respecto a O es por consiguiente

$$I_O = 0.414 + 1.346 = 1.76 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Parte (b). El centro de masa G se localizará con respecto al punto O. Si se supone que esta distancia es $\bar{y}$, figura 17-7 y se utiliza la fórmula para determinar el centro de masa, tenemos

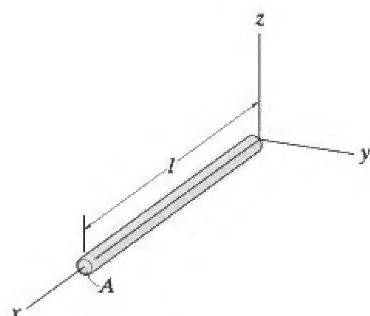
$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} m}{\Sigma m} = \frac{1(10/32.2) + 2(10/32.2)}{(10/32.2) + (10/32.2)} = 1.50 \text{ pies}$$

El momento de inercia I_G se determina de la misma manera que I_O, por medio de aplicaciones sucesivas del teorema de los ejes paralelos para transferir los momentos de inercia de las barras OA y BC a G. Una solución más directa, sin embargo, implica utilizar el resultado de I_O, es decir,

$$I_O = I_G + md^2; \quad 1.76 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2 = I_G + \left(\frac{20 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(1.50 \text{ pies})^2$$
$$I_G = 0.362 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

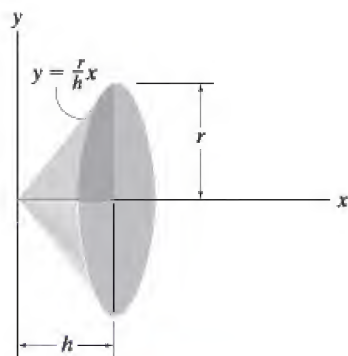
PROBLEMAS

•17-1. Determine el momento de inercia I_y de la barra esbelta. Su densidad ρ y área de sección transversal A son constantes. Exprese el resultado en función de su masa total m.



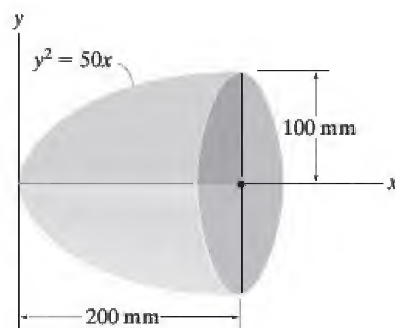
Prob. 17-1

17-2. El cono circular recto se forma al hacer girar el área sombreada alrededor del eje x. Determine el momento de inercia I_x y exprese el resultado en función de su masa total m. El cono tiene una densidad constante ρ.



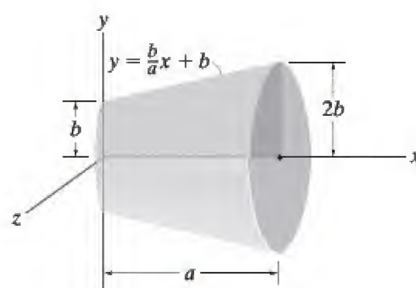
Prob. 17-2

17-3. El paraboloide se forma al hacer girar el área sombreada alrededor de eje x. Determine el radio de giro k_x. La densidad del material es $\rho = 5\ \mathrm{Mg/m^3}$.



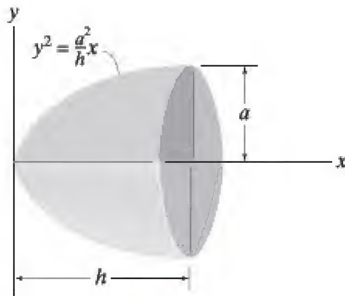
Prob. 17-3

*17-4. El cono truncado se forma al hacer girar el área sombreada alrededor del eje x. Determine el momento de inercia I_x y exprese el resultado en función de su masa total m. La densidad ρ del cono truncado es constante.



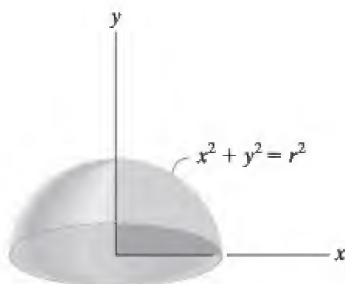
Prob. 17-4

•**17-5.** El paraboloide se forma al hacer girar el área sombreada alrededor del eje x. Determine el momento de inercia con respecto al eje x y exprese el resultado en función de su masa total m. La densidad ρ del material es constante.



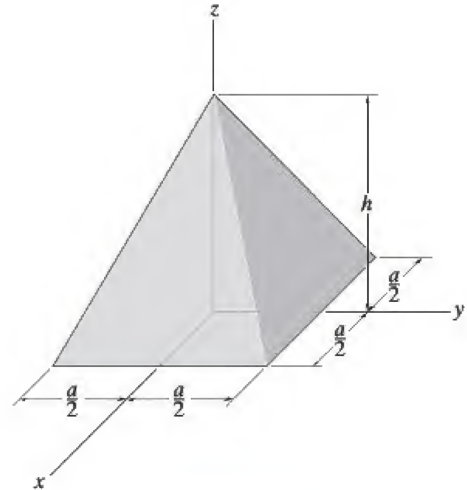
Prob. 17-5

17-6. La semiesfera se forma al hacer girar el área sombreada alrededor del eje y. Determine el momento de inercia I_y y exprese el resultado en función de su masa total m. La densidad ρ del material es constante.



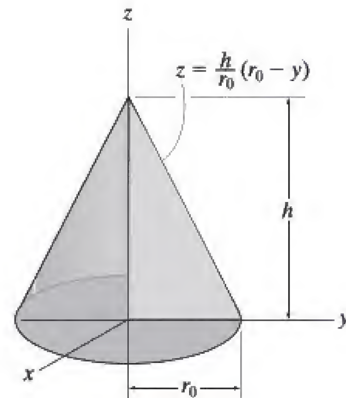
Prob. 17-6

17-7. Determine el momento de inercia de la pirámide homogénea de masa m con respecto al eje z. La densidad del material es ρ. *Sugerencia:* use un elemento de placa rectangular con volumen de $dV = (2x)(2y)dz$.



Prob. 17-7

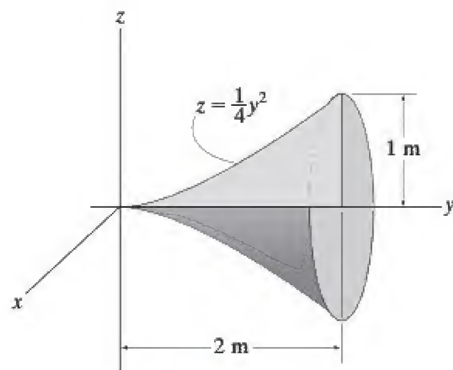
***17-8.** Determine el momento de inercia de masa I_z del cono formado por el giro del área sombreada alrededor del eje z. La densidad del material es ρ. Exprese el resultado en función su masa total m.



Prob. 17-8

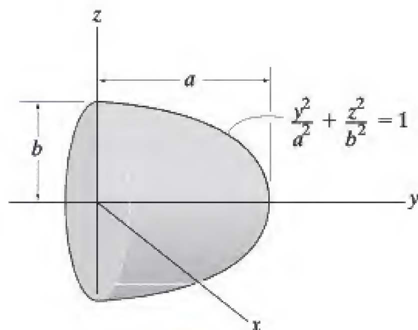
17

•**17-9.** Determine el momento de inercia de masa I_y del sólido formado por el giro del área sombreada alrededor del eje y. La densidad del material es ρ. Exprese el resultado en función de la masa m del sólido.



Prob. 17-9

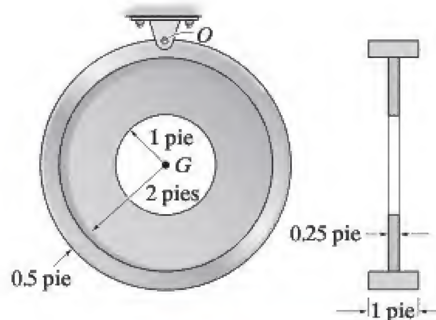
17-10. Determine el momento de inercia de masa I_y del sólido formado por el giro del área sombreada alrededor del eje y. La densidad del material es ρ. Exprese el resultado en función de la masa m del semielipsoide.



Prob. 17-10

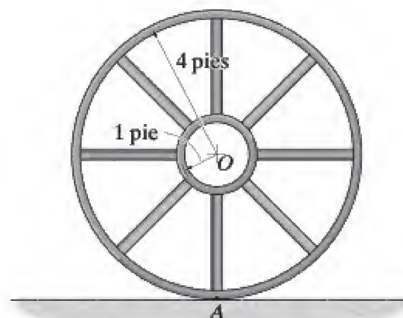
17-11. Determine el momento de inercia del ensamble con respecto a un eje perpendicular a la página y que pasa por el centro de masa G. El peso específico del material es $\gamma = 90$ lb/pie^3.

*__17-12.__ Determine el momento de inercia del ensamble con respecto a un eje perpendicular a la página y que pasa por el punto O. El peso específico del material es $\gamma = 90$ lb/pie^3.



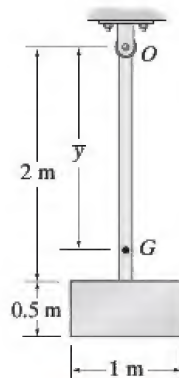
Probs. 17-11/12

•**17-13.** Si el aro grande, el aro pequeño y cada uno de los rayos pesan 100 lb, 15 lb y 20 lb, respectivamente, determine el momento de inercia de masa de la rueda con respecto a un eje perpendicular a la página y que pasa por el punto A.



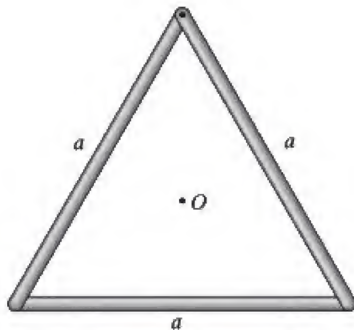
Prob. 17-13

17-14. El péndulo consiste en la barra esbelta de 3 kg y la placa de 5 kg. Determine la ubicación $\bar{y}$ de su centro de masa G, luego calcule su momento de inercia con respecto a un eje perpendicular a la página y que pasa por G.



Prob. 17-14

17-15. La masa de cada una de las tres barras esbeltas es m. Determine el momento de inercia del ensamble con respecto a un eje perpendicular a la página y que pasa por el centro O.



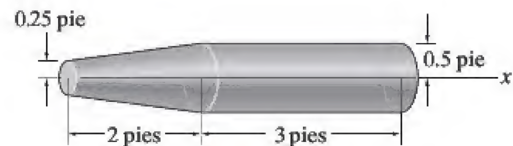
Prob. 17-15

***17-16.** El péndulo se compone de una placa que pesa 12 lb y una barra que pesa 4 lb. Determine el radio de giro del péndulo con respecto a un eje perpendicular a la página que pasa por el punto O.



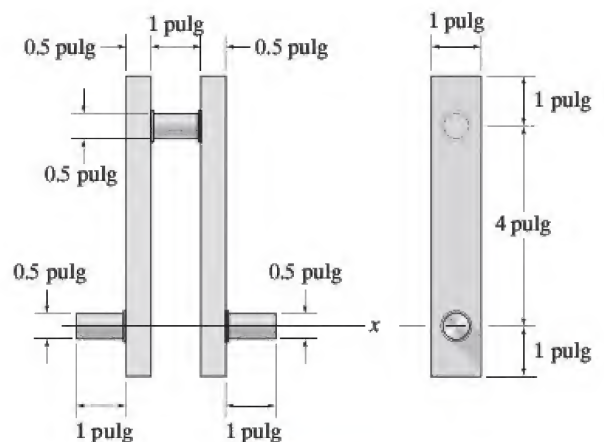
Prob. 17-16

•17-17. Determine el momento de inercia del ensamble de acero sólido con respecto al eje x. El peso específico del acero es $\gamma_{st} = 490$ lb/pie^3.



Prob. 17-17

17-18. Determine el momento de inercia de la manivela central con respecto al eje x. El material es acero cuyo peso específico es $\gamma_{st} = 490$ lb/pie^3.

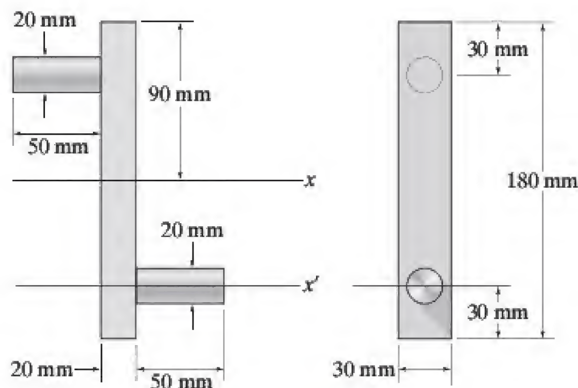


Prob. 17-18

17

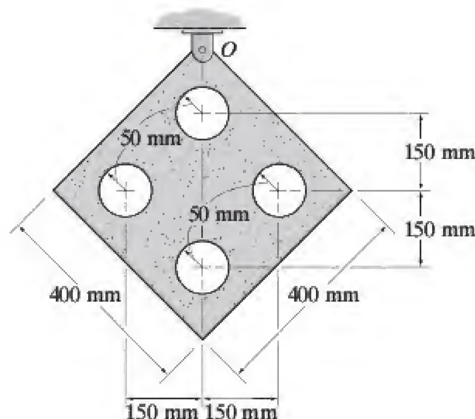
17-19. Determine el momento de inercia de la manivela voladiza con respecto al eje x. El material es acero cuya densidad es $\rho = 7.85 \text{ Mg/m}^3$.

***17-20.** Determine el momento de inercia de la manivela voladiza con respecto al eje x'. El material es acero, cuya densidad es $\rho = 7.85 \text{ Mg/m}^3$.



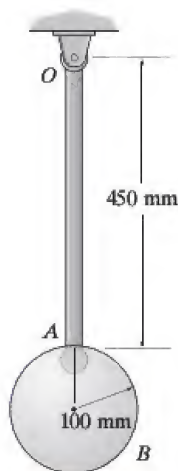
Probs. 17-19/20

17-22. Determine el momento de inercia de masa de la placa con respecto a un eje perpendicular a la página que pasa por el punto O. La masa del material por unidad de área es de 20 kg/m^2.



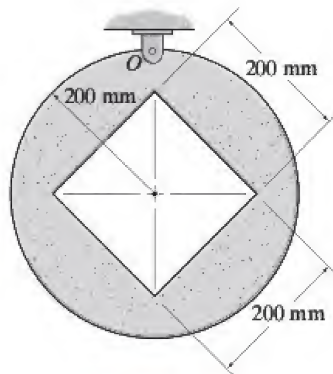
Prob. 17-22

•**17-21.** Determine el momento de inercia de masa del péndulo con respecto a un eje perpendicular a la página y que pasa por el punto O. La masa de la barra es de 10 kg y la de la esfera es de 15 kg.



Prob. 17-21

17-23. Determine el momento de inercia de masa de la placa con respecto a un eje perpendicular a la página que pasa por el punto O. La masa del material por unidad de área es de 20 kg/m^2.



Prob. 17-23

17.2 Ecuaciones de movimiento de cinética plana

En el análisis siguiente limitaremos nuestro estudio de cinética plana a cuerpos rígidos los que, junto con sus cargas, se consideran *simétricos* con respecto a un plano de referencia fijo.* Como el movimiento de un cuerpo se puede ver dentro del plano de referencia, todas las fuerzas (y momentos de par) que actúan en el cuerpo pueden proyectarse entonces en el plano. Un ejemplo de un cuerpo arbitrario de este tipo se muestra en la figura 17-8*a*. Aquí el origen del *marco de referencia inercial x, y, z coincide* con el punto arbitrario *P* en el cuerpo. Por definición, *estos ejes no giran y están fijos o se trasladan a velocidad constante*.

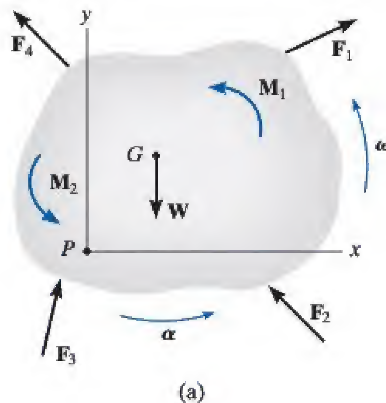


Fig. 17-8

17

Ecuación de movimiento de traslación.

Las fuerzas externas que actúan en el cuerpo de la figura 17-8*a* representan el efecto de las fuerzas gravitacionales, eléctricas, magnéticas o de contacto entre cuerpos adyacentes. Como este sistema de fuerzas se consideró previamente en la sección 13.3 en el análisis de una sistema de partículas, aquí puede usarse la ecuación 13-6 resultante, en cuyo caso

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$$

Esta ecuación se conoce como *ecuación de movimiento de traslación* del centro de masa de un cuerpo rígido. Plantea que *la suma de todas las fuerzas externas que actúan en el cuerpo es igual a su masa por la aceleración de su centro de masa G*.

Para movimiento del cuerpo en el plano *x-y*, la ecuación de movimiento de traslación puede escribirse en la forma de dos ecuaciones escalares independientes, es decir,

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$

*Al hacer esto, la ecuación de movimiento de rotación se reduce a una forma un tanto simplificada. El caso más general de la forma y carga de un cuerpo se considera en el capítulo 21.

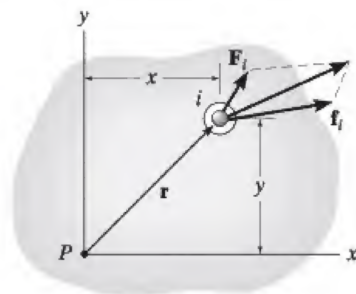


Diagrama de cuerpo libre de una partícula

(b)

=

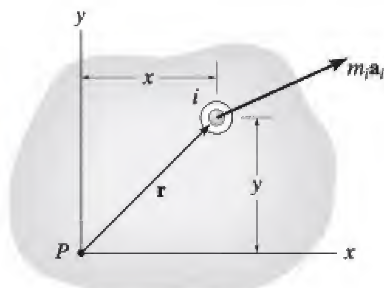
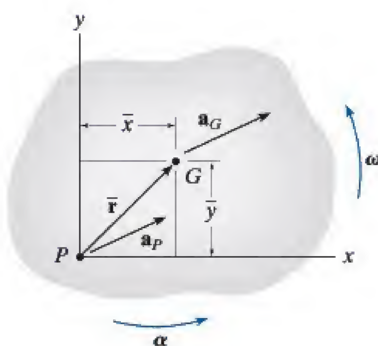


Diagrama cinético de una partícula

(c)



(d)

Fig. 17-8 (cont.)

17

Ecuación de movimiento de rotación.

Ahora examinaremos los efectos provocados por los momentos del sistema de fuerzas externas calculados con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento (el eje z) y que pasa por el punto P. Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la *iésima* partícula, figura 17-8b, $\mathbf{F}_i$ representa la *fuerza externa resultante* que actúa en la partícula, y $\mathbf{f}_i$ es la *resultante de las fuerzas internas* provocadas por interacciones con partículas adyacentes. Si la masa de la partícula es m_i y su aceleración es $\mathbf{a}_i$, entonces su diagrama cinético se muestra en la figura 17-8c. Si sumamos los momentos con respecto al punto P, requerimos

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r} \times \mathbf{f}_i = \mathbf{r} \times m_i\mathbf{a}_i$$

o

$$(\mathbf{M}_P)_i = \mathbf{r} \times m_i\mathbf{a}_i$$

Los momentos con respecto a P también pueden expresarse en función de la aceleración del punto P, figura 17-8d. Si la aceleración angular del cuerpo es $\boldsymbol{\alpha}$ y su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, entonces al utilizar la ecuación 16-18 tenemos

$$\begin{aligned}(\mathbf{M}_P)_i &= m_i\mathbf{r} \times (\mathbf{a}_P + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2\mathbf{r})\\ &= m_i[\mathbf{r} \times \mathbf{a}_P + \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) - \omega^2(\mathbf{r} \times \mathbf{r})]\end{aligned}$$

El último término es cero, puesto que $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$. Al expresar los vectores con componentes cartesianos y realizar las operaciones de producto vectorial, el resultado es

$$\begin{aligned}(M_P)_i\mathbf{k} &= m_i\{(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times [(a_P)_x\mathbf{i} + (a_P)_y\mathbf{j}]\\ &\quad + (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times [\alpha\mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})]\}\\ (M_P)_i\mathbf{k} &= m_i[-y(a_P)_x + x(a_P)_y + \alpha x^2 + \alpha y^2]\mathbf{k}\\ \circlearrowleft (M_P)_i &= m_i[-y(a_P)_x + x(a_P)_y + \alpha r^2]\end{aligned}$$

Si establecemos que $m_i \rightarrow dm$ y la integramos con respecto a toda la masa m del cuerpo, obtenemos la ecuación de momento resultante

$$\circlearrowleft \Sigma M_P = -\left(\int_m y\,dm\right)(a_P)_x + \left(\int_m x\,dm\right)(a_P)_y + \left(\int_m r^2 dm\right)\alpha$$

Aquí ΣM_P representa sólo el momento de las *fuerzas externas* que actúan en el cuerpo con respecto al punto P. El momento resultante de las fuerzas internas es cero, puesto que estas fuerzas actúan en pares colineales opuestos en todo el cuerpo y por tanto el momento de cada par de fuerzas con respecto a P se elimina. Las integrales y el primero y segundo términos del lado derecho se utilizan para localizar el centro de masa G del cuerpo con respecto a P, puesto que $\bar{y}m = \int y\,dm$ y $\bar{x}m = \int x\,dm$, figura 17-8d. Asimismo, la última integral representa el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje z, es decir, $I_P = \int r^2 dm$. Por tanto,

$$\circlearrowleft \Sigma M_P = -\bar{y}m(a_P)_x + \bar{x}m(a_P)_y + I_P\alpha \qquad (17\text{-}6)$$

Es posible reducir esta ecuación a una forma más simple si el punto P coincide con el centro de masa G del cuerpo. Si éste es el caso, entonces $\bar{x} = \bar{y} = 0$, y por consiguiente*

$$\Sigma M_G = I_G\alpha \tag{17-7}$$

Esta ecuación de movimiento de rotación plantea que la suma de los momentos de todas las fuerzas externas con respecto al centro de masa del cuerpo G es igual al producto del momento de inercia del cuerpo con respecto a un eje que pasa por G y a la aceleración angular del cuerpo.

La ecuación 17-6 también puede reescribirse en función de las componentes x y y de $\mathbf{a}_G$ y el momento de inercia I_G del cuerpo. Si el punto G está en $(\bar{x}, \bar{y})$, figura 17-8*d*, entonces de acuerdo con el teorema de los ejes paralelos, $I_P = I_G + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$. Si sustituimos en la ecuación 17-6 y reordenamos los términos, tenemos

$$\circlearrowleft \Sigma M_P = \bar{y}m[-(a_P)_x + \bar{y}\alpha] + \bar{x}m[(a_P)_y + \bar{x}\alpha] + I_G\alpha \tag{17-8}$$

De acuerdo con el diagrama cinemático de la figura 17-8*d*, $\mathbf{a}_P$ puede expresarse en función de $\mathbf{a}_G$ como

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_P + \boldsymbol{\alpha} \times \bar{\mathbf{r}} - \omega^2\bar{\mathbf{r}}$$

$$(a_G)_x\mathbf{i} + (a_G)_y\mathbf{j} = (a_P)_x\mathbf{i} + (a_P)_y\mathbf{j} + \alpha\mathbf{k} \times (\bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j}) - \omega^2(\bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j})$$

Si se realiza el producto vectorial y se igualan las componentes $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ respectivas se obtienen las dos ecuaciones escalares

$$(a_G)_x = (a_P)_x - \bar{y}\alpha - \bar{x}\omega^2$$
$$(a_G)_y = (a_P)_y + \bar{x}\alpha - \bar{y}\omega^2$$

Según estas ecuaciones $[-(a_P)_x + \bar{y}\alpha] = [-(a_G)_x - \bar{x}\omega^2]$ y $[(a_P)_y + \bar{x}\alpha] = [(a_G)_y + \bar{y}\omega^2]$. Al sustituir estos resultados en la ecuación 17-8 y simplificar, el resultado es

$$\circlearrowleft \Sigma M_P = -\bar{y}m(a_G)_x + \bar{x}m(a_G)_y + I_G\alpha \tag{17-9}$$

Este importante resultado indica que cuando los momentos de las fuerzas externas mostradas en el diagrama de cuerpo libre se suman con respecto al punto P, figura 17-8e, equivalen a la suma de los "momentos cinéticos" de las componentes de m$\mathbf{a}_G$ *con respecto a P más el "momento cinético" de* $I_G\boldsymbol{\alpha}$, *figura 17-8f*. En otras palabras, cuando se calculan los "momentos cinéticos" $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$, figura 17-8*f*, los vectores $m(\mathbf{a}_G)_x$ y $m(\mathbf{a}_G)_y$ se tratan como vectores deslizantes; es decir, pueden actuar en *cualquier punto a lo largo de su línea de acción*. Del mismo modo, $I_G\boldsymbol{\alpha}$ puede tratarse como un vector libre, y por consiguiente puede actuar en *cualquier punto*. Es importante tener en cuenta, sin embargo, que $m\mathbf{a}_G$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$ no son lo mismo que una fuerza o un momento de par. En cambio, son provocados por los efectos externos de las fuerzas y momentos de par que actúan en el cuerpo. Por tanto, con esto en mente podemos escribir la ecuación 17-9 de una forma más general como

$$\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P \tag{17-10}$$

*También se reduce a esta misma forma simple $\Sigma M_P = I_P\alpha$ si el punto P es un *punto fijo* (vea la ecuación 17-16) o la aceleración del punto P se dirige a lo largo de la línea PG.

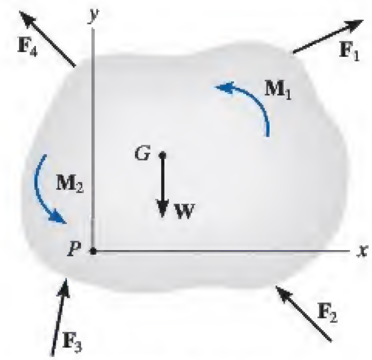


Diagrama de cuerpo libre

(e)

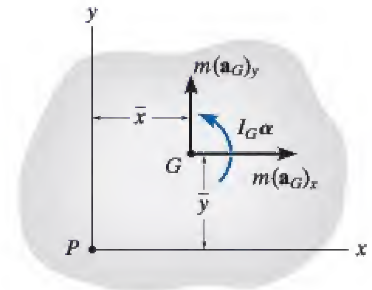


Diagrama cinético

(f)

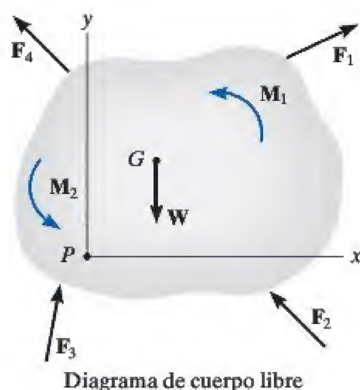


Diagrama de cuerpo libre

(e)

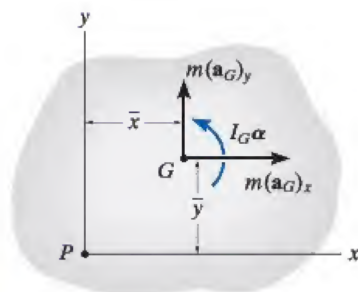


Diagrama cinético

(f)

Fig. 17-8 (cont.)

Aplicación general de las ecuaciones de movimiento.

Para resumir este análisis, se pueden escribir *tres* ecuaciones escalares independientes que describan el movimiento plano general de un cuerpo rígido simétrico.

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma M_G = I_G\alpha$$

o

$$\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P \qquad (17\text{-}11)$$

Cuando se aplican estas ecuaciones, debemos trazar *siempre* un diagrama de cuerpo libre, figura 17-8*e*, que incluya todos los términos que intervienen en ΣF_x, ΣF_y, ΣM_G o ΣM_P. En algunos problemas también puede ser útil trazar el *diagrama cinético* del cuerpo, figura 17-8*f*. Este diagrama explica gráficamente los términos $m(\mathbf{a}_G)_x$, $m(\mathbf{a}_G)_y$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$. Es muy útil en especial cuando se utiliza para determinar las componentes de $m\mathbf{a}_G$ y el momento de dichas componentes en $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$.*

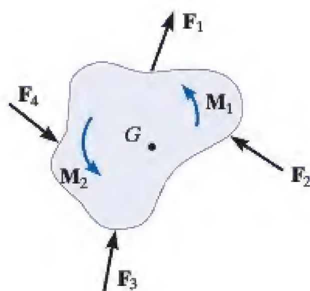
17.3 Ecuaciones de movimiento: traslación

Cuando el cuerpo rígido que se muestra en la figura 17-9*a* experimenta una *traslación*, todas sus partículas tienen la *misma aceleración*. Además, $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, en cuyo caso la ecuación de movimiento de rotación aplicada en el punto G se reduce a una forma simplificada, o sea, $\Sigma M_G = 0$. A continuación se analizará la aplicación de ésta y todas las ecuaciones de movimiento producido por fuerzas para cada uno de los dos tipos de traslación.

Traslación rectilínea.

Cuando un cuerpo se somete a *traslación rectilínea*, todas sus partículas viajan a lo largo de trayectorias de línea recta paralelas. El diagrama de cuerpo libre y los diagramas cinéticos se muestran en la figura 17-9*b*. Como $I_G\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, sólo $m\mathbf{a}_G$ se muestra en el diagrama cinético. Por tanto, las ecuaciones de movimiento pertinentes en este caso son

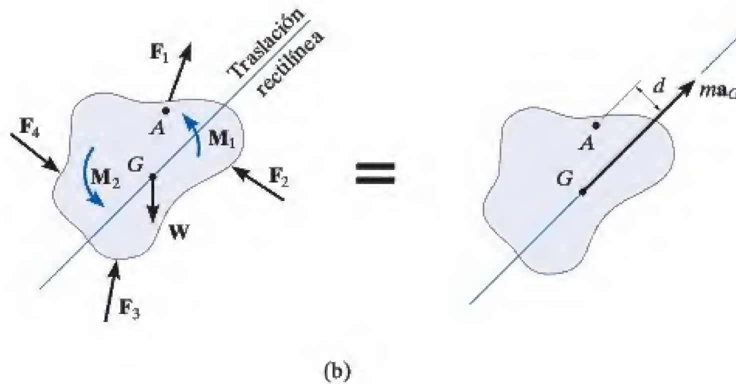
$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= m(a_G)_x \\ \Sigma F_y &= m(a_G)_y \\ \Sigma M_G &= 0 \end{aligned} \qquad (17\text{-}12)$$



(a)

Fig. 17-9

*Por esta razón, el diagrama cinético se utilizará en la solución de un problema de ejemplo siempre que se aplique $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$.



(b)

También es posible sumar momentos con respecto a otros puntos, en o fuera del cuerpo, en cuyo caso, debe tenerse en cuenta el momento de $m\mathbf{a}_G$. Por ejemplo, si se selecciona el punto A, situado a una distancia perpendicular d de la línea de acción de $m\mathbf{a}_G$, las siguientes ecuaciones de momento aplican:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = \Sigma(\mathcal{M}_k)_A; \qquad \Sigma M_A = (ma_G)d$$

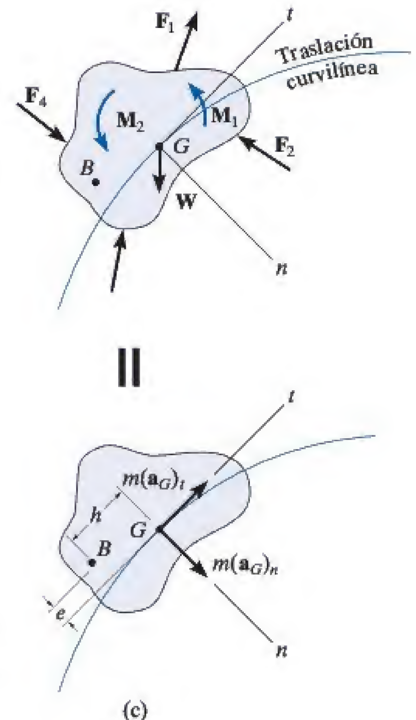
Aquí la suma de los momentos de las fuerzas externas y los momentos de par con respecto a A (ΣM_A, diagrama de cuerpo libre) es igual al momento de $m\mathbf{a}_G$ con respecto a A ($\Sigma(\mathcal{M}_k)_A$, diagrama cinético).

Traslación curvilínea. Cuando un cuerpo rígido se somete a *traslación curvilínea*, todas sus partículas viajan a lo largo de *trayectorias curvas paralelas.* En un análisis, con frecuencia es conveniente utilizar un sistema de coordenadas inercial con su origen que coincida con el centro de masa del cuerpo en el instante considerado y sus ejes orientados en las direcciones normal y tangencial a la trayectoria del movimiento, figura 17-9c. De este modo, las tres ecuaciones escalares de movimiento son

$$\begin{aligned} \Sigma F_n &= m(a_G)_n \\ \Sigma F_t &= m(a_G)_t \\ \Sigma M_G &= 0 \end{aligned} \qquad (17\text{-}13)$$

Si se suman los momentos con respecto al punto arbitrario B, figura 17-9c, entonces es necesario tener en cuenta los momentos, $\Sigma(\mathcal{M}_k)_B$, de las dos componentes $m(\mathbf{a}_G)_n$ y $m(\mathbf{a}_G)_t$ con respecto a este punto. De acuerdo con el diagrama cinético, h y e representan las distancias perpendiculares (o "brazos de momento") de B a las líneas de acción de los componentes. Por consiguiente, la ecuación de momentos requerida es

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = \Sigma(\mathcal{M}_k)_B; \qquad \Sigma M_B = e[m(a_G)_t] - h[m(a_G)_n]$$

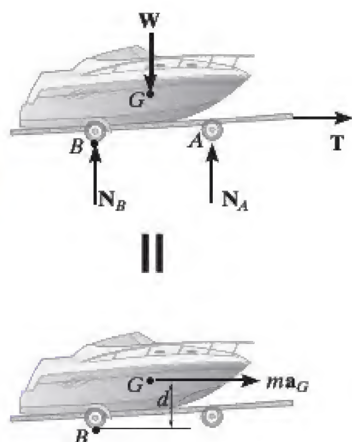


(c)

17



Los diagramas de cuerpo libre y cinético para este bote y el remolque se trazan primero para aplicar las ecuaciones de movimiento. Aquí las fuerzas en el diagrama de cuerpo libre causan el efecto que se muestra en el diagrama cinético. Si se suman los momentos con respecto al centro de masa G, entonces $\Sigma M_G = 0$. Sin embargo, si los momentos se suman con respecto al punto B entonces $\circlearrowright + \Sigma M_B = ma_G(d)$.



17

Procedimiento para el análisis

Los problemas cinéticos que implican la *traslación* de un cuerpo rígido pueden resolverse con el siguiente procedimiento.

Diagrama de cuerpo libre.

- Establezca el sistema de coordenadas x, y o n, t inercial y trace el diagrama de cuerpo libre que incluya todas las fuerzas externas y momentos de par que actúan en el cuerpo.
- Deberá establecer la dirección y sentido de la aceleración del centro de masa $\mathbf{a}_G$ del cuerpo.
- Identifique las incógnitas en el problema.
- Si se decide que en la solución deba utilizarse la ecuación de movimiento de rotación $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$, entonces considere trazar el diagrama cinético, puesto que gráficamente incluye las componentes $m(\mathbf{a}_G)_x$, $m(\mathbf{a}_G)_y$ o $m(\mathbf{a}_G)_t$, $m(\mathbf{a}_G)_n$ y por consiguiente es conveniente "visualizar" los términos requeridos en la suma de momentos $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$.

Ecuaciones de movimiento.

- Aplique las tres ecuaciones de movimiento de acuerdo con la convención de signos establecida.
- Para simplificar el análisis, la ecuación de momentos $\Sigma M_G = 0$ puede ser reemplazada por la ecuación más general $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$, donde el punto P casi siempre se encuentra en la intersección de las líneas de acción de tantas fuerzas desconocidas como sea posible.
- Si el cuerpo está en contacto con una *superficie áspera* y ocurre deslizamiento, use la ecuación de fricción $F = \mu_k N$. Recuerde, que $\mathbf{F}$ siempre actúa en el cuerpo de modo que se opone a su movimiento con respecto a la superficie con la que está en contacto.

Cinemática.

- Use cinemática para determinar la velocidad y la posición del cuerpo.
- Para traslación rectilínea con *aceleración variable*

$$a_G = dv_G/dt \quad a_G ds_G = v_G dv_G \quad v_G = ds_G/dt$$

- Para traslación rectilínea con *aceleración constante*

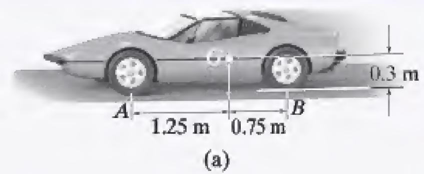
$$v_G = (v_G)_0 + a_G t \qquad v_G^2 = (v_G)_0^2 + 2a_G[s_G - (s_G)_0]$$
$$s_G = (s_G)_0 + (v_G)_0 t + \tfrac{1}{2}a_G t^2$$

- Para traslación curvilínea

$$(a_G)_n = v_G^2/\rho = \omega^2\rho$$
$$(a_G)_t = dv_G/dt, (a_G)_t ds_G = v_G dv_G, (a_G)_t = \alpha\rho$$

EJEMPLO 17.5

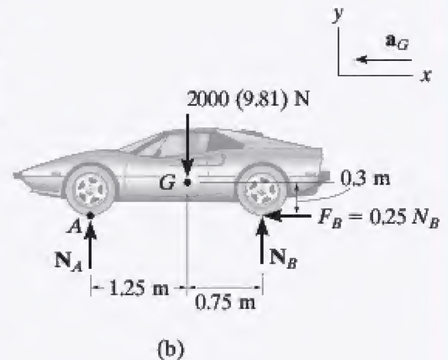
El automóvil de la figura 17-10*a* tiene una masa de 2 Mg y un centro de masa en *G*. Determine la aceleración si las ruedas traseras "propulsoras" siempre patinan, en tanto que las delanteras ruedan libremente. Ignore la masa de las ruedas. El coeficiente de fricción cinética entre las ruedas y la carretera es $\mu_k = 0.25$.



(a)

SOLUCIÓN I

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 17-10*b*, la fuerza de fricción $\mathbf{F}_B$ en las ruedas traseras empuja el carro hacia delante y como *ocurre deslizamiento*, $F_B = 0.25\,N_B$. Las fuerzas de fricción que actúan en las *ruedas delanteras* son *cero*, puesto que su masa es insignificante.* En el problema hay tres incógnitas, N_A, N_B y a_G. Aquí sumaremos los momentos con respecto al centro de masa. El automóvil (punto *G*) acelera hacia la izquierda, es decir, en la dirección *x* negativa, figura 17-10*b*.



(b)

Ecuaciones de movimiento.

$$\overset{+}{\leftarrow}\Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad -0.25N_B = -(2000\text{ kg})a_G \quad (1)$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad N_A + N_B - 2000(9.81)\text{ N} = 0 \quad (2)$$

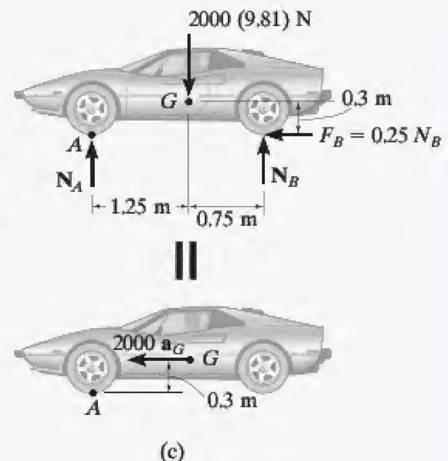
$$\circlearrowleft+\Sigma M_G = 0; \quad -N_A(1.25\text{ m}) - 0.25N_B(0.3\text{ m}) + N_B(0.75\text{ m}) = 0 \quad (3)$$

Al resolver,

$$a_G = 1.59\text{ m/s}^2 \leftarrow \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$
$$N_A = 6.88\text{ kN}$$
$$N_B = 12.7\text{ kN}$$

SOLUCIÓN II

Diagramas de cuerpo libre y cinético. Si se aplica la ecuación de "momentos" con respecto al punto *A*, entonces se eliminará la incógnita N_A de la ecuación. Para "visualizar" el momento de $m\mathbf{a}_G$ con respecto a *A*, incluiremos el diagrama cinético como parte del análisis, figura 17-10*c*.



(c)

Fig. 17-10

Ecuación de movimiento.

$$\circlearrowleft+\Sigma M_A = \Sigma(\mathcal{M}_k)_A; \qquad N_B(2\text{ m}) - [2000(9.81)\text{ N}](1.25\text{ m}) = (2000\text{ kg})a_G(0.3\text{ m})$$

Para resolver ésta y la ecuación 1 para a_G obtenemos una solución más simple que la que se obtuvo con las ecuaciones 1 a 3.

*Si se ignora la masa de la rueda, $I\alpha = 0$ y la fuerza de fricción en *A* requerida para hacer girar la rueda es cero. Si se incluyera la masa de las ruedas, entonces la solución sería más complicada, puesto que tendría que considerarse un análisis de movimiento plano general de las ruedas (vea la sección 17.5).

17

EJEMPLO 17.6



La motocicleta de la figura 17-11a tiene una masa de 125 kg y un centro de masa G_1, mientras que el motociclista tiene una masa de 75 kg y un centro de masa en G_2. Determine el coeficiente mínimo de fricción estática entre las ruedas y el pavimento para que el motociclista realice un "caballito", es decir, que levante la rueda delantera del suelo como se muestra en la foto. ¿Qué aceleración se requiere para hacer esto? Ignore la masa de las ruedas y suponga que la rueda delantera gira libremente.

(a)

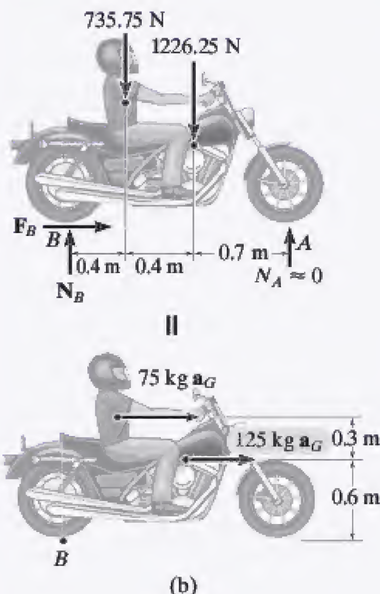


Fig. 17-11

SOLUCIÓN

Diagramas de cuerpo libre y cinético. En este problema consideraremos tanto la motocicleta como al motociclista como un solo *sistema*. Es posible localizar primero el centro de masa de este "sistema" por medio de las ecuaciones $\bar{x} = \Sigma\tilde{x}m/\Sigma m$ y $\bar{y} = \Sigma\tilde{y}m/\Sigma m$. En este caso, sin embargo, consideraremos el peso de la masa de la motocicleta y del motociclista por separado como se muestra en los diagramas de cuerpo libre y cinético, figura 17-11b. Estas dos partes se mueven con la *misma* aceleración. Hemos supuesto que la rueda delantera *está a punto* de separarse del suelo, de modo que la reacción normal $N_A \approx 0$. Las tres incógnitas en el problema son N_B, F_B y a_G.

Ecuaciones de movimiento.

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad F_B = (75\text{ kg} + 125\text{ kg})a_G \qquad (1)$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad N_B - 735.75\text{ N} - 1226.25\text{ N} = 0$$

$$\circlearrowleft+\Sigma M_B = \Sigma(\mathcal{M}_k)_B; \; -(735.75\text{ N})(0.4\text{ m}) - (1226.25\text{ N})(0.8\text{ m}) = -(75\text{ kg}\,a_G)(0.9\text{ m}) - (125\text{ kg}\,a_G)(0.6\text{ m}) \qquad (2)$$

Al resolver,

$$a_G = 8.95\text{ m/s}^2 \rightarrow \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$N_B = 1962\text{ N}$$

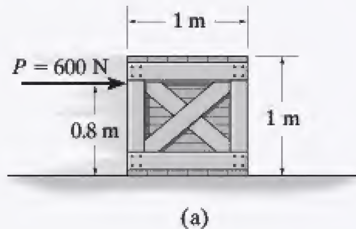
$$F_B = 1790\text{ N}$$

Por tanto, el coeficiente mínimo de fricción estática es

$$(\mu_s)_{\text{mín}} = \frac{F_B}{N_B} = \frac{1790\text{ N}}{1962\text{ N}} = 0.912 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

EJEMPLO 17.7

Un embalaje uniforme de 50 kg descansa sobre una superficie horizontal cuyo coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.2$. Determine la aceleración si se aplica una fuerza $P = 600$ N al embalaje como se muestra en la figura 17-12*a*.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. La fuerza **P** puede hacer que el embalaje se deslice o que se vuelque. Como se muestra en la figura 17-12*b*, se supone que el embalaje se desliza, de modo que $F = \mu_k N_C = 0.2\ N_C$. Además, la fuerza normal resultante $\mathbf{N}_C$ actúa en O, a una distancia x (donde $0 < x \leq 0.5$ m) de la línea de centros del embalaje.* Las tres incógnitas son N_C, x y a_G.

Ecuaciones de movimiento.

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \quad 600\text{ N} - 0.2N_C = (50\text{ kg})a_G \quad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \quad N_C - 490.5\text{ N} = 0 \quad (2)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0; \quad -600\text{ N}(0.3\text{ m}) + N_C(x) - 0.2N_C(0.5\text{ m}) = 0 \quad (3)$$

Al resolver,

$$N_C = 490.5\text{ N}$$

$$x = 0.467\text{ m}$$

$$a_G = 10.0\text{ m/s}^2 \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

Como $x = 0.467$ m < 0.5 m, el embalaje se desliza como se supuso originalmente.

NOTA: si la solución hubiera dado un valor de $x > 0.5$ m, el problema tendría que resolverse otra vez porque el embalaje se vuelca. Si éste fuera el caso, $\mathbf{N}_C$ actuaría en el *punto de la esquina A* y $F \leq 0.2N_C$.

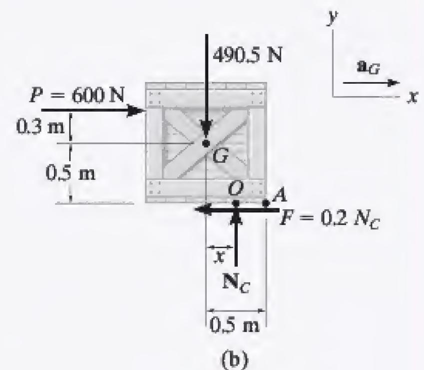
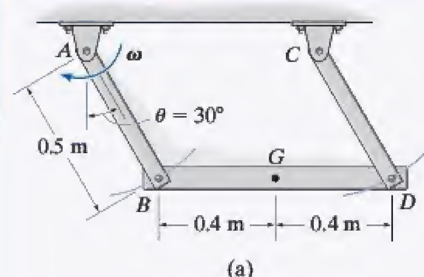


Fig. 17-12

*La línea de acción de $\mathbf{N}_C$ no necesariamente pasa por el centro de masa G ($x = 0$), puesto que $\mathbf{N}_C$ debe contrarrestar la tendencia a la volcadura provocada por **P**. Vea la sección 8.1 de *Ingeniería Mecánica: Estática*.

17

EJEMPLO 17.8



(a)

La viga *BD* de 100 kg que se muestra en la figura 17-13*a* está sostenida por dos barras cuya masa no se toma en cuenta. Determine la fuerza desarrollada en cada barra si cuando $\theta = 30°$, $\omega = 6$ rad/s.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. La viga se mueve con *traslación curvilínea* puesto que todos sus puntos se mueven a lo largo de trayectorias circulares que tienen el mismo radio de 0.5 m. Con coordenadas normales y tangenciales, el diagrama de cuerpo libre de la viga se muestra en la figura 17-13*b*. Debido a la *traslación*, *G* tiene el *mismo* movimiento que el pasador en *B*, el cual está conectado tanto a la barra como a la viga. Observe que la componente tangencial de la aceleración actúa hacia abajo y a la izquierda debido a la dirección en el sentido de las manecillas del reloj de $\boldsymbol{\alpha}$, figura 17-13*c*. Además, el componente normal de la aceleración *siempre* está dirigido hacia el centro de curvatura (hacia el punto *A* para la barra *AB*). Puesto que la velocidad angular de *AB* es de 6 rad/s cuando $\theta = 30°$, entonces

$$(a_G)_n = \omega^2 r = (6\text{ rad/s})^2(0.5\text{ m}) = 18\text{ m/s}^2$$

Las tres incógnitas son T_B, T_D y $(a_G)_t$. Se establecieron las direcciones de $(\mathbf{a}_G)_n$ y $(\mathbf{a}_G)_t$ y se indican en los ejes de coordenadas.

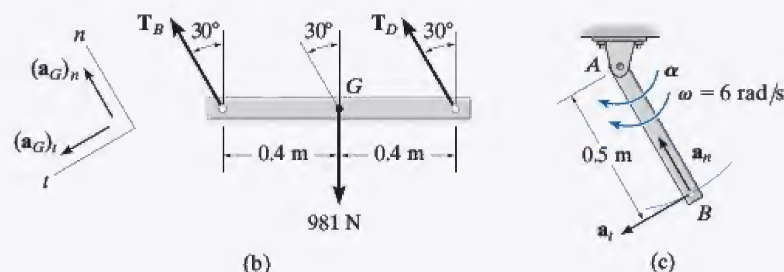


Fig. 17-13

Ecuaciones de movimiento.

$$+\nwarrow\Sigma F_n = m(a_G)_n;\quad T_B + T_D - 981\cos 30°\text{ N} = 100\text{ kg}(18\text{ m/s}^2) \quad (1)$$

$$+\swarrow\Sigma F_t = m(a_G)_t;\qquad 981\text{ sen }30° = 100\text{ kg}(a_G)_t \quad (2)$$

$$\circlearrowleft +\Sigma M_G = 0;\quad -(T_B\cos 30°)(0.4\text{ m}) + (T_D\cos 30°)(0.4\text{ m}) = 0 \quad (3)$$

El resultado de la solución simultánea de estas tres ecuaciones es

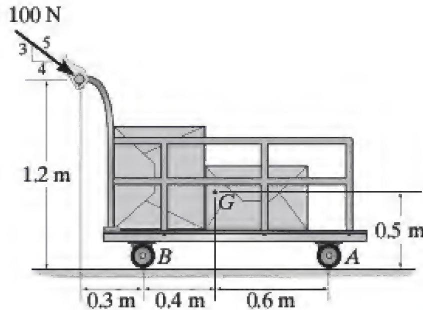
$$T_B = T_D = 1.32\text{ kN} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$(a_G)_t = 4.905\text{ m/s}^2$$

NOTA: también es posible aplicar las ecuaciones de movimiento a lo largo de los ejes *x* y *y*, horizontal y vertical, pero la solución se vuelve más complicada.

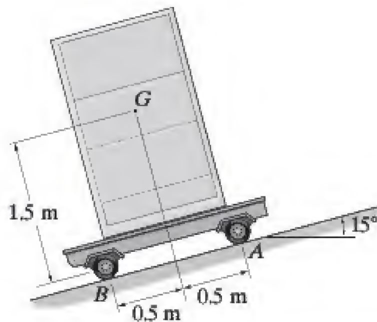
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F17-1. La carretilla y su carga tienen una masa total de 100 kg. Determine la aceleración de la carretilla y la reacción normal en el par de ruedas A y B. Ignore la masa de éstas.



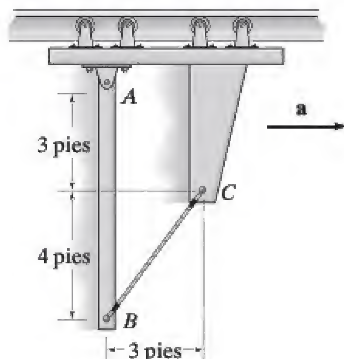
F17-1

F17-2. Si se permite que el gabinete de 80 kg ruede hacia abajo del plano inclinado, determine su aceleración y las reacciones normales en el par de rodillos A y B cuya masa se pasa por alto.



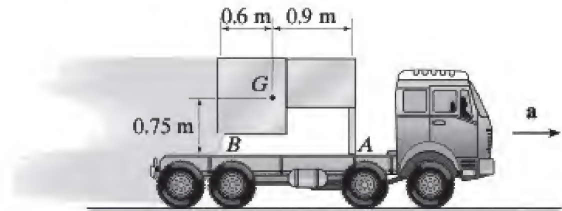
F17-2

F17-3. La articulación AB de 20 lb está conectada con un pasador a un marco móvil en A y sostenida en posición vertical por el resorte BC, el cual puede soportar una tensión máxima de 10 lb. Determine la aceleración máxima del marco sin que se rompa el resorte. ¿Cuáles son los componentes correspondientes de la reacción en el pasador A?



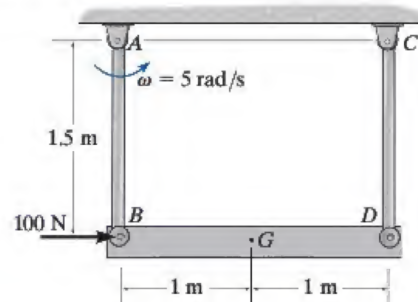
F17-3

F17-4. Determine la aceleración máxima del camión sin que el ensamble se mueva con respecto al camión. Además, ¿cuál es la reacción normal correspondiente en las patas A y B? La mesa de 100 kg tiene su centro de masa en G y el coeficiente de fricción estática entre las patas de la mesa y la plataforma del camión es $\mu_s = 0.2$.



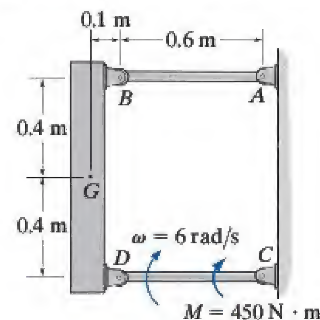
F17-4

F17-5. En el instante que se muestra, las dos barras cuya masa se ignora oscilan con una velocidad angular en sentido contrario al de las manecillas del reloj de $\omega = 5$ rad/s, mientras que la barra de 50 kg se somete a la fuerza horizontal de 100 N. Determine la tensión desarrollada en las barras y su aceleración angular en este instante.



F17-5

F17-6. En el instante que se muestra, la articulación CD gira con una velocidad angular de $\omega = 6$ rad/s. Si se somete a un momento de par $M = 450$ N · m, determine la fuerza desarrollada en la articulación AB, los componentes horizontal y vertical de la reacción en el perno D, y la aceleración angular del eslabón CD en este instante. La masa del bloque es de 50 kg y su centro de masa está en G. Ignore la masa de las articulaciones AB y CD.



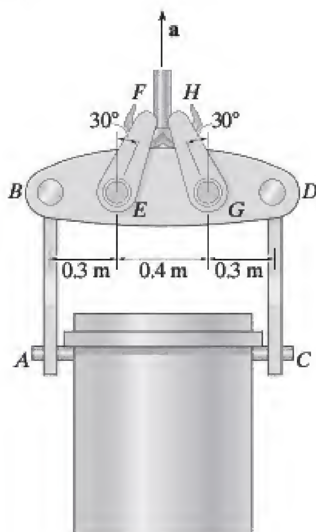
F17-6

17

PROBLEMAS

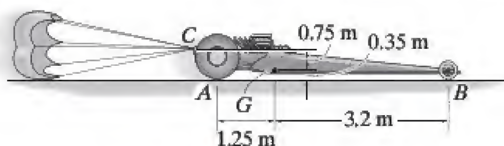
***17-24.** El recipiente de 4 Mg contiene material nuclear de desecho embutido en concreto. Si la masa de la viga cepo BD es de 50 kg, determine la fuerza en cada uno de los acopladores AB, CD, EF y GH cuando el sistema se levanta con una aceleración de $a = 2\ \text{m/s}^2$ durante un breve tiempo.

•17-25. El recipiente de 4 Mg contiene material nuclear de desecho embutido en concreto. Si la masa de la viga cepo BD es de 50 kg, determine la aceleración vertical máxima **a** del sistema de modo que cada uno de los acopladores AB y CD no se vea sometido a una fuerza de más de 30 kN y los acopladores EF y GH a una fuerza de más de 34 kN.



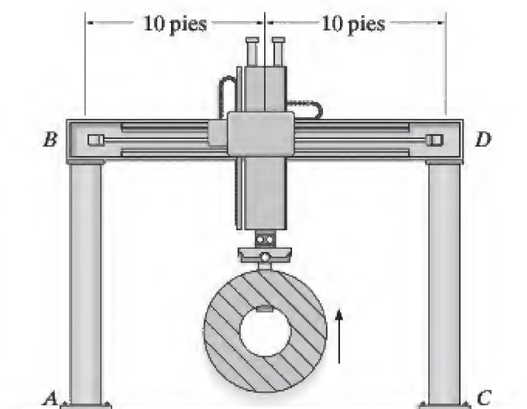
Probs. 17-24/25

17-26. El dragster tiene una masa de 1200 kg y un centro de masa en G. Si se fija un paracaídas de frenado en C y genera una fuerza de frenado horizontal $F = (1.6v^2)$ N, donde v está en metros por segundo, determine la velocidad crítica que el dragster puede tener al desplegar el paracaídas, de modo que las ruedas B estén a punto de perder el contacto con el suelo, es decir, que la reacción normal en B sea cero. Si esa condición ocurre, determine la desaceleración inicial del dragster. Ignore la masa de las ruedas y suponga que el motor se apaga de modo que las ruedas roten libremente.



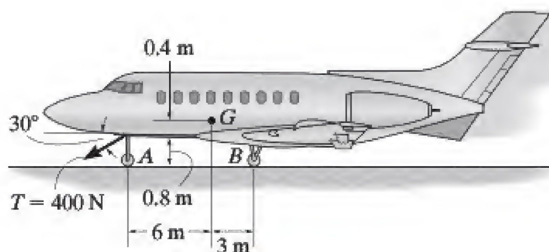
Prob. 17-26

17-27. Cuando el mecanismo de elevación está en funcionamiento, la carga de 400 lb recibe una aceleración hacia arriba de 5 pies/s^2. Determine la fuerza de compresión que la carga ejerce en las columnas, AB y CD. ¿Cuál es la fuerza de compresión en cada de estas columnas si la carga se mueve hacia arriba a una velocidad constante de 3 pies/s? Suponga que las columnas sólo soportan una carga axial.



Prob. 17-27

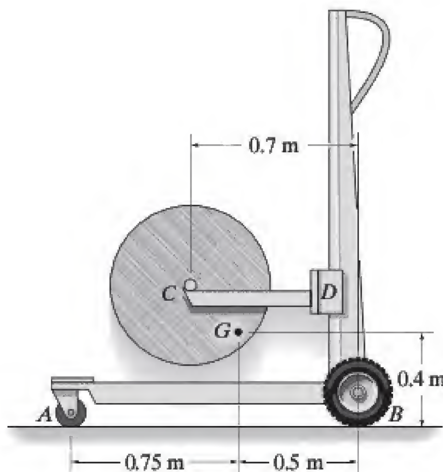
***17-28.** El avión de propulsión a chorro tiene una masa de 22 Mg y un centro de masa en G. Si se sujeta un cable de remolque en la parte superior de la rueda de nariz y ejerce una fuerza de $T = 400$ N como se muestra, determine la aceleración del avión y la reacción normal en la rueda de nariz y en cada una de las ruedas de ala localizadas en B. Ignore la fuerza ascensional de las alas y la masa de las ruedas.



Prob. 17-28

•**17-29.** El montacargas tiene una masa de 70 kg y centro de masa en G. Si levanta el carrete de 120 kg con una aceleración de 3 m/s^2, determine las reacciones en cada una de las cuatro ruedas. La carga es simétrica. Ignore la masa del brazo móvil CD.

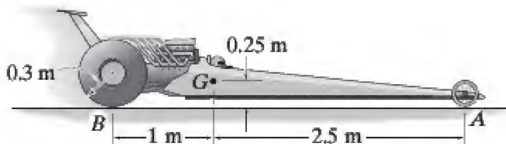
17-30. El montacargas tiene una masa de 70 kg y centro de masa en G. Determine la aceleración máxima dirigida hacia arriba del carrete de 120 kg de modo que la reacción en las ruedas no sea de más de 600 N.



Probs. 17-29/30

17-31. El dragster tiene una masa de 1500 kg y un centro de masa en G. Si el coeficiente de fricción estática entre las ruedas traseras y el pavimento es $\mu_k = 0.6$, determine si es posible que el conductor levante las ruedas delanteras A, del suelo mientras las ruedas traseras no se están deslizando. Ignore la masa de las ruedas y suponga que las ruedas delanteras ruedan libremente.

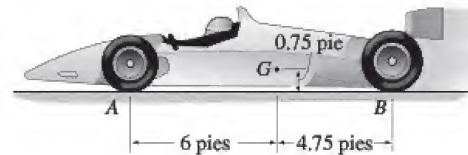
***17-32.** El dragster tiene una masa de 1 500 kg y un centro de masa en G. Si no hay deslizamiento, determine la fuerza de fricción $\mathbf{F}_B$ que debe desarrollarse en cada una de las ruedas propulsoras traseras B para que generen una aceleración de $a = 6$ m/s^2. ¿Cuáles son las reacciones normales de cada rueda en el suelo? Ignore la masa de las ruedas y suponga que las ruedas delanteras ruedan libremente.



Probs. 17-31/32

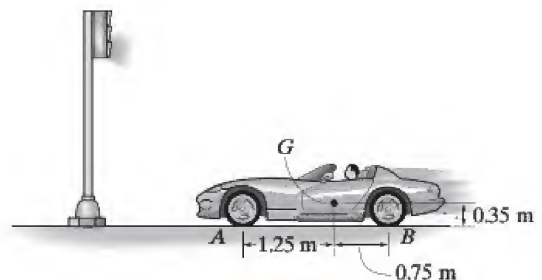
•**17-33.** Al inicio de la carrera, las ruedas propulsoras traseras B del automóvil de 1550 lb patinan en el pavimento. Determine la aceleración del automóvil y la reacción normal que el pavimento ejerce en las dos ruedas delanteras A y en las dos ruedas traseras B. El coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.7$ y el centro de masa del automóvil está en G. Las ruedas delanteras rotan libremente. Ignore la masa de todas las ruedas.

17-34. Determine la aceleración máxima que puede alcanzar el automóvil sin que las ruedas delanteras A se separen del pavimento o que las ruedas propulsoras traseras B patinen en el pavimento. El coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.9$. El centro de masa del carro está en G y las ruedas delanteras ruedan libremente. Ignore la masa de todas las ruedas.



Probs. 17-33/34

17-35. El auto deportivo tiene una masa de 1.5 Mg y un centro de masa en G. Determine el tiempo más corto que le lleva alcanzar una rapidez de 80 km/h si arranca desde el punto de reposo, si el motor sólo impulsa las ruedas traseras, mientras que las delanteras ruedan libremente. El coeficiente de fricción estática entre las ruedas y la carretera es $\mu_s = 0.2$. Ignore la masa de las ruedas en el cálculo. Si la potencia de propulsión se pudiera suministrar a las cuatro ruedas, ¿cuál sería el tiempo más corto para que el automóvil alcance una velocidad de 80 km/h?

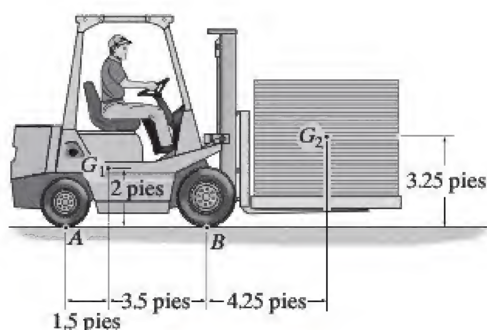


Prob. 17-35

17

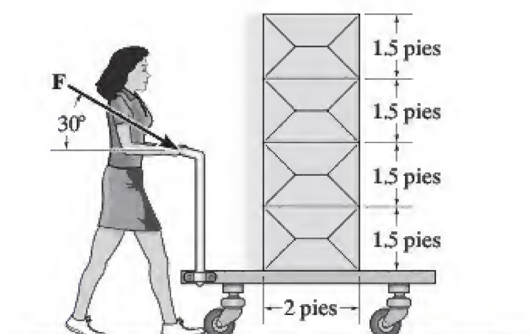
***17-36.** El montacargas avanza a una velocidad constante de 9 pies/s. Determine la distancia de frenado más corta sin que ninguna de las ruedas se levante del suelo. El montacargas pesa 2 000 lb con su centro de gravedad en G_1 y la carga pesa 900 lb con centro de gravedad en G_2. Ignore el peso de las ruedas.

•17-37. Si las ruedas traseras del montacargas generan una fuerza de tracción combinada de $F_A = 300$ lb, determine su aceleración y las reacciones normales en los pares de ruedas traseras y delanteras. El montacargas pesa 2 000 lb, con centro de gravedad en G_1 y la carga pesa 900 lb, con centro de gravedad en G_2. Las ruedas delanteras giran libremente. Ignore el peso de las ruedas.



Probs. 17-36/37

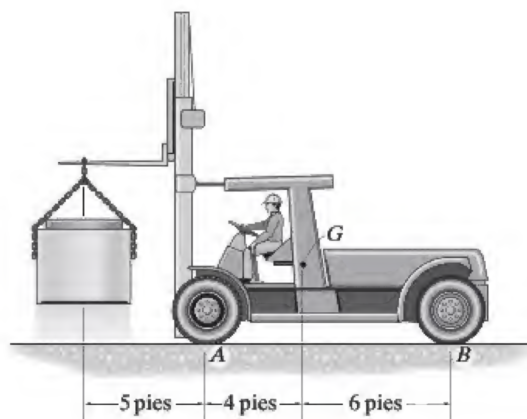
17-38. Cada caja de la pila de cuatro cajas pesa 8 lb. La pila se transporta sobre la plataforma rodante que pesa 30 lb. Determine la fuerza máxima **F** que la mujer ejerce en la manivela de dirección que se muestra, de modo que ninguna caja se voltee o resbale. El coeficiente de fricción estática en todos los puntos de contacto es $\mu_s = 0.5$. Las ruedas de la plataforma rodante ruedan libremente. Ignore su masa.



Prob. 17-38

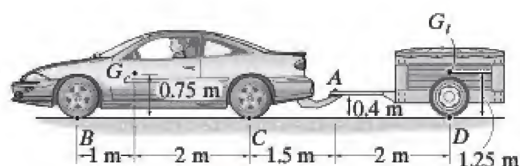
17-39. El montacargas y el operador tienen un peso combinado de 10000 lb y centro de masa en G. Si el montacargas se utiliza para levantar el tubo de concreto de 2 000 lb, determine la aceleración vertical máxima que le puede imprimir al tubo de modo que no se voltee hacia delante sobre sus ruedas delanteras.

***17-40.** El montacargas y el operador tienen un peso combinado de 10 000 lb y centro de masa en G. Si el montacargas se utiliza para levantar el tubo de concreto de 2 000 lb, determine las reacciones normales en cada una de sus cuatro ruedas si al tubo se le imprime una aceleración hacia arriba de 4 pies/s^2.



Probs. 17-39/40

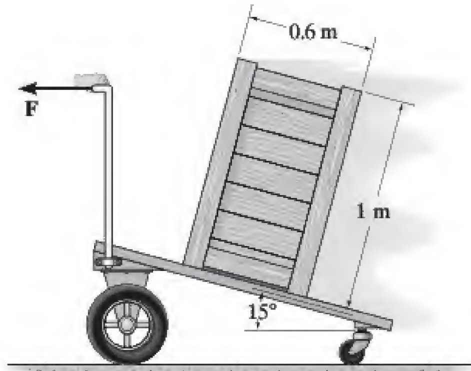
•17-41. El automóvil, cuya masa es de 1.40 Mg y centro de masa en G_c, jala un remolque cargado que tiene una masa de 0.8 Mg y centro de masa en G_t. Determine las reacciones normales tanto en las ruedas delanteras como traseras del automóvil y las ruedas del remolque si el conductor aplica los frenos traseros C del automóvil y hace que el carro patine. Considere $\mu_C = 0.4$ y suponga que el enganche en A es un perno o una articulación esférica o de rótula. Las ruedas B y D giran libremente. Ignore su masa y la masa del conductor.



Prob. 17-41

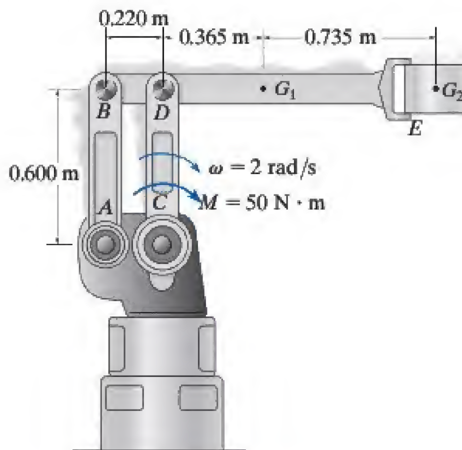
17

17-42. El embalaje tiene una masa de 50 kg y descansa sobre la plataforma inclinada de la carretilla. Determine la aceleración mínima que hará que el embalaje se voltee o se deslice con respecto a la carretilla. ¿Cuál es la magnitud de esta aceleración? El coeficiente de fricción estática entre el embalaje y la carretilla es $\mu_s = 0.5$.



Prob. 17-42

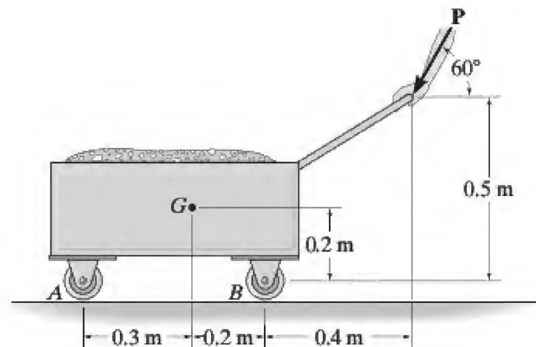
17-43. El brazo BDE del robot industrial se activa con la aplicación del par de torsión $M = 50$ N · m al brazo CD. Determine las reacciones en los pasadores B y D cuando los brazos están en la posición que se muestra y su velocidad angular es de 2 rad/s. El brazo BDE tiene una masa de 10 kg con centro de masa en G_1. El contenedor sujeto por la mordaza E tiene una masa de 12 kg con centro de masa en G_2. Ignore la masa de los brazos AB y CD.



Prob. 17-43

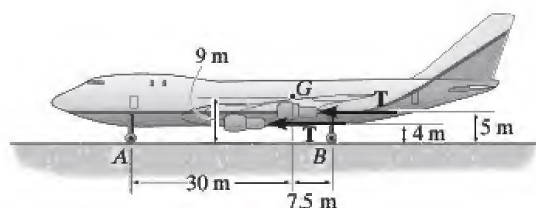
***17-44.** La carretilla de mano tiene una masa de 200 kg y centro de masa en G. Determine las reacciones normales en cada una de las dos ruedas A y B si se aplica una fuerza de $P = 50$ N a la manivela. Ignore la masa de las ruedas.

•**17-45.** La carretilla de mano tiene una masa de 200 kg y centro de masa en G. Determine la magnitud máxima de la fuerza **P** que puede aplicarse a la manivela, de modo que las ruedas A o B continúen en contacto con el suelo. Ignore la masa de las ruedas.



Probs. 17-44/45

17-46. El avión de propulsión a chorro es propulsado por cuatro motores para incrementar su velocidad de modo uniforme a partir del punto de reposo a 100 m/s en una distancia de 500 m. Determine el empuje **T** desarrollado por cada motor y la reacción normal en la rueda de nariz A. La masa total del avión es de 150 Mg y el centro de masa está en el punto G. Ignore la resistencia el aire y al rodamiento, así como el efecto ascensional.

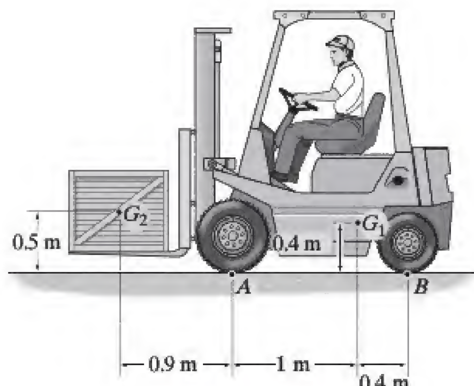


Prob. 17-46

17

17-47. El montacargas de 1 Mg se utiliza para levantar el embalaje de 750 kg con una aceleración constante de 2 m/s^2. Determine la reacción ejercida por el suelo en los pares de ruedas A y B. Los centros de masa del montacargas y embalaje están en G_1 y G_2, respectivamente.

***17-48.** Determine la aceleración máxima con la que el montacargas de 1 Mg puede levantar el embalaje de 750 kg, sin que las ruedas B se levanten del suelo. Los centros de masa del montacargas y el embalaje están en G_1 y G_2, respectivamente.

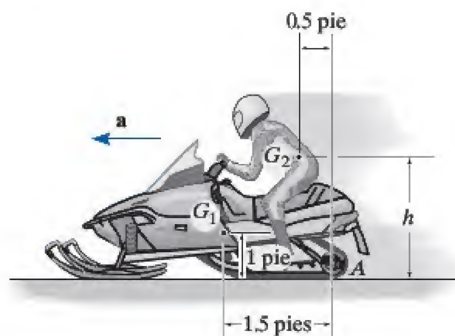


Probs. 17-47/48

17

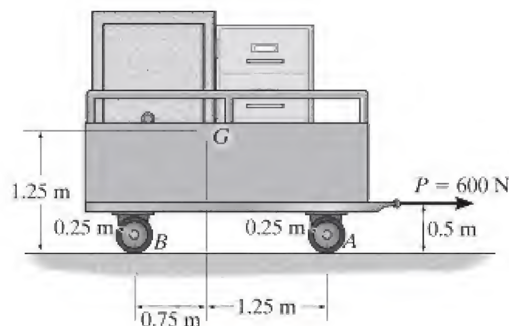
•**17-49.** La motonieve tiene un peso de 250 lb, concentrado en G_1, mientras que el conductor tiene un peso de 150 lb, concentrado en G_2. Si la aceleración es $a = 20$ pies/s^2, determine la altura máxima h del G_2 del conductor de modo que el patín delantero de la motonieve no se levante del suelo. Además, ¿cuáles son la fuerza (horizontal) de tracción y la reacción normal debajo de las orugas en A?

17-50. La motonieve tiene un peso de 250 lb, concentrado en G_1, mientras que el conductor tiene un peso de 150 lb, concentrado en G_2. Si $h = 3$ pies, determine la aceleración máxima permisible **a** de modo que su patín delantero no se levante del suelo. Además, determine la fuerza (horizontal) de tracción y la reacción normal debajo de las orugas traseras en A.



Probs. 17-49/50

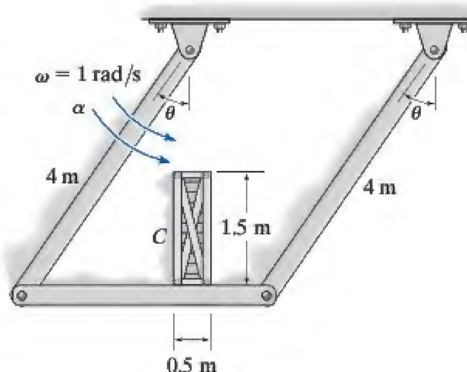
17-51. El remolque con su carga tiene una masa de 150 kg y centro de masa en G. Si se somete a una fuerza horizontal de $P = 600$ N, determine su aceleración y la fuerza normal en los pares de ruedas A y B. Las ruedas rotan libremente y su masa no se toma en cuenta.



Prob. 17-51

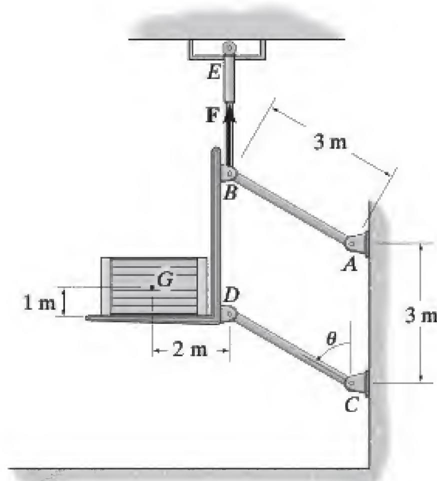
***17-52.** El embalaje de 50 kg descansa sobre la plataforma cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.5$. Si los brazos de soporte tienen una velocidad angular de $\omega = 1$ rad/s, determine la aceleración angular máxima α que pueden tener sin que el embalaje se voltee o resbale en el instante $\theta = 30°$.

•**17-53.** El embalaje de 50 kg descansa sobre la plataforma cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.5$. Si en el instante $\theta = 30°$ los brazos de soporte tienen una velocidad angular $\omega = 1$ rad/s y una aceleración angular $\alpha = 0.5$ rad/s^2, determine la fuerza de fricción en el embalaje.



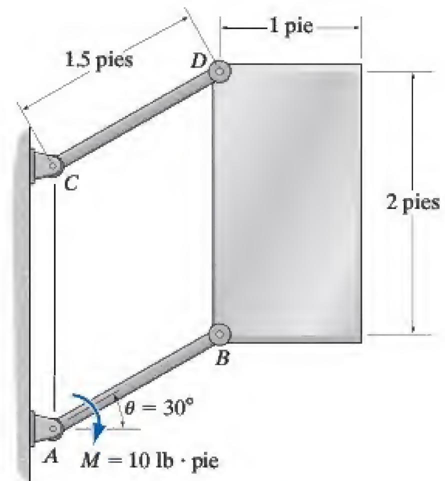
Probs. 17-52/53

17-54. Si el cilindro hidráulico BE ejerce una fuerza vertical $F = 1.5$ kN en la plataforma, determine la fuerza desarrollada en los brazos AB y CD en el instante $\theta = 90°$. La plataforma está en reposo cuando $\theta = 45°$. Ignore la masa de los brazos y la plataforma. El embalaje de 200 kg no se resbala sobre la plataforma.



Prob. 17-54

17-55. Una placa uniforme pesa 50 lb. El brazo AB se somete a un momento de par $M = 10$ lb · pie y tiene una velocidad angular en el sentido de las manecillas del reloj de 2 rad/s cuando $\theta = 30°$. Determine la fuerza desarrollada en el brazo CD y el componente tangencial de la aceleración del centro de masa de la placa en este instante. Ignore la masa de los brazos AB y CD.

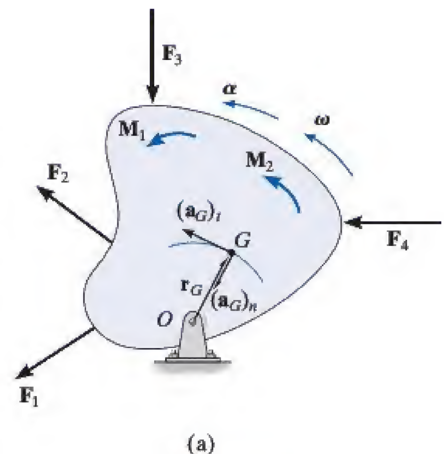


Prob. 17-55

17

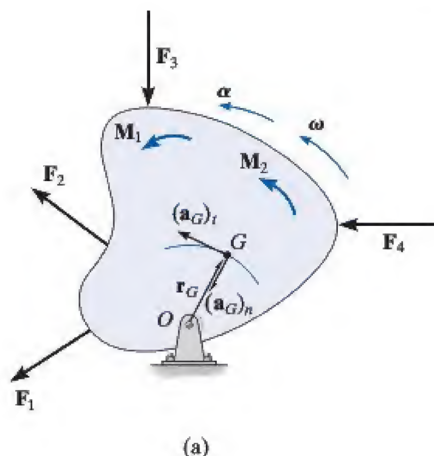
17.4 Ecuaciones de movimiento: rotación alrededor de un eje fijo

Considere el cuerpo rígido (o losa) de la figura 17-14*a*, el cual está limitado a girar en el plano vertical alrededor de un eje fijo perpendicular a la página que atravieza por el pasador en O. El sistema de fuerzas externas y momentos de par que actúa en el cuerpo produce la velocidad y aceleración angulares. Como el centro de masa del cuerpo G describe una *trayectoria circular*, su aceleración se representa mejor por medio de sus componentes tangencial y normal. La *componente tangencial de la aceleración* tiene una *magnitud* de $(a_G)_t = \alpha r_G$ y debe actuar en la *dirección compatible* con la aceleración angular del cuerpo $\boldsymbol{\alpha}$. La *magnitud* de la *componente normal de la aceleración* es $(a_G)_n = \omega^2 r_G$. Esta componente *siempre* está *dirigida* del punto G a O, sin importar el sentido de rotación de $\boldsymbol{\omega}$.



(a)

Fig. 17-14



(a)

Los diagramas de cuerpo libre y cinético del cuerpo se muestran en la figura 17-14*b*. Las dos componentes $m(\mathbf{a}_G)_t$ y $m(\mathbf{a}_G)_n$, que se muestran en el diagrama cinético, están asociadas con las componentes tangencial y normal de la aceleración del centro de masa del cuerpo. El vector $I_G\boldsymbol{\alpha}$ actúa en la misma *dirección* que $\boldsymbol{\alpha}$ y su *magnitud* es $I_G\alpha$, donde I_G es el momento de inercia del cuerpo calculado con respecto a un eje perpendicular a la página y que pasa por G. Según la derivación dada en el sección 17-2, las ecuaciones de movimiento aplicables al cuerpo se escriben en la forma

$$\begin{aligned} \Sigma F_n &= m(a_G)_n = m\omega^2 r_G \\ \Sigma F_t &= m(a_G)_t = m\alpha r_G \\ \Sigma M_G &= I_G\alpha \end{aligned} \qquad (17\text{-}14)$$

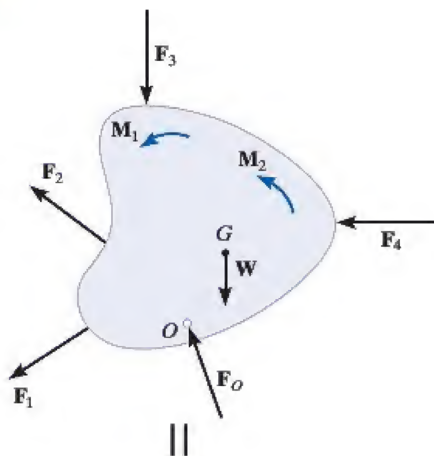
La ecuación de momentos puede ser reemplazada por una suma de momentos con respecto a cualquier punto arbitrario P en o fuera del cuerpo siempre que se tengan en cuenta los momentos $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$ producidos por $I_G\boldsymbol{\alpha}$, $m(\mathbf{a}_G)_t$ y $m(\mathbf{a}_G)_n$ con respecto al punto. Con frecuencia es conveniente sumar los momentos con respecto al pasador en O para eliminar la fuerza *desconocida* $\mathbf{F}_O$. Según el diagrama cinético, figura 17-14*b*, esto requiere

$$\circlearrowleft+\Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O; \qquad \Sigma M_O = r_G m(a_G)_t + I_G\alpha \qquad (17\text{-}15)$$

Observe que el momento de $m(\mathbf{a}_G)_n$ no se incluye aquí puesto que la línea de acción de este vector pasa por O. Si sustituimos $(a_G)_t = r_G\alpha$, podemos volver a escribir la ecuación anterior como $\circlearrowleft+\Sigma M_O = (I_G + mr_G^2)\alpha$. Según el teorema de los ejes paralelos, $I_O = I_G + md^2$, y por consiguiente el término entre paréntesis representa el *momento de inercia del cuerpo con respecto al eje de rotación fijo que pasa por O*.* Por consiguiente, podemos escribir las tres ecuaciones de movimiento para el cuerpo como

$$\begin{aligned} \Sigma F_n &= m(a_G)_n = m\omega^2 r_G \\ \Sigma F_t &= m(a_G)_t = m\alpha r_G \\ \Sigma M_O &= I_O\alpha \end{aligned} \qquad (17\text{-}16)$$

Cuando se utilicen estas ecuaciones recuerde que "$I_O\alpha$" incluye el "momento" *tanto* de $m(\mathbf{a}_G)_t$ *como* de $I_G\boldsymbol{\alpha}$ con respecto al punto O, figura 17-14*b*. Expresado de otra manera, $\Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O = I_O\alpha$, como se indica por medio de las ecuaciones 17-15 y 17-16.



(b)

Fig. 17-14 (cont.)

*El resultado $\Sigma M_O = I_O\alpha$ también puede obtenerse *de forma directa* con la ecuación 17-6 si se seleccionan puntos P que coincidan con O, habida cuenta de que $(a_P)_x = (a_P)_y = 0$.

Procedimiento para el análisis

Los problemas cinéticos que implican la rotación de un cuerpo alrededor de un eje fijo se resuelven con el siguiente procedimiento.

Diagrama de cuerpo libre.

- Establezca el sistema de coordenadas n, t inercial y especifique la dirección y sentido de las aceleraciones $(\mathbf{a}_G)_n$ y $(\mathbf{a}_G)_t$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del cuerpo. Recuerde que $(\mathbf{a}_G)_t$ debe actuar en una dirección que concuerde con el sentido de rotación de $\boldsymbol{\alpha}$, mientras que $(\mathbf{a}_G)_n$ siempre actúa hacia el eje de rotación, punto O.
- Trace el diagrama de cuerpo libre que incluya todas las fuerzas externas y momentos de par que actúan en el cuerpo.
- Determine el momento de inercia I_G o I_O.
- Identifique las incógnitas en el problema.
- Si decide utilizar la ecuación de movimiento $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$, es decir, P es un punto diferente de G u O, entonces considere trazar el diagrama cinético para que le ayude a "visualizar" los "momentos" desarrollados por las componentes $m(\mathbf{a}_G)_n$, $m(\mathbf{a}_G)_t$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$ cuando escriba los términos de la suma de momentos $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$.

Ecuaciones de movimiento.

- Aplique las tres ecuaciones de movimiento de acuerdo con la convención de signos establecida.
- Si se suman los momentos con respecto al centro de masa del cuerpo, G, entonces $\Sigma M_G = I_G\alpha$, puesto que $(m\mathbf{a}_G)_t$ y $(m\mathbf{a}_G)_n$ no crean momentos con respecto a G.
- Si se suman los momentos con respecto al pasador de soporte O sobre el eje de rotación, entonces $(m\mathbf{a}_G)_n$ no crea momento con respecto a O, y puede demostrarse que $\Sigma M_O = I_O\alpha$.

Cinemática.

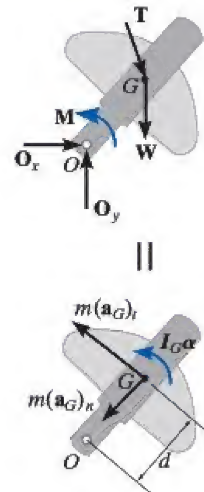
- Use cinemática si no puede obtenerse una solución completa estrictamente con las ecuaciones de movimiento.
- Si la aceleración angular es variable, utilice

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad \alpha\, d\theta = \omega\, d\omega \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

- Si la aceleración angular es constante, utilice

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

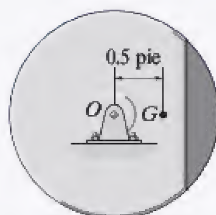




La manivela del equipo de bombeo de petróleo experimenta rotación con respecto a un eje fijo, generada por un par de torsión impulsor **M** del motor. Las cargas que se muestran en el diagrama de cuerpo libre provocan los efectos mostrados en el diagrama cinético. Si se suman los momentos con respecto al centro de masa, G, entonces $\Sigma M_G = I_G\alpha$. Sin embargo, si los momentos se suman con respecto al punto O, como $(a_G)_t = \alpha d$, entonces $\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_G\alpha + m(a_G)_t d + m(a_G)_n(0) = (I_G + md^2)\alpha = I_O\alpha$.

17

EJEMPLO 17.9



(a)

El volante desbalanceado de 50 lb que se muestra en la figura 17-15*a* tiene un radio de giro de $k_G = 0.6$ pie con respecto a un eje que pasa por su centro de masa *G*. Si se pone en movimiento desde el punto de reposo, determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador *O*.

SOLUCIÓN

Diagramas de cuerpo libre y cinético. Como *G* describe una trayectoria circular, la aceleración tendrá componentes tanto tangenciales como normales. Además, como α, la cual es originada por el contrapeso del volante, actúa en sentido horario, la componente tangencial de la aceleración debe actuar hacia abajo. ¿Por qué? Como $\omega = 0$, sólo $m(a_G)_t = m\alpha r_G$ e $I_G\alpha$ aparecen en el diagrama cinemático en la figura 17-15*b*. Aquí, el momento de inercia con respecto a *G* es

$$I_G = mk_G^2 = (50\text{ lb}/32.2\text{ pies/s}^2)(0.6\text{ pie})^2 = 0.559\text{ slug}\cdot\text{pie}^2$$

Las tres incógnitas son O_n, O_t y α.

Ecuaciones de movimiento.

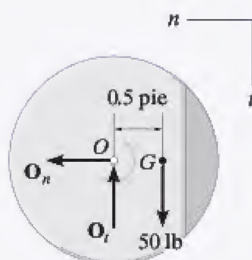
$$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_n = m\omega^2 r_G; \qquad O_n = 0 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

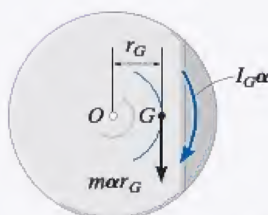
$$+\downarrow \Sigma F_t = m\alpha r_G; \quad -O_t + 50\text{ lb} = \left(\frac{50\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}\right)(\alpha)(0.5\text{ pie}) \qquad (1)$$

$$\circlearrowright + \Sigma M_G = I_G\alpha; \qquad O_t(0.5\text{ pie}) = (0.5590\text{ slug}\cdot\text{pie}^2)\alpha$$

Resolvemos,

$$\alpha = 26.4\text{ rad/s}^2 \qquad O_t = 29.5\text{ lb} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$





(b)

Fig. 17-15

Los momentos también pueden sumarse con respecto al punto *O* para eliminar $\mathbf{O}_n$ y $\mathbf{O}_t$ y obtener así una *solución directa* para $\boldsymbol{\alpha}$, figura 17-15*b*. Esto puede hacerse en una de *dos* maneras.

$$\circlearrowright + \Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O;$$

$$(50\text{ lb})(0.5\text{ pie}) = (0.5590\text{ slug}\cdot\text{pie}^2)\alpha + \left[\left(\frac{50\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}\right)\alpha(0.5\text{ pie})\right](0.5\text{ pie})$$

$$50\text{ lb}(0.5\text{ pie}) = 0.9472\alpha \qquad (2)$$

Si se aplica $\Sigma M_O = I_O\alpha$, entonces de acuerdo con el teorema de los ejes paralelos el momento de inercia del volante con respecto a *O* es

$$I_O = I_G + mr_G^2 = 0.559 + \left(\frac{50}{32.2}\right)(0.5)^2 = 0.9472\text{ slug}\cdot\text{pie}^2$$

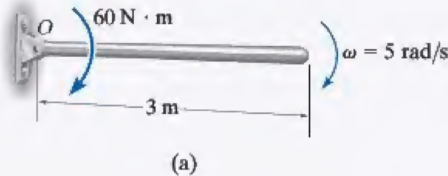
Por consiguiente,

$$\circlearrowright + \Sigma M_O = I_O\alpha; \quad (50\text{ lb})(0.5\text{ pie}) = (0.9472\text{ slug}\cdot\text{pie}^2)\alpha$$

la cual es la misma que la ecuación 2. Al resolver α y sustituir en la ecuación 1, se obtiene la respuesta para O_t previamente obtenida.

EJEMPLO 17.10

En el instante que se muestra en la figura 17-16*a*, la barra de 20 kg tiene una velocidad angular de $\omega = 5$ rad/s. Determine la aceleración angular y los componentes horizontal y vertical de la reacción del pasador en la barra en este instante.



(a)

SOLUCIÓN

Diagramas de cuerpo libre y cinético. Figura 17-16*b*. Como se muestra en el diagrama cinético, el punto G describe una trayectoria circular y por tanto tiene dos componentes de aceleración. Es importante que la componente tangencial $a_t = \alpha r_G$ actúe hacia abajo puesto que debe concordar con el sentido de rotación de $\boldsymbol{\alpha}$. Las tres incógnitas son O_n, O_t y α.

Ecuación de movimiento.

$$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_n = m\omega^2 r_G; \qquad O_n = (20\text{ kg})(5\text{ rad/s})^2(1.5\text{ m})$$

$$+\downarrow \Sigma F_t = m\alpha r_G; \qquad -O_t + 20(9.81)\text{N} = (20\text{ kg})(\alpha)(1.5\text{ m})$$

$$\circlearrowright + \Sigma M_G = I_G\alpha; \qquad O_t(1.5\text{ m}) + 60\text{ N}\cdot\text{m} = \left[\tfrac{1}{12}(20\text{ kg})(3\text{ m})^2\right]\alpha$$

Al resolver

$$O_n = 750\text{ N} \qquad O_t = 19.05\text{ N} \qquad \alpha = 5.90\text{ rad/s}^2 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Una solución más directa de este problema sería sumar los momentos con respecto al punto O para eliminar $\mathbf{O}_n$ y $\mathbf{O}_t$ y obtener una *solución directa* para α. Por tanto,

$$\circlearrowright + \Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O; \quad 60\text{ N}\cdot\text{m} + 20(9.81)\text{ N}(1.5\text{ m}) =$$

$$\left[\tfrac{1}{12}(20\text{ kg})(3\text{ m})^2\right]\alpha + [20\text{ kg}(\alpha)(1.5\text{ m})](1.5\text{ m})$$

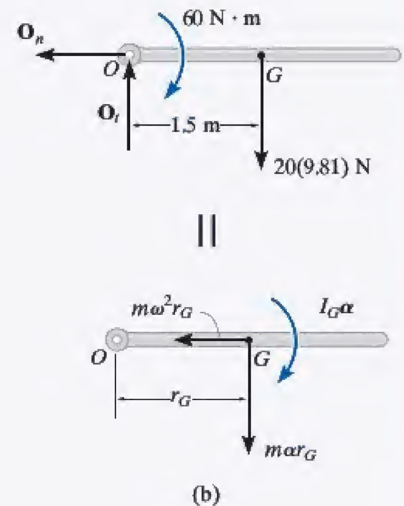
$$\alpha = 5.90\text{ rad/s}^2 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Además, como $I_O = \frac{1}{3}ml^2$ para una barra esbelta, podemos aplicar

$$\circlearrowright + \Sigma M_O = I_O\alpha; \; 60\text{ N}\cdot\text{m} + 20(9.81)\text{ N}(1.5\text{ m}) = \left[\tfrac{1}{3}(20\text{ kg})(3\text{ m})^2\right]\alpha$$

$$\alpha = 5.90\text{ rad/s}^2 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

NOTA: por comparación, la última ecuación da la solución más simple para α y *no* requiere utilizar el diagrama cinético.

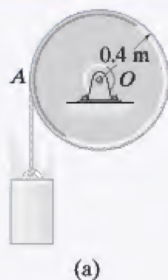


(b)

Fig. 17-16

17

EJEMPLO 17.11



(a)

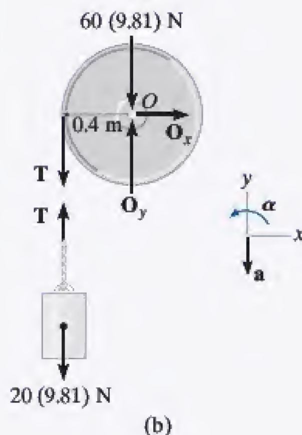
El tambor que se muestra en la figura 17-17*a* tiene una masa de 60 kg y un radio de giro $k_O = 0.25$ m. Una cuerda cuya masa no se toma en cuenta, se enrolla alrededor de la periferia del tambor y está sujeta a un bloque de 20 kg de masa. Si éste se suelta desde el punto de reposo, determine la aceleración angular del tambor.

SOLUCIÓN I

Diagrama de cuerpo libre. Consideraremos el tambor y el bloque por separado, figura 17-17*b*. Supongamos que el bloque se acelera *hacia abajo* a **a**, crea una aceleración angular en *sentido contrario al de las manecillas del reloj* $\boldsymbol{\alpha}$ del tambor. El momento de inercia de éste es

$$I_O = mk_O^2 = (60\text{ kg})(0.25\text{ m})^2 = 3.75\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Hay tres incógnitas, es decir, O_x, O_y, T, a y α.



(b)

Ecuaciones de movimiento. La aplicación de las ecuaciones de movimiento de traslación $\Sigma F_x = m(a_G)_x$ y $\Sigma F_y = m(a_G)_y$ al tambor no afecta la solución, puesto que estas ecuaciones implican las incógnitas O_x y O_y. Por tanto, para el tambor y el bloque, respectivamente,

$$\circlearrowleft +\Sigma M_O = I_O\alpha; \qquad T(0.4\text{ m}) = (3.75\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\alpha \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \quad -20(9.81)\text{N} + T = -(20\text{ kg})a \qquad (2)$$

Cinemática. Como el punto de contacto A entre la cuerda y el tambor tiene un componente tangencial de aceleración **a**, figura 17-17*a*, entonces

$$\circlearrowleft +a = \alpha r; \qquad a = \alpha(0.4\text{ m}) \qquad (3)$$

Al resolver las ecuaciones anteriores

$$T = 106\text{ N} \quad a = 4.52\text{ m/s}^2$$

$$\alpha = 11.3\text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

SOLUCIÓN II

Diagramas de cuerpo libre y cinético. La tensión T en el cable puede eliminarse del análisis si se consideran el tambor y el bloque como un *solo sistema*, figura 17-17*c*. Se muestra el diagrama cinético puesto que los momentos se sumarán con respecto al punto O.

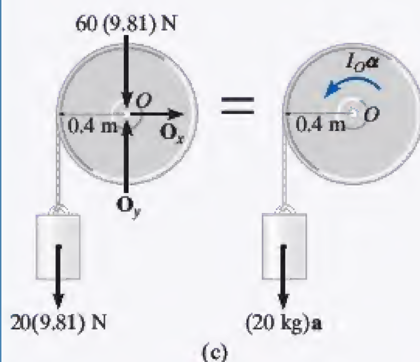
Ecuaciones de movimiento. Si utilizamos la ecuación 3 y aplicamos la ecuación de momentos con respecto O para eliminar las incógnitas O_x y O_y, tenemos

$$\circlearrowleft +\Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O; \quad [20(9.81)\text{N}]\,(0.4\text{ m}) =$$

$$(3.75\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\alpha + [20\text{ kg}(\alpha\, 0.4\text{ m})](0.4\text{ m})$$

$$\alpha = 11.3\text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: si se *quitara* el bloque y se aplicara una fuerza de 20(9.81) N a la cuerda, demuestre que $\alpha = 20.9\text{ rad/s}^2$. Este valor es grande porque el bloque tiene una inercia, o resistencia a la aceleración.

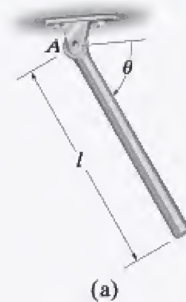


(c)

Fig. 17-17

EJEMPLO 17.12

La barra esbelta de la figura 17-18*a* tiene una masa m y una longitud l y se suelta del punto de reposo cuando $\theta = 0°$. Determine los componentes horizontal y vertical de la fuerza que el pasador A ejerce en la barra cuando $\theta = 90°$.



(a)

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre de la barra en la posición general θ se muestra en la figura 17-18*b*. Por conveniencia, los componentes de la fuerza en A se muestran al actuar en las direcciones n y t. Observe que $\boldsymbol{\alpha}$ actúa en el sentido de las manecillas del reloj y por tanto $(\mathbf{a}_G)_t$ actúa en la dirección $+t$.

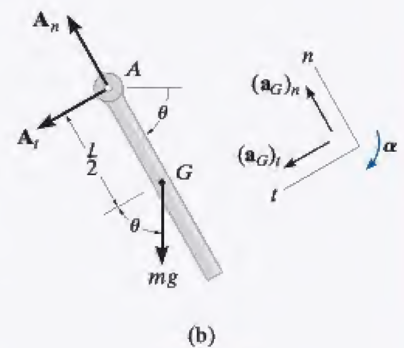
El momento de inercia de la barra con respecto al punto A es $I_A = \frac{1}{3}ml^2$.

Ecuaciones de movimiento. Los momentos se sumarán con respecto a A para eliminar A_n y A_t.

$$+\nwarrow \Sigma F_n = m\omega^2 r_G; \qquad A_n - mg \operatorname{sen} \theta = m\omega^2(l/2) \tag{1}$$

$$+\swarrow \Sigma F_t = m\alpha r_G; \qquad A_t + mg \cos \theta = m\alpha(l/2) \tag{2}$$

$$\circlearrowright + \Sigma M_A = I_A\alpha; \qquad mg \cos \theta (l/2) = \left(\tfrac{1}{3}ml^2\right)\alpha \tag{3}$$



(b)

Fig. 17-18

Cinemática. Para un ángulo dado θ existen cuatro incógnitas en las tres ecuaciones anteriores: A_n, A_t, ω y α. Como se muestra en la ecuación 3, α *no* es *constante*; antes bien, depende de la posición θ de la barra. La cuarta ecuación necesaria se obtiene por cinemática, donde α y ω pueden relacionarse con θ por medio de la ecuación

$$(\circlearrowright +) \qquad \omega\, d\omega = \alpha\, d\theta \tag{4}$$

Observe que la dirección positiva en sentido de las manecillas del reloj en esta ecuación *concuerda* con la de la ecuación 3. Esto es importante puesto que estamos buscando una solución simultánea.

Para determinar ω cuando $\theta = 90°$, elimine α de las ecuaciones 3 y 4, para obtener

$$\omega\, d\omega = (1.5g/l) \cos \theta\, d\theta$$

Como $\omega = 0$ cuando $\theta = 0°$, tenemos

$$\int_0^{\omega} \omega\, d\omega = (1.5g/l) \int_{0°}^{90°} \cos \theta\, d\theta$$

$$\omega^2 = 3g/l$$

Sustituir este valor en la ecuación 1 con $\theta = 90°$ y resolver las ecuaciones 1 a 3 da por resultado

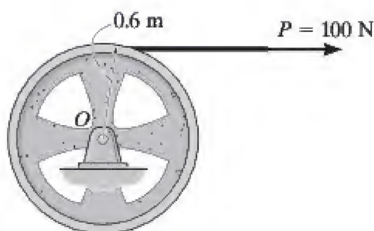
$$\alpha = 0$$

$$A_t = 0 \quad A_n = 2.5mg \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

NOTA: si se utiliza $\Sigma M_A = \Sigma(\mathcal{M}_k)_A$, hay que tener en cuenta los momentos de $I_G\boldsymbol{\alpha}$ y $m(\mathbf{a}_G)_t$ con respecto a A.

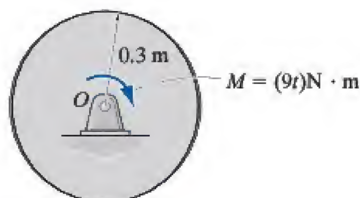
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F17-7. La rueda de 100 kg tiene un radio de giro alrededor de su centro O de $k_O = 500$ mm. Si comienza a rodar desde el punto de reposo, determine su velocidad angular en $t = 3$ s.



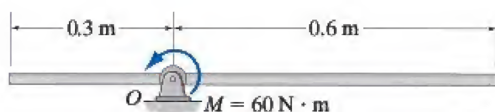
F17-7

F17-8. El disco de 50 kg se somete a un momento de par de $M = (9t)$ N · m, donde t está en segundos. Determine la velocidad angular del disco cuando $t = 4$ s a partir del punto de reposo.



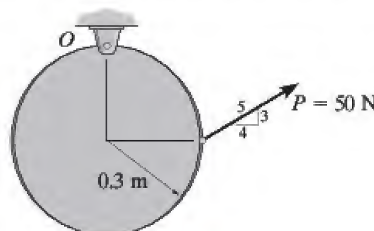
F17-8

F17-9. En el instante que se muestra, la barra esbelta uniforme de 30 kg tiene una velocidad angular en sentido contrario al de las manecillas del reloj de $\omega = 6$ rad/s. Determine los componentes tangencial y normal de la reacción del perno O en la barra y la aceleración angular de ésta en este instante.



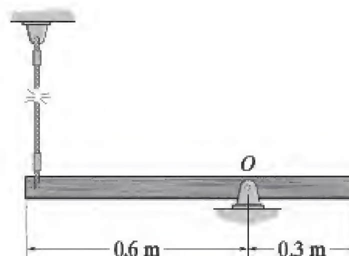
F17-9

F17-10. En el instante que se muestra, el disco de 30 kg tiene una velocidad angular en sentido contrario al de las manecillas del reloj de $\omega = 10$ rad/s. Determine las componentes tangencial y normal de la reacción del perno O en el disco y la aceleración angular del disco en este instante.



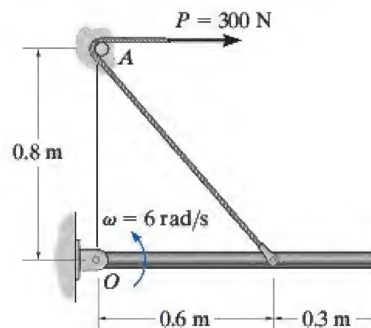
F17-10

F17-11. La barra esbelta uniforme tiene una masa de 15 kg. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el perno O y la aceleración angular de la barra justo después de que se corta la cuerda.



F17-11

F17-12. A la barra esbelta uniforme de 30 kg la jala la cuerda que pasa sobre la pequeña clavija lisa A. Si la barra tiene una velocidad angular de $\omega = 6$ rad/s en el instante que se muestra, determine los componentes tangencial y normal de la reacción en el perno O y la aceleración angular de la barra.

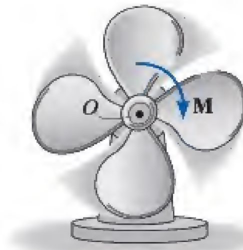


F17-12

17

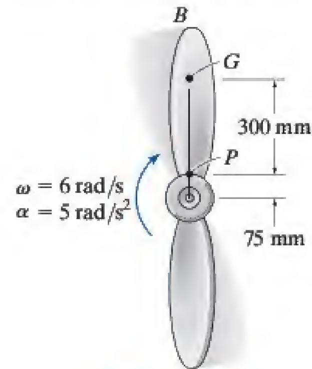
PROBLEMAS

***17-56.** Las cuatro aspas del ventilador tienen una masa total de 2 kg y un momento de inercia $I_O = 0.18$ kg · m^2 con respecto a un eje que pasa por el centro O del ventilador. Si éste se somete a un momento $M = 3(1 - e^{-0.2t})$N · m, donde t está en segundos, determine su velocidad angular cuando $t = 4$ s, a partir del punto de reposo.



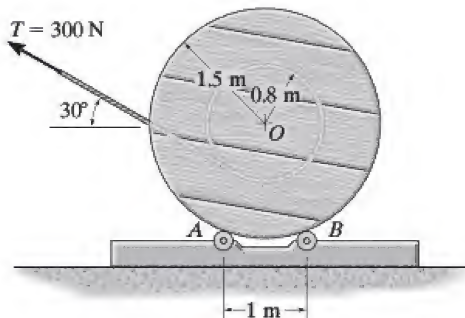
Prob. 17-56

17-58. El aspa única PB del ventilador tiene una masa de 2 kg y un momento de inercia $I_G = 0.18$ kg · m^2, con respecto a un eje que pasa por su centro de masa G. Si el aspa se somete a una aceleración angular $\alpha = 5$ rad/s^2 tiene una velocidad angular $\omega = 6$ rad/s cuando está en la posición vertical mostrada, determine la fuerza normal interna N, la fuerza cortante V y el momento de flexión M, que la maza ejerce en el punto P del aspa.



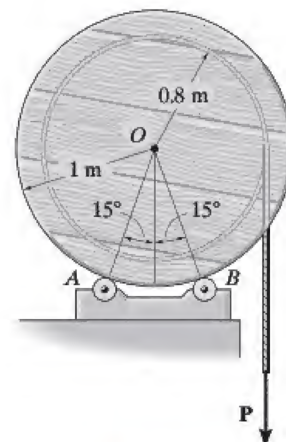
Prob. 17-58

•17-57. El cable se desenrolla de un carrete apoyado sobre los rodillos A y B y ejerce una fuerza $T = 300$ N en el cable en la dirección que se muestra. Calcule el tiempo requerido para desenrollar 5 m de cable del carrete si éste y aquél combinados tienen una masa total de 600 kg y un radio de giro centroidal de $k_O = 1.2$ m. En el cálculo, ignore la masa del cable que se está desenrollando y la masa de los rodillos A y B. Los rodillos giran sin fricción.



Prob. 17-57

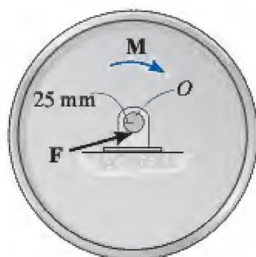
17-59. El carrete uniforme está apoyado sobre los rodillos A y B. Determine la fuerza constante **P** que debe aplicarse al cable para desenrollar 8 m de cable en 4 s, a partir del punto de reposo. Además, calcule las fuerzas normales en los puntos A y B del carrete durante este tiempo. El carrete tiene una masa de 60 kg y un radio de giro con respecto a O de $k_O = 0.65$ m. En el cálculo ignore la masa del cable y la masa de los rodillos A y B.



Prob. 17-59

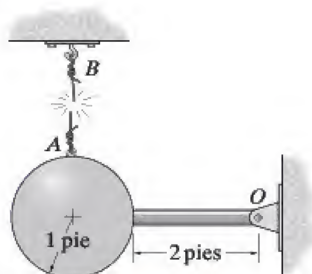
***17-60.** Un motor suministra una par de torsión constante $M = 2$ N · m a una flecha O de 50 mm de diámetro conectada al centro del volante de 30 kg. La fuerza de fricción **F** resultante que el cojinete ejerce en la flecha actúa tangente a ésta y su magnitud es de 50 N. Determine cuánto tiempo debe aplicar el par de torsión a la flecha para que incremente la velocidad angular del volante de 4 rad/s a 15 rad/s. El volante tiene un radio de giro $k_O = 0.15$ m con respecto a su centro O.

•17-61. Si el motor del problema 17-60 se desconecta de la flecha una vez que el volante gire a 15 rad/s, de modo que $M = 0$, determine cuánto tiempo transcurrirá antes de que la fuerza de fricción resultante en el cojinete $F = 50$ N detenga el volante.



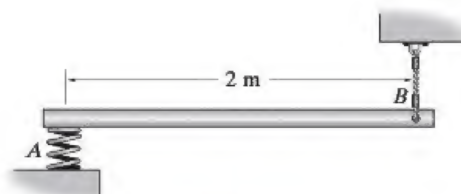
Probs. 17-60/61

17-62. El péndulo se compone de una esfera de 30 lb y una barra esbelta de 10 lb. Calcule la reacción en el pasador O justo después de que se corta la cuerda AB.



Prob. 17-62

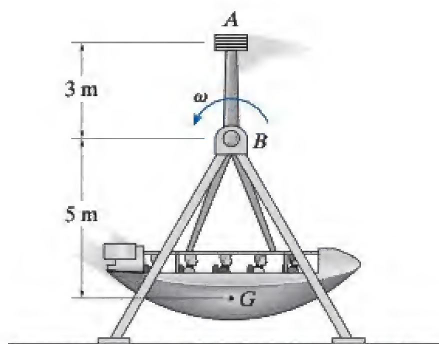
17-63. La barra esbelta de 4 kg está soportada horizontalmente por un resorte en A y una cuerda en B. Determine su aceleración angular y la aceleración de su centro de masa en el momento en que se corta la cuerda en B. *Sugerencia:* en el cálculo no se requiere la rigidez del resorte.



Prob. 17-63

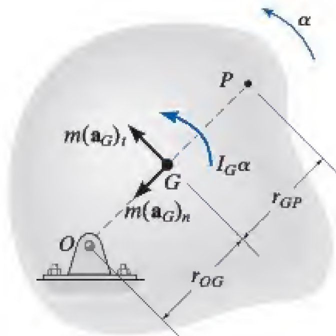
***17-64.** Los pasajeros, la góndola y su armazón oscilante tienen una masa total de 50 Mg, un centro de masa en G y un radio de giro $k_B = 3.5$. Adicionalmente, el bloque de acero A de 3 Mg puede considerarse como un punto de masa concentrada. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador B si la góndola oscila libremente a $\omega = 1$ rad/s cuando alcanza su punto más bajo como se muestra. Además, ¿Cuál es la aceleración angular de la góndola en este instante?

•17-65. Los pasajeros, la góndola y su armazón oscilante tienen una masa total de 50 Mg, un centro de masa en G y un radio de giro $k_B = 3.5$ m. Adicionalmente, el bloque de acero A de 3 Mg puede considerarse como un punto de masa concentrada. Determine el ángulo θ al cual oscilará la góndola antes de que se detenga momentáneamente, si su velocidad angular es $\omega = 1$ rad/s en su punto más bajo.



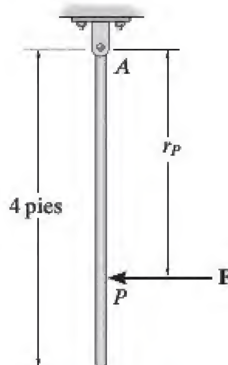
Probs. 17-64/65

17-66. El diagrama cinético que representa el movimiento de rotación general de un cuerpo rígido con respecto a un eje fijo que pasa por O se muestra en la figura. Demuestre que $I_G\boldsymbol{\alpha}$ puede eliminarse al mover los vectores $m(\mathbf{a}_G)_t$ y $m(\mathbf{a}_G)_n$ hacia el punto P, localizado a una distancia $r_{GP} = k_G^2/r_{OG}$ del centro de masa G del cuerpo. Aquí k_G representa el radio de giro del cuerpo con respecto a un eje que pasa por G. El punto P se llama *centro de percusión* del cuerpo.



Prob. 17-66

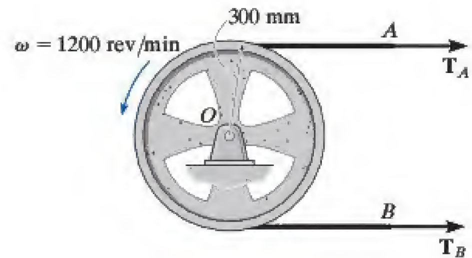
17-67. Determine la posición r_P del centro de percusión P de la barra esbelta de 10 lb (vea el problema 17-66). ¿Cuál es la componente horizontal de la fuerza que el pasador A ejerce en la barra cuando es golpeada en P con una fuerza $F = 20$ lb?



Prob. 17-67

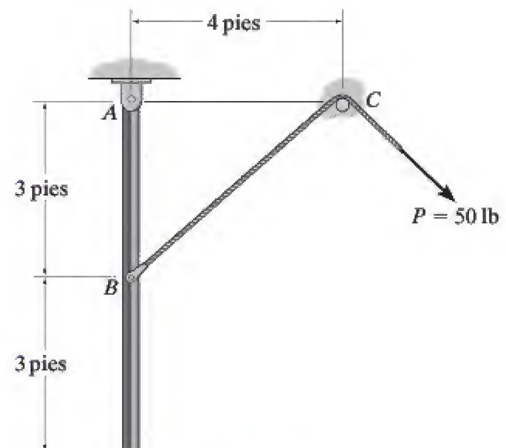
***17-68.** La rueda de 150 kg tiene un radio de giro con respecto a su centro de masa O de $k_O = 250$ mm. Si gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj a una velocidad angular de $\omega = 1200$ rev/min en el instante en que se aplican las fuerzas de tensión $T_A = 2000$ N y $T_B = 1000$ N a la banda de frenado en A y B, determine el tiempo requerido para detener la rueda.

•17-69. La rueda de 150 kg tiene un radio de giro con respecto a su centro de masa O de $k_O = 250$ mm. Si gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj a una velocidad angular de $\omega = 1200$ rev/min y la fuerza de tensión aplicada a la banda de frenado en A es $T_A = 2000$ N, determine la fuerza de tensión $\mathbf{T}_B$ en el punto B de la banda, de modo que la rueda se detenga en 50 revoluciones después de que se aplican $\mathbf{T}_A$ y $\mathbf{T}_B$.



Probs. 17-68/69

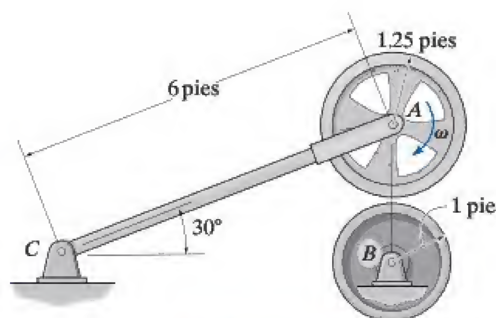
17-70. La barra uniforme de 100 lb está en reposo en una posición vertical cuando la cuerda sujeta a ella en B se somete a una fuerza de $P = 50$ lb. Determine la aceleración angular inicial de la barra y la magnitud de la fuerza relativa que el pasador A ejerce en la barra. Ignore el tamaño de la clavija lisa C.



Prob. 17-70

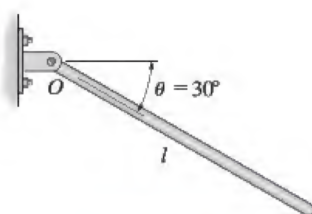
17-71. Las ruedas A y B pesan 150 lb y 100 lb, respectivamente. En principio, la rueda A gira en el sentido de las manecillas del reloj, a una velocidad angular constante de $\omega = 100$ rad/s y la rueda B está en reposo. Si A se pone en contacto con B, determine el tiempo requerido para que ambas ruedas alcancen la misma velocidad angular. El coeficiente de fricción cinética entre las dos ruedas es $\mu_k = 0.3$ y los radios de giro de A y B con respecto a sus respectivos centros de masa son $k_A = 1$ pie y $k_B = 0.75$ pie. Ignore el peso del brazo AC.

***17-72.** Inicialmente, la rueda A gira en el sentido de las manecillas del reloj a una velocidad angular constante de $\omega = 100$ rad/s. Si A se pone en contacto con B, la cual se mantiene fija, determine el número de revoluciones antes de que la rueda A se detenga. El coeficiente de fricción cinética entre las dos ruedas es $\mu_k = 0.3$ y el radio de giro de A con respecto a su centro de masa es $k_A = 1$ pie. Ignore el peso del brazo AC.



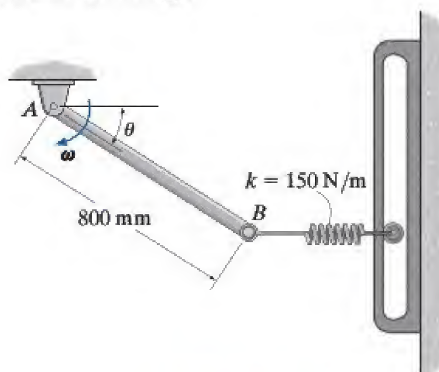
Probs. 17-71/72

•**17-73.** La barra tiene una masa m y una longitud l. Si se suelta desde el punto de reposo de la posición $\theta = 30°$, determine su aceleración angular y las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador O.



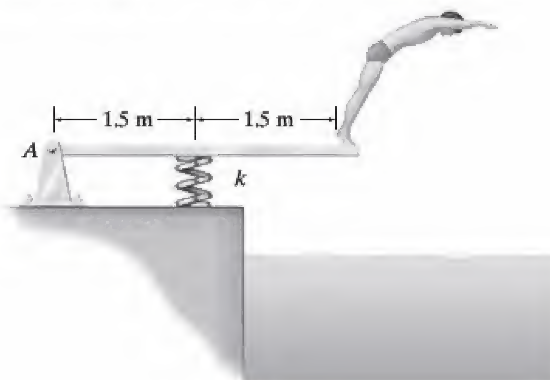
Prob. 17-73

17-74. La barra esbelta uniforme tiene una masa de 9 kg. Si el resorte no está estirado cuando $\theta = 0°$, determine la magnitud de la fuerza de reacción ejercida en la barra por el pasador A cuando $\theta = 45°$, si en este instante $\omega = 6$ rad/s. La rigidez del resorte es $k = 150$ N/m y siempre permanece en posición horizontal.



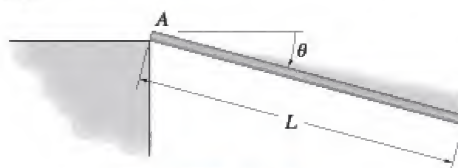
Prob. 17-74

17-75. Determine la aceleración angular del trampolín de 25 kg y las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador A en el momento en que el clavadista salta. Suponga que el trampolín es uniforme y rígido y que cuando el clavadista salta, el resorte se comprime una cantidad máxima de 200 mm, $\omega = 0$, y el trampolín está horizontal. Considere $k = 7$ kN/m.



Prob. 17-75

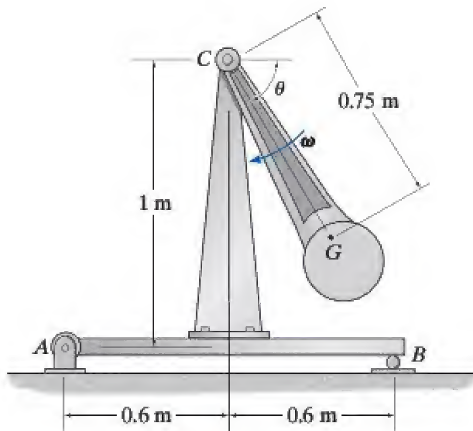
***17-76.** La barra esbelta de longitud L y masa m se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 0°$. Determine en función de θ las fuerzas normal y de fricción ejercidas por el borde en A a medida que cae. ¿A qué ángulo θ comienza a deslizarse la barra si el coeficiente de fricción estática en A es μ?



Prob. 17-76

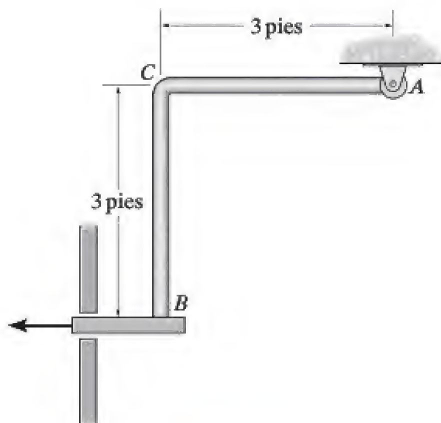
•**17-77.** El péndulo de 100 kg tiene un centro de masa en G y un radio de giro con respecto a G de $k_G = 250$ mm. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción producida por el pasador A en la viga y la reacción normal del rodillo B cuando $\theta = 90°$ cuando el péndulo gira a $\omega = 8$ rad/s. Ignore el peso de la viga y el soporte.

17-78. El péndulo de 100 kg tiene un centro de masa en G y un radio de giro con respecto a G de $k_G = 250$ mm. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción producida por el pasador A en la viga y la reacción normal del rodillo B cuando $\theta = 0°$ cuando el péndulo gira a $\omega = 4$ rad/s. Ignore el peso de la viga y el soporte.



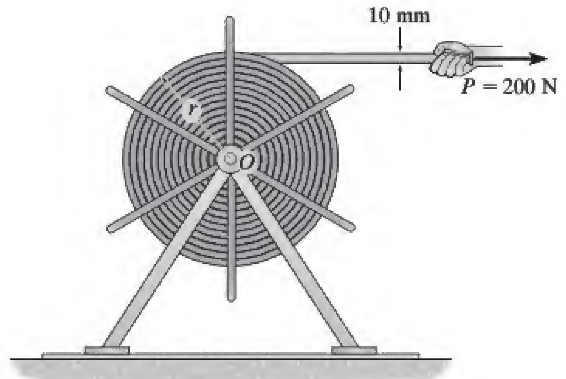
Probs. 17-77/78

17-79. Si el soporte B se retira de repente, determine los componentes horizontal y vertical de la reacción que el pasador A ejerce en la barra ACB. Los segmentos AC y CB pesan 10 lb cada uno.



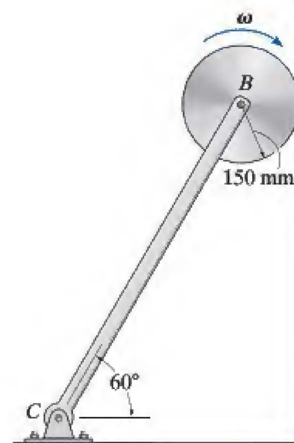
Prob. 17-79

***17-80.** La manguera está enrollada en espiral en el carrete y es jalada de éste por una fuerza horizontal de $P = 200$ N. Determine la aceleración angular del carrete después de que ha realizado 2 revoluciones. En principio, el radio es $r = 500$ mm. La manguera tiene 15 m de largo y su masa por unidad de longitud es de 10 kg/m. Trate la manguera totalmente enrollada como un disco.



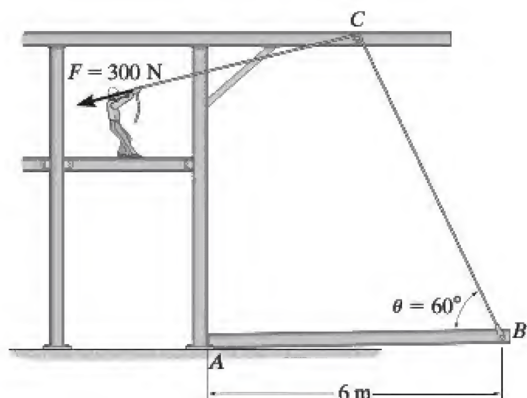
Prob. 17-80

•**17-81.** La masa del disco es de 20 kg y en principio gira en el extremo del puntal a una velocidad angular de $\omega = 60$ rad/s. Si luego se coloca contra la pared, donde el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.3$, determine el tiempo requerido para que se detenga el movimiento. ¿Cuál es la fuerza en el puntal BC durante este tiempo?



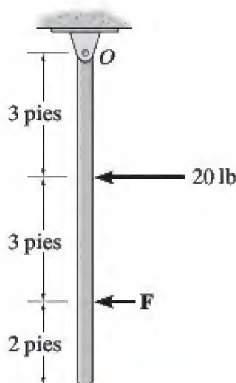
Prob. 17-81

17-82. La viga uniforme de 50 kg (barra esbelta) descansa en el suelo cuando el hombre ejerce una fuerza de $F = 300$ N en la cuerda, la cual pasa sobre una clavija lisa en C. Determine la aceleración angular inicial de la viga. Además, determine las reacciones horizontal y vertical en el extremo A de la viga (considerado como pasador) en este instante.



Prob. 17-82

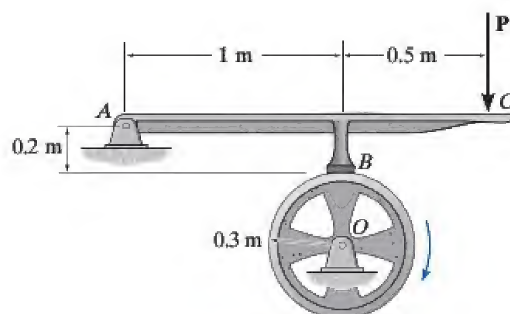
17-83. En el instante que se muestra, dos fuerzas actúan en la barra de 30 lb la cual está sujeta por medio de un pasador en O. Determine la magnitud de la fuerza **F** y la aceleración angular inicial de la barra, de modo que la reacción horizontal que el *pasador ejerce en la barra* sea de 5 lb dirigida hacia la derecha.



Prob. 17-83

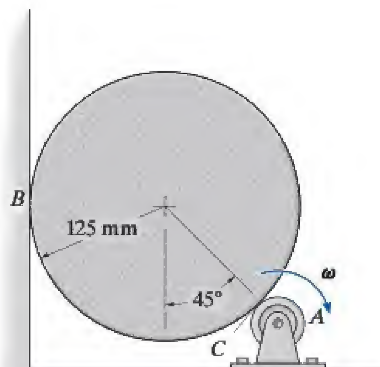
***17-84.** El volante de 50 kg tiene un radio de giro con respecto a su centro de masa de $k_O = 250$ mm. Gira a una velocidad angular constante de 1200 rev/min antes de aplicar el freno. Si el coeficiente de fricción cinética entre la balata B y el borde de la rueda es $\mu_k = 0.5$ y se aplica una fuerza $P = 300$ N a la manivela del mecanismo de frenado, determine el tiempo requerido para detener la rueda.

•17-85. El volante de 50 kg tiene un radio de giro con respecto a su centro de masa de $k_O = 250$ mm. Gira a una velocidad angular constante de 1200 rev/min antes de aplicar el freno. Si el coeficiente de fricción cinética entre la balata B y el borde de la rueda es $\mu_k = 0.5$, determine la fuerza constante **P** que debe aplicarse a la manivela del mecanismo de frenado para detener la rueda en 100 revoluciones.



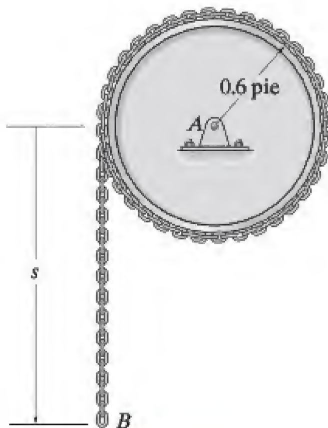
Probs. 17-84/85

17-86. En principio, el cilindro de 5 kg está en reposo cuando se le coloca en contacto con la pared B y el rotor A. Si el rotor mantiene siempre una velocidad angular constante en el sentido de las manecillas del reloj de $\omega = 6$ rad/s, determine la aceleración angular inicial del cilindro. El coeficiente de fricción cinética en las superficies de contacto B y C es $\mu_k = 0.2$.



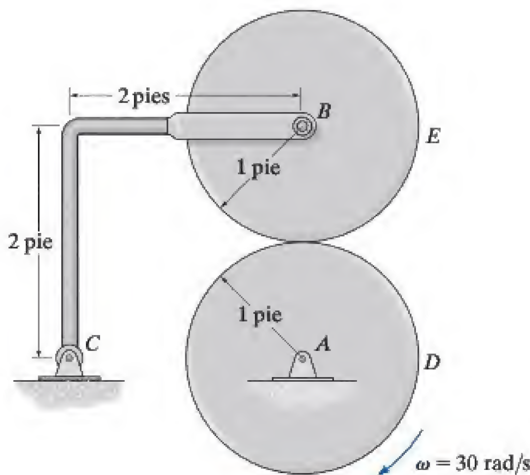
Prob. 17-86

17-87. El tambor pesa 50 lb y su radio de giro es $k_A = 0.4$ pie. Una cadena de 35 pies de largo de 2 lb/pie se enrolla alrededor de la superficie externa del tambor de modo que un tramo de la cadena de $s = 3$ pies cuelga como se muestra. Si el tambor originalmente está en reposo, determine la velocidad angular después de que el extremo B ha descendido $s = 13$ pies. Ignore el espesor de la cadena.



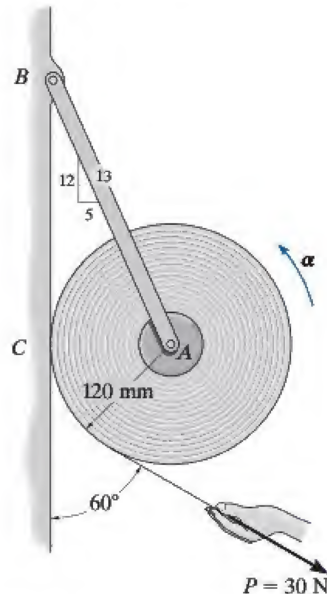
Prob. 17-87

*17-88. El disco D gira a una velocidad angular constante en el sentido de las manecillas del reloj de 30 rad/s. El disco E pesa 60 lb e inicialmente está en reposo cuando se pone en contacto con D. Determine el tiempo requerido para que el disco E alcance la misma velocidad angular que el disco D. El coeficiente de fricción cinética entre los dos discos es $\mu_k = 0.3$. Ignore el peso de la barra BC.



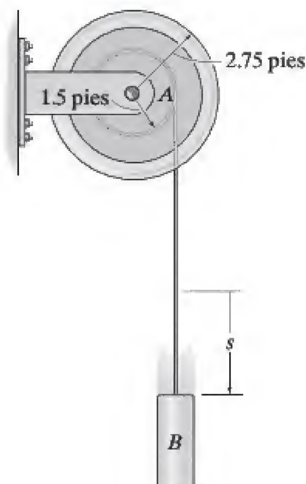
Prob. 17-88

•17-89. Un rollo de papel de 17 kg, originalmente en reposo, está soportado por la ménsula AB. Si el rollo está apoyado en la pared donde el coeficiente de fricción cinética es $\mu_C = 0.3$ y se aplica una fuerza constante de 30 N al extremo de la hoja, determine la tensión en la ménsula a medida que se desenrolla el papel, y la aceleración angular del rollo. En el cálculo, trate el rollo como un cilindro.

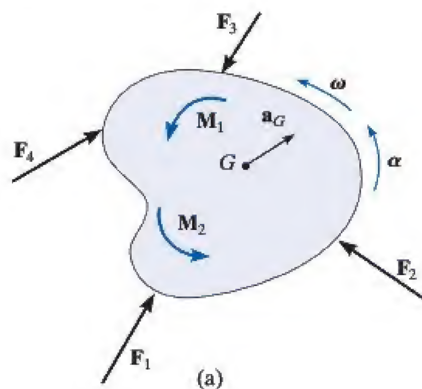


Prob. 17-89

17-90. La cuerda se enrolla alrededor del núcleo interno del carrete. Si se cuelga un bloque B de 5 lb de la cuerda y se suelta del punto de reposo, determine la velocidad angular del carrete cuando $t = 3$ s. Ignore la masa de la cuerda. El carrete pesa 180 lb y el radio de giro con respecto al eje A es $k_A = 1.25$ pies. Resuelva el problema de dos maneras, primero considere el "sistema" compuesto del bloque y el carrete y luego considere el bloque y el carrete por separado.



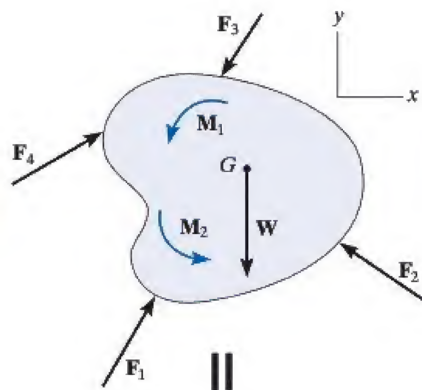
Prob. 17-90



17.5 Ecuaciones de movimiento: movimiento plano general

El cuerpo rígido (o losa) de la figura 17-19*a* se somete a movimiento plano general provocado por las fuerzas y el sistema de momentos de par aplicados de manera externa. Los diagramas de cuerpo libre y cinético del cuerpo se muestran en la figura 17-19*b*. Si se establece un sistema de coordenadas x y y inercial como se muestra, las tres ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= m(a_G)_x \\ \Sigma F_y &= m(a_G)_y \\ \Sigma M_G &= I_G\alpha \end{aligned} \tag{17-17}$$



En algunos problemas puede ser útil sumar los momentos con respecto a un punto P distinto de G para eliminar tantas fuerzas desconocidas como sea posible de la suma de momentos. Cuando se utilizan en este caso más general, las tres ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= m(a_G)_x \\ \Sigma F_y &= m(a_G)_y \\ \Sigma M_P &= \Sigma(\mathcal{M}_k)_P \end{aligned} \tag{17-18}$$

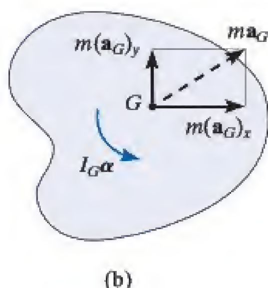


Fig. 17-19

En este caso $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$ representa la suma de momentos de $I_G\boldsymbol{\alpha}$ y $m\mathbf{a}_G$ (o sus componentes) con respecto a P determinados por los datos que aparecen en el diagrama cinético.

Existe un tipo particular de problema que implica un cilindro uniforme, o un cuerpo de forma circular, que rueda sobre una superficie áspera *sin deslizarse*. Si sumamos los momentos con respecto al centro instantáneo de velocidad cero, entonces $\Sigma(\mathcal{M}_k)_{CI}$ se vuelve $I_{CI}\alpha$. La comprobación es similar a $\Sigma M_O = I_O\alpha$ (ecuación 17-16), de modo que

$$\Sigma M_{CI} = I_{CI}\alpha \tag{17-19}$$

Este resultado es comparable a $\Sigma M_O = I_O\alpha$, la cual se utiliza para un cuerpo sujeto con un pasador en O, ecuación 17-16. Vea el problema 17-91.





Cuando la aplanadora o "rodillo de pata de carnero" avanza, el rodillo tiene movimiento plano general. Las fuerzas que se indican en su diagrama de cuerpo libre provocan los efectos que aparecen en el diagrama cinético. Si se suman los momentos con respecto al centro de masa G, entonces $\Sigma M_G = I_G\alpha$. Sin embargo, si se suman los momentos con respecto al punto A (el CI) entonces $\zeta + \Sigma M_A = I_G\alpha + (ma_G)d = I_A\alpha$.

Procedimiento para el análisis

Los problemas cinéticos que implican movimiento plano general de un cuerpo rígido se resuelven con el siguiente procedimiento.

Diagrama de cuerpo libre.

- Establezca el sistema de coordenadas x, y inercial y trace el diagrama de cuerpo libre del cuerpo.
- Especifique la dirección y sentido de la aceleración del centro de masa, $\mathbf{a}_G$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del cuerpo.
- Determine el momento de inercia I_G.
- Identifique las incógnitas en el problema.
- Si decide utilizar la ecuación de movimiento de rotación $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$, entonces considere trazar el diagrama cinético como ayuda para "visualizar" los "momentos" desarrollados por las componentes $m(\mathbf{a}_G)_x$, $m(\mathbf{a}_G)_y$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$ cuando se escriban los términos en la suma de momentos $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$.

Ecuaciones de movimiento.

- Aplique las tres ecuaciones de movimiento de acuerdo con la convención de signos establecida.
- Cuando hay fricción, existe la posibilidad de movimiento sin deslizamiento o volcadura. Cada posibilidad de movimiento deberá considerarse.

Cinemática.

- Use cinemática si no puede obtener una solución completa estrictamente con las ecuaciones de movimiento.
- Si los soportes *limitan* el movimiento del cuerpo, pueden obtenerse ecuaciones adicionales mediante $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$, la cual relaciona las aceleraciones de dos puntos cualesquiera A y B en el cuerpo.
- Cuando una rueda, disco, cilindro o bola *rueda sin deslizarse*, entonces $a_G = \alpha r$.

EJEMPLO 17.13



(a)

Determine la aceleración angular del carrete que se ilustra en la figura 17-20*a*. Su masa es de 8 kg y su radio de giro de $k_G = 0.35$ m. Las cuerdas cuya masa se ignora se enrollan alrededor de su maza interna y borde externo.

SOLUCIÓN I

Diagrama de cuerpo libre. Figura 17-20*b*. La fuerza de 100 N hace que $\mathbf{a}_G$ actúe hacia arriba. Además, $\boldsymbol{\alpha}$ actúa en sentido horario, puesto que el carrete se enrolla alrededor de la cuerda en A.

Hay tres incógnitas T, a_G y α. El momento de inercia del carrete con respecto a su centro de masa es

$$I_G = mk_G^2 = 8\text{ kg}(0.35\text{ m})^2 = 0.980\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

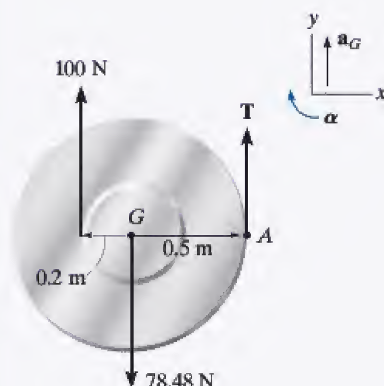
Ecuaciones de movimiento.

$$+\uparrow\Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad T + 100\text{ N} - 78.48\text{ N} = (8\text{ kg})a_G \qquad (1)$$

$$\circlearrowright +\Sigma M_G = I_G\alpha; \quad 100\text{ N}(0.2\text{ m}) - T(0.5\text{ m}) = (0.980\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\alpha \quad (2)$$

Cinemática. Si se utiliza cinemática para relacionar a_G con α se obtiene una solución completa. En este caso el carrete "rueda sin deslizarse" sobre la cuerda en A. Por tanto, podemos utilizar los resultados del ejemplo 16.4 o 16.15, de modo que

$$(\circlearrowright +)\ a_G = \alpha r. \qquad a_G = \alpha\,(0.5\text{ m}) \qquad (3)$$



(b)

Si resolvemos las ecuaciones 1 a 3, tenemos

$$\alpha = 10.3\text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$
$$a_G = 5.16\text{ m/s}^2$$
$$T = 19.8\text{ N}$$

SOLUCIÓN II

Ecuaciones de movimiento. Podemos eliminar la incógnita T al sumar momentos con respecto al punto A. De acuerdo con los diagramas de cuerpo libre y cinético, figuras 17-20*b* y 17-20*c*, tenemos

$$\circlearrowright +\Sigma M_A = \Sigma(\mathcal{M}_k)_A; \qquad 100\text{ N}(0.7\text{ m}) - 78.48\text{ N}(0.5\text{ m})$$
$$= (0.980\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\alpha + [(8\text{ kg})a_G](0.5\text{ m})$$

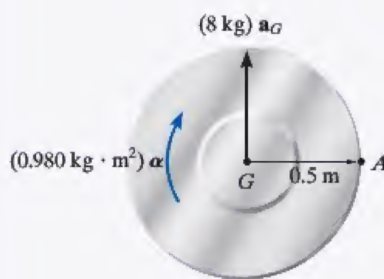
Con la ecuación (3),

$$\alpha = 10.3\text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

SOLUCIÓN III

Ecuaciones de movimiento. La forma más simple de resolver este problema es darse cuenta que el punto A es el *CI* del carrete. Entonces la ecuación 17-19 es aplicable.

$$\circlearrowright +\Sigma M_A = I_A\alpha; \ (100\text{ N})(0.7\text{ m}) - (78.48\text{ N})(0.5\text{ m})$$
$$= [0.980\text{ kg}\cdot\text{m}^2 + (8\text{ kg})(0.5\text{ m})^2]\alpha$$
$$\alpha = 10.3\text{ rad/s}^2$$

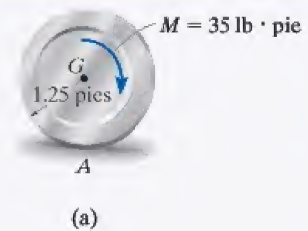


(c)

Fig. 17-20

EJEMPLO 17.14

La rueda de 50 lb que se muestra en la figura 17-21*a* tiene un radio de giro $k_G = 0.70$ pie. Si se aplica un momento de par de 35 lb · pie a la rueda, determine la aceleración de su centro de masa *G*. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre la rueda y el plano en *A* son $\mu_s = 0.3$ y $\mu_k = 0.25$, respectivamente.



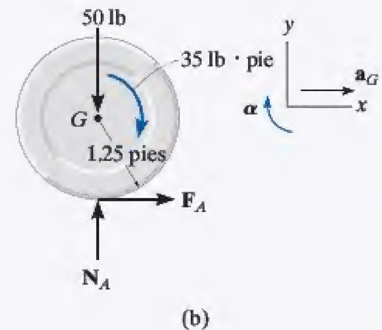
(a)

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. En la figura 17-21*b*, se ve que el momento de par hace que la rueda gire en el sentido de las manecillas del reloj con una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$. Por consiguiente, la aceleración del centro de masa, $\mathbf{a}_G$, está dirigida hacia la derecha. El momento de inercia es

$$I_G = mk_G^2 = \frac{50 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}(0.70 \text{ pie})^2 = 0.7609 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2$$

Las incógnitas son N_A, F_A, a_G y α.



(b)

Fig. 17-21

Ecuaciones de movimiento.

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad F_A = \left(\frac{50 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)a_G \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad N_A - 50 \text{ lb} = 0 \qquad (2)$$

$$\circlearrowright + \Sigma M_G = I_G\alpha; \qquad 35 \text{ lb} \cdot \text{pie} - 1.25 \text{ pies}\,(F_A) = (0.7609 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2)\alpha \qquad (3)$$

Se requiere una cuarta ecuación para una solución completa.

Cinemática (sin deslizamiento). Si se hace esta suposición, entonces

$$(\circlearrowright +) \qquad a_G = (1.25 \text{ pies})\alpha \qquad (4)$$

Al resolver las ecuaciones 1 a 4,

$$N_A = 50.0 \text{ lb} \qquad F_A = 21.3 \text{ lb}$$
$$\alpha = 11.0 \text{ rad/s}^2 \qquad a_G = 13.7 \text{ pies/s}^2$$

Esta solución requiere que no haya deslizamiento, es decir, $F_A \leq \mu_s N_A$. Sin embargo, como 21.3 lb > 0.3(50 lb) = 15 lb, la rueda se desliza cuando gira.

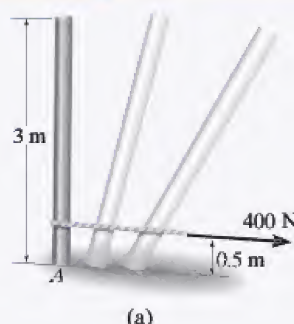
(Deslizamiento). La ecuación 4 no es válida, y por tanto $F_A = \mu_k N_A$, o bien

$$F_A = 0.25 N_A \qquad (5)$$

Al resolver las ecuaciones 1 a 3 y 5 se obtiene

$$N_A = 50.0 \text{ lb} \qquad F_A = 12.5 \text{ lb}$$
$$\alpha = 25.5 \text{ rad/s}^2$$
$$a_G = 8.05 \text{ pies/s}^2 \rightarrow \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

EJEMPLO 17.15



(a)

El poste que se ilustra en la figura 17-22*a* tiene una masa de 100 kg. Si los coeficientes de fricción estática y cinética entre el extremo del poste y la superficie son $\mu_s = 0.3$ y $\mu_k = 0.25$, respectivamente, determine la aceleración angular del poste en el instante en que se aplica la fuerza horizontal de 400 N. En principio, el poste está en reposo.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Figura 17-22*b*. La trayectoria del movimiento del centro de masa *G* será a lo largo de una trayectoria curva desconocida de radio de curvatura ρ, la cual inicialmente coincide con una línea vertical. Sin embargo, no hay ninguna componente normal o *y* de la aceleración porque en principio el poste está en reposo, es decir, $\mathbf{v}_G = \mathbf{0}$, de modo que $(a_G)_y = v_G^2/\rho = 0$. Supondremos que el centro de masa se acelera hacia la derecha y que el poste tiene una aceleración angular de $\boldsymbol{\alpha}$ en el sentido de las manecillas del reloj. Las incógnitas son N_A, F_A, a_G y α.

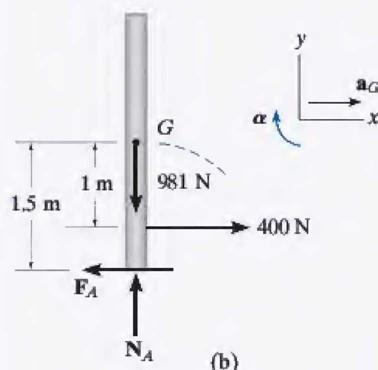
Ecuación de movimiento.

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad 400 \text{ N} - F_A = (100 \text{ kg})a_G \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad N_A - 981 \text{ N} = 0 \qquad (2)$$

$$\circlearrowright + \Sigma M_G = I_G\alpha; \; F_A(1.5 \text{ m}) - (400 \text{ N})(1 \text{ m}) = \left(\tfrac{1}{12}(100 \text{ kg})(3 \text{ m})^2\right)\alpha \quad (3)$$

Para una solución completa se requiere una cuarta ecuación.



(b)

Fig. 17-22

Cinemática (sin deslizamiento). Con esta suposición, el punto *A* actúa como un "pivote" de modo que α ocurre en el sentido de las manecillas del reloj, por tanto la dirección de a_G es hacia la derecha.

$$a_G = \alpha r_{AG}; \qquad a_G = (1.5 \text{ m})\,\alpha \qquad (4)$$

Al resolver las ecuaciones 1 a 4 tenemos

$$N_A = 981 \text{ N} \qquad F_A = 300 \text{ N}$$

$$a_G = 1 \text{ m/s}^2 \qquad \alpha = 0.667 \text{ rad/s}^2$$

La suposición de que no ocurre deslizamiento requiere que $F_A \le \mu_s N_A$. Sin embargo, $300 \text{ N} > 0.3(981 \text{ N}) = 294 \text{ N}$ y por tanto el poste se desliza en *A*.

(Deslizamiento). En este caso, la ecuación 4 *no* es válida. En cambio debe utilizarse la ecuación de fricción $F_A = \mu_k N_A$. Por tanto,

$$F_A = 0.25 N_A \qquad (5)$$

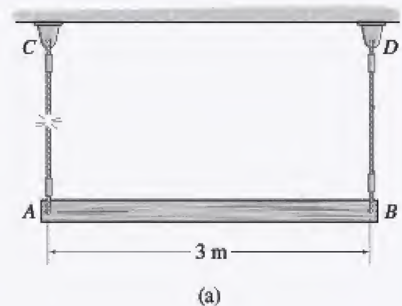
Al resolver las ecuaciones 1 a 3 y 5 simultáneamente, obtenemos

$$N_A = 981 \text{ N} \qquad F_A = 245 \text{ N} \qquad a_G = 1.55 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha = -0.428 \text{ rad/s}^2 = 0.428 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

EJEMPLO 17.16

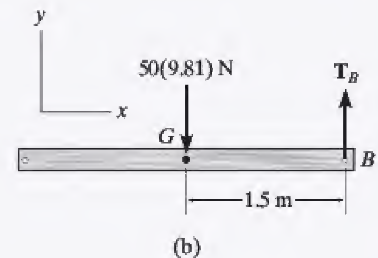
Las cuerdas AC y BD mantienen en la posición de equilibrio la barra de 50 kg que se muestra en la figura 17-23*a*. Determine la tensión en BD y la aceleración angular de la barra inmediatamente después de que se corta AC.



(a)

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Figura 17-23*b*. Hay cuatro incógnitas, T_B, $(a_G)_x$, $(a_G)_y$ y α.



(b)

Ecuaciones de movimiento.

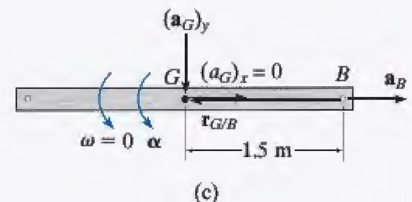
$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad 0 = (50 \text{ kg } a_G)_x$$

$$(a_G)_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \quad T_B - 50(9.81)\text{N} = -(50 \text{ kg } a_G)_y \qquad (1)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_G = I_G\alpha; \qquad T_B(1.5 \text{ m}) = \left[\frac{1}{12}(50 \text{ kg})(3 \text{ m})^2\right]\alpha \qquad (2)$$

Cinemática. Como la barra está en reposo justo después de que se corta el cable, entonces su velocidad angular y la velocidad del punto B en este instante son iguales a cero. Por tanto $(a_B)_n = v_B^2/\rho_{BD} = 0$. En consecuencia, $\mathbf{a}_B$ sólo tiene una componente tangencial, dirigida a lo largo del eje x, figura 17-23*c*. Al aplicar la ecuación de aceleración relativa a los puntos G y B,



(c)

Fig. 17-23

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{G/B} - \omega^2\mathbf{r}_{G/B}$$

$$-(a_G)_y\mathbf{j} = a_B\mathbf{i} + (\alpha\mathbf{k}) \times (-1.5\mathbf{i}) - \mathbf{0}$$

$$-(a_G)_y\mathbf{j} = a_B\mathbf{i} - 1.5\alpha\mathbf{j}$$

Igualamos las componentes **i** y **j** de ambos lados de esta ecuación,

$$0 = a_B$$

$$(a_G)_y = 1.5\alpha \qquad (3)$$

Al resolver las ecuaciones (1) a (3) obtenemos

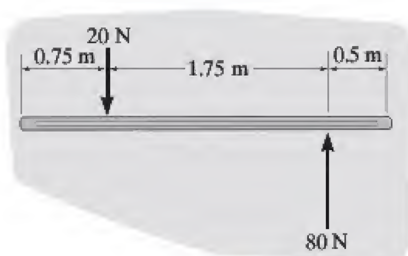
$$\alpha = 4.905 \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

$$T_B = 123 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

$$(a_G)_y = 7.36 \text{ m/s}^2$$

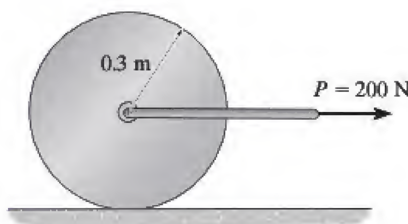
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F17-13. La barra de 60 kg inicialmente está en reposo sobre un plano horizontal liso cuando se aplican las fuerzas. Determine la aceleración del centro de masa de la barra y la aceleración angular de la barra en este instante.



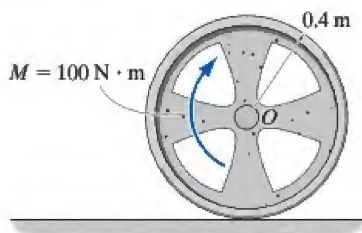
F17-13

F17-14. El cilindro de 100 kg rueda sin deslizarse sobre el plano horizontal. Determine la aceleración de su centro de masa y su aceleración angular.



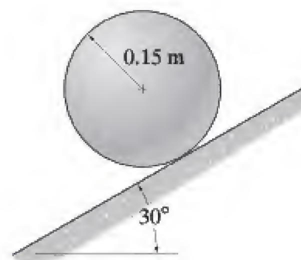
F17-14

F17-15. La rueda de 20 kg tiene un radio de giro con respecto a su centro O de $k_O = 300$ mm. Cuando la rueda se somete al momento de par, se desliza cuando gira. Determine la aceleración angular de la rueda y la aceleración de su centro O. El coeficiente de fricción cinética entre la rueda y el plano es $\mu_k = 0.5$.



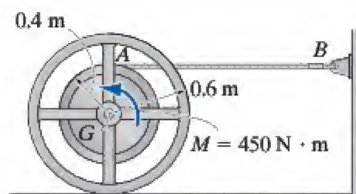
F17-15

F17-16. La esfera de 20 kg rueda hacia abajo del plano inclinado sin deslizarse. Determine su aceleración angular y la aceleración de su centro de masa.



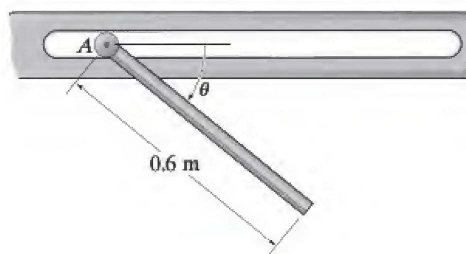
F17-16

F17-17. El carrete de 200 kg tiene un radio de giro con respecto a su centro de masa de $k_G = 300$ mm. Si se aplica el momento de par al carrete y el coeficiente de fricción cinética entre éste y el suelo es $\mu_k = 0.2$, determine la aceleración angular del carrete, la aceleración de G y la tensión del cable.



F17-17

F17-18. La barra esbelta de 12 kg está sujeta por medio de un pasador a un rodillo A que se desliza libremente a lo largo de la ranura. Si la barra se suelta del reposo cuando $\theta = 0°$, determine su aceleración angular y la aceleración del rodillo inmediatamente después que se suelta la barra.



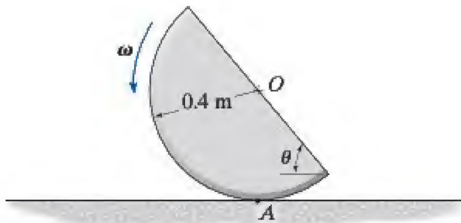
F17-18

PROBLEMAS

17-91. Si un disco *rueda sin deslizarse* sobre una superficie horizontal, demuestre que cuando se suman los momentos con respecto al centro instantáneo de velocidad cero, *CI*, es posible utilizar la ecuación de momento $\Sigma M_{CI} = I_{CI}\alpha$, donde I_{CI} representa el momento de inercia del disco calculado con respecto al eje instantáneo de velocidad cero.

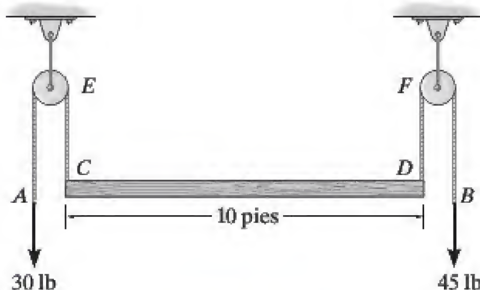
***17-92.** El disco semicircular de 10 kg gira a $\omega = 4$ rad/s cuando $\theta = 60°$. Determine las fuerzas normal y de fricción que ejerce en el suelo en A en este instante. Suponga que el disco no se desliza cuando rueda.

•17-93. El disco semicircular de 10 kg de masa gira a $\omega = 4$ rad/s cuando $\theta = 60°$. Si el coeficiente de fricción estática en A es $\mu_s = 0.5$, determine si el disco se desliza en este instante.



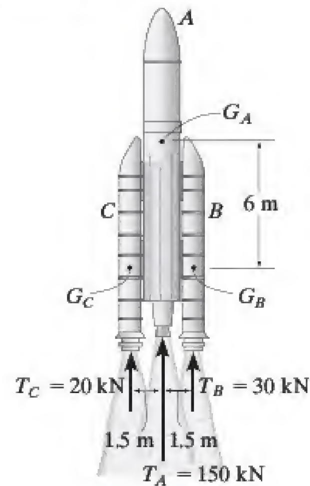
Probs. 17-92/93

17-94. El tablón de 50 lb está suspendido de las cuerdas C y D. Si éstas se someten a fuerzas constantes de 30 lb y 45 lb, respectivamente, determine la aceleración inicial del centro del tablón y la aceleración angular del tablón. Suponga que éste es una placa delgada. Ignore la masa de las poleas E y F.



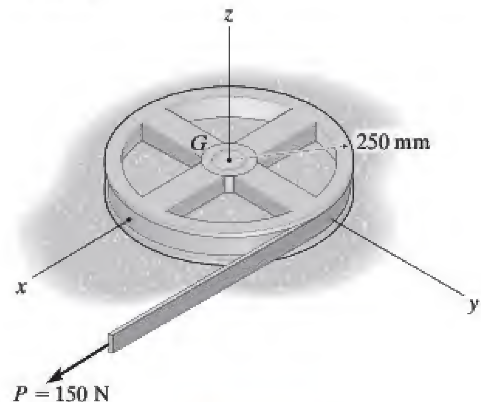
Prob. 17-94

17-95. El cohete se compone de la sección principal A de 10 Mg de masa con su centro de masa en G_A. Los dos cohetes aceleradores gemelos B y C tienen una masa de 2 Mg cada uno con centros de masa en G_B y G_C, respectivamente. En el instante que se muestra, el cohete va en ascenso y se encuentra a una altitud donde la aceleración de la gravedad es $g = 8.75$ m/s^2. Si los cohetes aceleradores B y C de repente suministran un empuje de $T_B = 30$ kN y $T_C = 20$ kN, respectivamente, determine la aceleración angular del cohete. El radio de giro de A con respecto a G_A es $k_A = 2$ m y los radios de giro de B y C con respecto a G_B y G_C son $k_B = k_C = 0.75$ m.



Prob. 17-95

***17-96.** La rueda de 75 kg tiene un radio de giro con respecto al eje z de $k_z = 150$ mm. Si la banda cuya masa se ignora se somete a una fuerza $P = 150$ N, determine la aceleración del centro de masa y la aceleración angular de la rueda. La superficie es lisa y la rueda se desliza libremente.

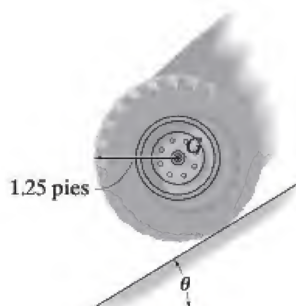


Prob. 17-96

17

•**17-97.** La llanta pesa 30 lb y su radio de giro es $k_G = 0.6$ pie. Si los coeficientes de fricción estática y cinética entre la rueda y el plano son $\mu_s = 0.2$ y $\mu_k = 0.15$, determine la aceleración angular de la llanta cuando rueda hacia abajo del plano inclinado. Sea $\theta = 12°$.

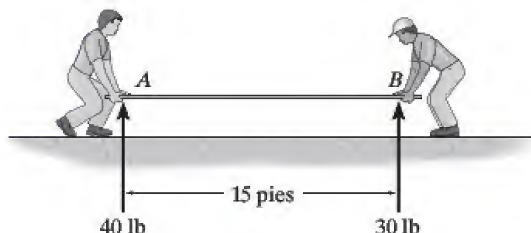
17-98. La llanta pesa 30 lb y su radio de giro es $k_G = 0.6$ pie. Si los coeficientes de fricción estática y cinética entre la rueda y el plano son $\mu_s = 0.2$ y $\mu_k = 0.15$, determine el ángulo máximo θ del plano inclinado de modo que la llanta ruede sin deslizarse.



Probs. 17-97/98

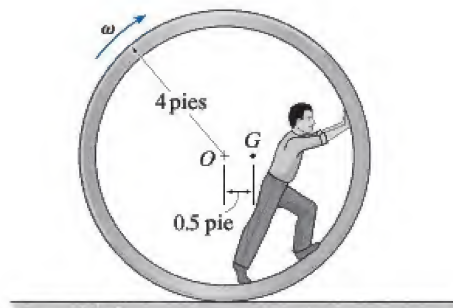
17

17-99. Dos hombres ejercen fuerzas verticales constantes de 40 lb y 30 lb en los extremos A y B de un tablón que pesa 50 lb. Si éste originalmente está en reposo en la posición horizontal, determine la aceleración inicial de su centro y su aceleración angular. Suponga que el tablón es una barra esbelta.



Prob. 17-99

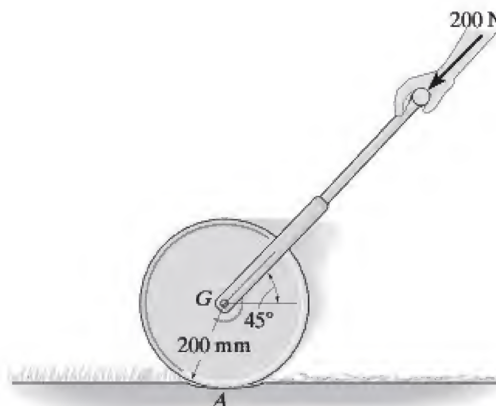
***17-100.** El tubo de drenaje rueda con una velocidad angular de $\omega = 0.5$ rad/s, cuando el hombre está en la posición que se muestra. En este instante el centro de gravedad del tubo y el hombre se encuentra en G y el radio de giro con respecto a G es $k_G = 3.5$ pies. Determine la aceleración angular del tubo. La combinación del peso del tubo y del hombre es de 500 lb. Suponga que el tubo rueda sin deslizarse y que el hombre dentro del tubo no se mueve.



Prob. 17-100

•**17-101.** La podadora de césped tiene una masa de 80 kg y un radio de giro $k_G = 0.175$ m. Si se le empuja hacia delante con una fuerza de 200 N cuando la manivela está a 45°, determine su aceleración angular. Los coeficientes de fricción estática y cinética son $\mu_s = 0.12$ y $\mu_k = 0.1$, respectivamente.

17-102. Resuelva el problema 17-101 si $\mu_s = 0.6$ y $\mu_k = 0.45$.

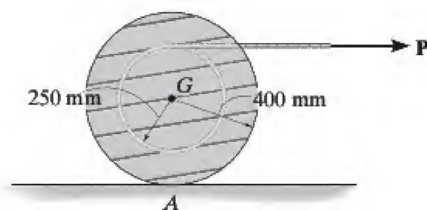


Probs. 17-101/102

17-103. El carrete tiene una masa de 100 kg y un radio de giro de $k_G = 0.3$ m. Si los coeficientes de fricción estática y cinética en A son $\mu_s = 0.2$ y $\mu_k = 0.15$, respectivamente, determine su aceleración angular si $P = 50$ N.

***17-104.** Resuelva el problema 17-103 si la cuerda y la fuerza $P = 50$ N están dirigidas verticalmente hacia arriba.

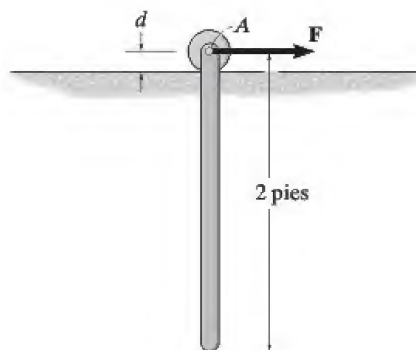
•**17-105.** El carrete tiene una masa de 100 kg y un radio de giro de $k_G = 0.3$ m. Si los coeficientes de fricción estática y cinética en A son $\mu_s = 0.2$ y $\mu_k = 0.15$, respectivamente, determine su aceleración angular si $P = 600$ N.



Probs. 17-103/104/105

***17-108.** Una barra pesa 10 lb y está sujeta a un rodillo por medio de un pasador en A el cual rueda sobre una corredera horizontal. Si la barra originalmente está en reposo y se aplica una fuerza horizontal $F = 15$ lb al rodillo, determine la aceleración del rodillo. Ignore la masa del rodillo y su tamaño d en los cálculos.

•**17-109.** Resuelva el problema 17-108 en el supuesto de que el rodillo A es reemplazado por el bloque corredizo cuya masa se ignora. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la corredera es $\mu_k = 0.2$. Ignore la dimensión d y el tamaño del bloque en los cálculos.

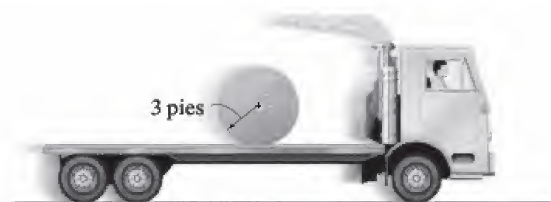


Probs. 17-108/109

17

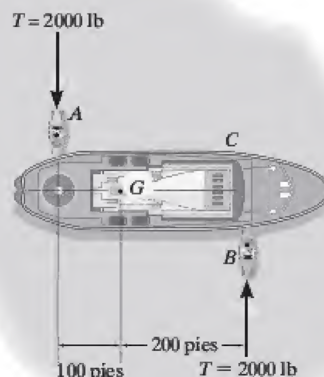
17-106. El camión transporta el carrete que pesa 500 lb y cuyo radio de giro es $k_G = 2$ pies. Determine la aceleración angular del carrete si no está sujeto al camión y éste comienza a acelerar a 3 pies/s^2. Suponga que el carrete no se desliza sobre la plataforma del camión.

17-107. El camión transporta el carrete que pesa 200 lb y cuyo radio de giro es $k_G = 2$ pies. Determine la aceleración angular del carrete si no está sujeto al camión y éste comienza a acelerar a 5 pies/s^2. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el carrete y la plataforma del camión son $\mu_s = 0.15$ y $\mu_k = 0.1$, respectivamente.



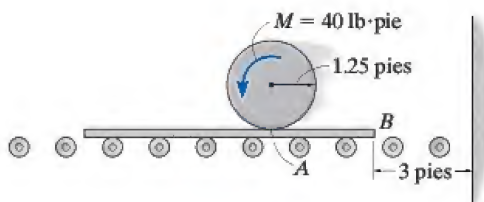
Probs. 17-106/107

17-110. El buque pesa $4(10^6)$ lb y su centro de gravedad está en G. Se utilizan dos remolcadores cuyo peso se ignora para hacerlo virar. Si cada remolcador lo empuja con una fuerza $T = 2000$ lb, determine la aceleración angular de su centro de gravedad G y su aceleración angular. Su radio de giro con respecto a su centro de gravedad es $k_G = 125$ pies. Ignore la resistencia del agua.



Prob. 17-110

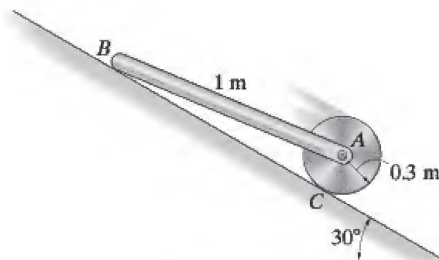
17-111. El cilindro de 15 lb está inicialmente en reposo sobre una placa de 5 lb. Si se aplica un momento de par $M = 40$ lb · pie al cilindro, determine su aceleración angular y el tiempo requerido para que el extremo B de la placa recorra 3 pies hacia la derecha y choque con la pared. Suponga que el cilindro no se desliza sobre la placa e ignore la masa de los rodillos bajo la placa.



Prob. 17-111

***17-112.** El ensamble se compone de un disco de 8 kg y una barra de 10 kg la cual está conectada por medio de un pasador al disco. Si el sistema se pone en movimiento desde el punto de reposo, determine la aceleración angular del disco. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el disco y el plano inclinado son $\mu_s = 0.6$ y $\mu_k = 0.4$, respectivamente. Ignore la fricción en B.

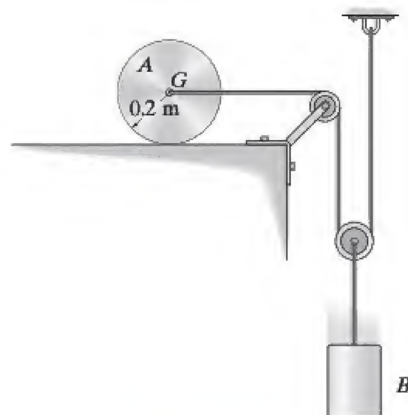
•**17-113.** Resuelva el problema 17-112 sin la barra. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el disco y el plano inclinado son $\mu_s = 0.15$ y $\mu_k = 0.1$, respectivamente.



Probs. 17-112/113

17-114. El disco A de 20 kg está sujeto al bloque B de 10 kg por medio del sistema de cable y polea que se ilustra. Si el disco rueda sin deslizarse, determine su aceleración angular y la aceleración del bloque cuando se sueltan. Además, ¿cuál es la tensión en el cable? Ignore la masa de las poleas.

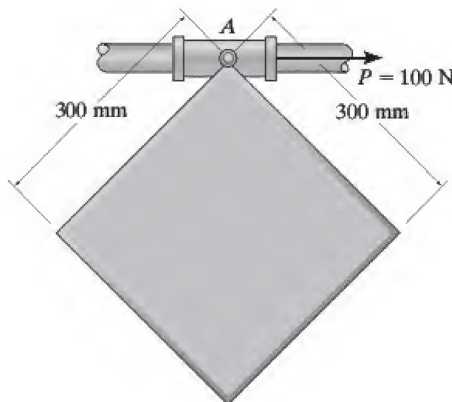
17-115. Determine el coeficiente de fricción estática entre el disco y la superficie en el problema 17-114 de modo que el disco ruede sin deslizarse. Ignore la masa de las poleas.



Probs. 17-114/115

***17-116.** La placa cuadrada de 20 kg está conectada por medio de un pasador al collarín de 5 kg. Determine la aceleración angular inicial de la placa cuando $P = 100$ N se aplica al collarín. En principio, la placa está en reposo.

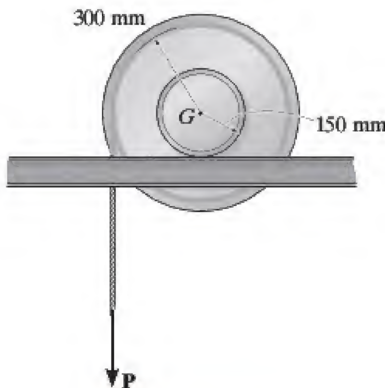
•**17-117.** La placa cuadrada de 20 kg está conectada por medio de un pasador al collarín de 5 kg. Determine la aceleración angular inicial de éste cuando se le aplica $P = 100$ N se aplica al collarín. En principio, la placa está en reposo.



Probs. 17-116/117

17-118. El carrete tiene una masa de 100 kg y un radio de giro de $k_G = 200$ mm con respecto a su centro de masa G. Si se aplica una fuerza vertical $P = 200$ N al cable, determine la aceleración de G y la aceleración angular del carrete. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el riel y el carrete son $\mu_s = 0.3$ y $\mu_k = 0.25$, respectivamente.

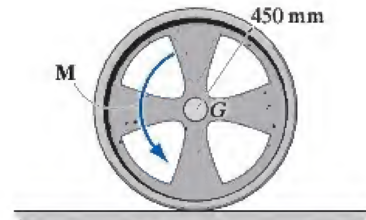
17-119. El carrete tiene una masa de 100 kg y un radio de giro de $k_G = 200$ mm con respecto a su centro de masa G. Si se aplica una fuerza vertical $P = 500$ N al cable, determine la aceleración de G y la aceleración angular del carrete. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el riel y el carrete son $\mu_s = 0.2$ y $\mu_k = 0.15$, respectivamente.



Probs. 17-118/119

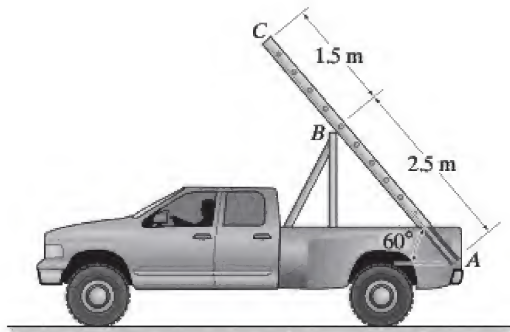
•**17-121.** La rueda de 75 kg tiene un radio de giro con respecto a su centro de masa de $k_G = 375$ mm. Si se somete a un par de torsión de $M = 100$ N · m, determine su aceleración angular. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre la rueda y el suelo son $\mu_s = 0.2$ y $\mu_k = 0.15$, respectivamente.

17-122. La rueda de 75 kg tiene un radio de giro con respecto a su centro de masa de $k_G = 375$ mm. Si se somete a un par de torsión de $M = 150$ N · m, determine su aceleración angular. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre la rueda y el suelo son $\mu_s = 0.2$ y $\mu_k = 0.15$, respectivamente.



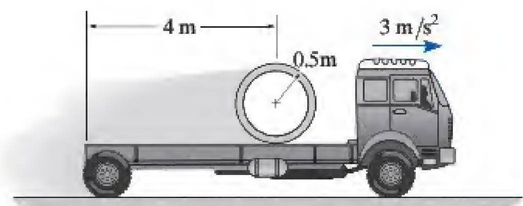
Probs. 17-121/122

*__17-120.__ Si el camión acelera a una tasa constante de 6 m/s^2, a partir del punto de reposo, determine la aceleración angular inicial de la escalera de 20 kg. Ésta puede considerarse como una barra esbelta uniforme. El apoyo en B es liso.



Prob. 17-120

17-123. El tubo de drenaje de concreto de 500 kg tiene un radio medio de 0.5 m. Si la aceleración del camión es de 3 m/s^2, determine la aceleración angular del tubo. Suponga que éste no se desliza sobre la plataforma del camión e ignore su espesor.



Prob. 17-123

17

PROBLEMAS CONCEPTUALES

P17-1. Se utiliza el camión para remolcar el pesado contenedor. Para proporcionar una tracción más eficaz a las ruedas traseras en A, ¿es mejor mantener el contenedor donde está, o colocarlo en frente del remolque? Use valores numéricos apropiados para explicar su respuesta.



P17-1

P17-2. El tractor está a punto de remolcar el avión hacia la derecha. ¿Es posible que el conductor haga que la rueda delantera se levante del suelo cuando acelere el tractor? Trace los diagramas de cuerpo libre y cinético y explique algebraicamente (letras) cómo podría ser esto posible.



P17-2

P17-3. ¿Cómo podría indicar que el conductor está acelerando este vehículo deportivo utilitario? Para explicar su respuesta trace los diagramas de cuerpo libre y cinético. En este caso se suministra potencia a las ruedas traseras. ¿Se vería igual la fotografía si se proporcionara potencia a las ruedas delanteras? ¿Serán iguales las aceleraciones? Use valores numéricos apropiados para explicar sus respuestas.



P17-3

P17-4. He aquí algo que no debe intentar en casa, ¡por lo menos sin casco! Trace los diagramas de cuerpo libre y cinético y muestre qué debe hacer el motociclista para mantener esta posición. Use valores numéricos apropiados para explicar su respuesta.



P17-4

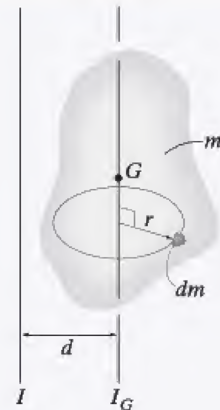
REPASO DEL CAPÍTULO

Momento de inercia

El momento de inercia mide la resistencia de un cuerpo al cambiar su velocidad angular. Está definido por $I = \int r^2 dm$ y será diferente según el eje con respecto al cual se calcula.

Muchos cuerpos están compuestos de formas simples. Si éste es el caso, entonces pueden utilizarse valores tabulares de I, como los que aparecen en la cubierta posterior interna de este libro. Para obtener el momento de inercia de un cuerpo compuesto con respecto a cualquier eje, se determina el momento de inercia de cada parte con respecto al eje y los resultados se suman. Con frecuencia, hacer esto requiere utilizar el teorema de ejes paralelos.

$$I = I_G + md^2$$



Ecuación de movimiento plano

Las ecuaciones de movimiento definen el movimiento de traslación y rotación de un cuerpo rígido. Para explicar todos los términos de estas ecuaciones, un diagrama de cuerpo libre siempre deberá acompañar a su aplicación, y en algunos problemas también puede ser útil trazar el diagrama cinético que muestre $m\mathbf{a}_G$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$.

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma M_G = 0$$

Traslación rectilínea

$$\Sigma F_n = m(a_G)_n$$
$$\Sigma F_t = m(a_G)_t$$
$$\Sigma M_G = 0$$

Traslación curvilínea

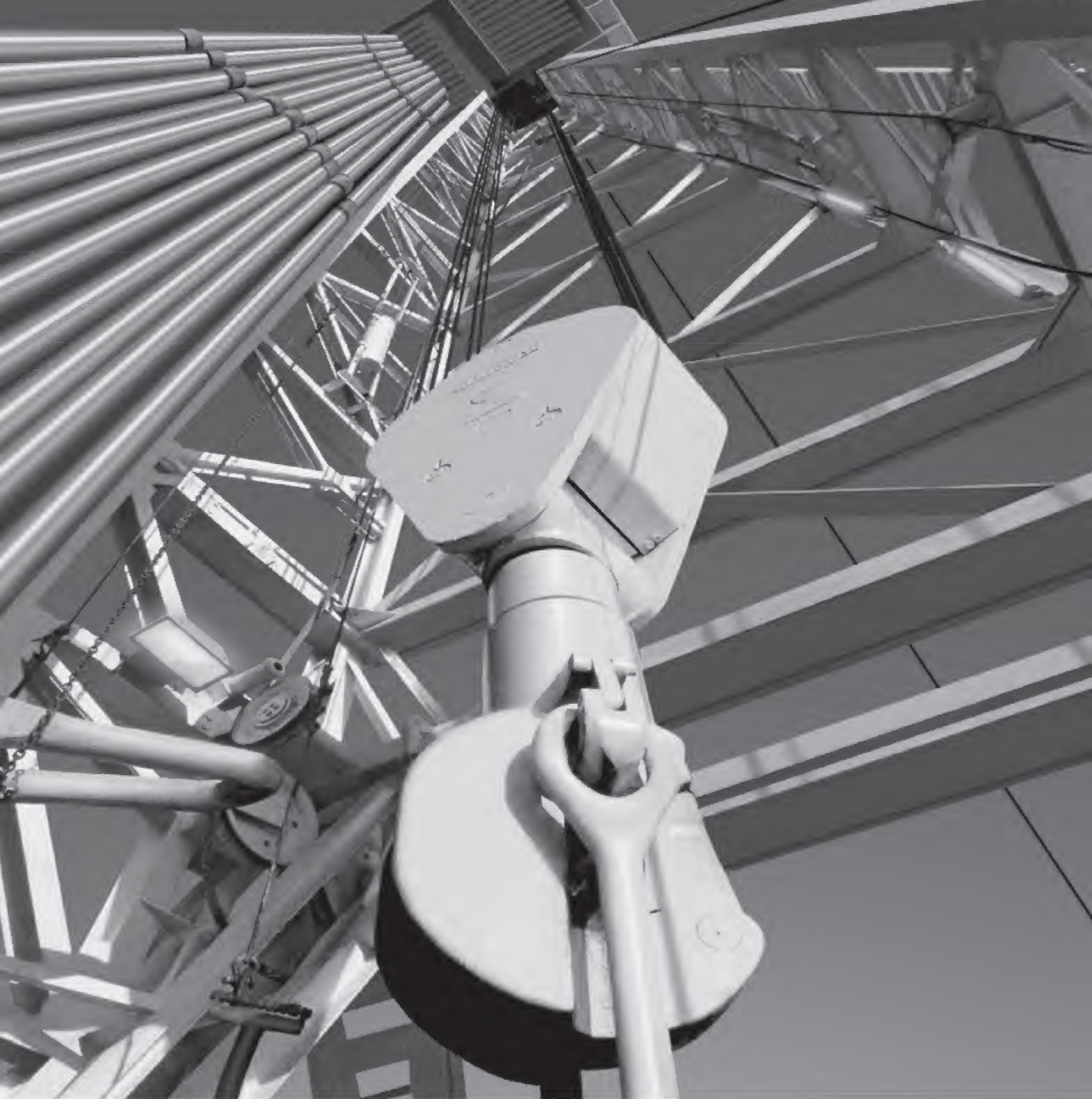
$$\Sigma F_n = m(a_G)_n = m\omega^2 r_G$$
$$\Sigma F_t = m(a_G)_t = m\alpha r_G$$
$$\Sigma M_G = I_G\alpha \text{ o } \Sigma M_O = I_O\alpha$$

Rotación con respecto a un eje fijo

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma M_G = I_G\alpha \text{ o } \Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$$

Movimiento plano general

17



El principio de trabajo y energía desempeña un rol importante en el movimiento del malacate que se utiliza para levantar tubería en esta torre de perforación.

Cinética plana de un cuerpo rígido: trabajo y energía

18

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Desarrollar fórmulas para la energía cinética de un cuerpo, y definir las diversas formas en que una fuerza y un par realizan trabajo.
- Aplicar el principio de trabajo y energía para resolver problemas de cinética plana de un cuerpo rígido que implican fuerza, velocidad y desplazamiento.
- Demostrar cómo puede utilizarse la conservación de la energía para resolver problemas de cinética plana de un cuerpo rígido.

18.1 Energía cinética

En este capítulo aplicaremos métodos de trabajo y energía para resolver problemas de movimiento plano que implican fuerza, velocidad y desplazamiento. Pero primero tendremos que desarrollar una forma de obtener la energía cinética del cuerpo cuando éste se somete a traslación, rotación alrededor de un eje fijo o a movimiento plano general.

Para hacer esto consideraremos el cuerpo rígido que se muestra en la figura 18-1, el cual está representado aquí por una *losa* que se mueve en un plano de referencia *x*-*y* inercial. Una partícula *iésima* arbitraria del cuerpo, de masa dm, se encuentra a una distancia r del punto arbitrario P. Si en el *instante* que se muestra la partícula tiene una velocidad $\mathbf{v}_i$, entonces la energía cinética de la partícula es $T_i = \frac{1}{2}\, dm\, v_i^2$.

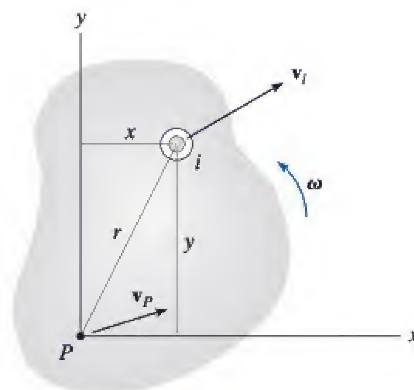


Fig. 18-1

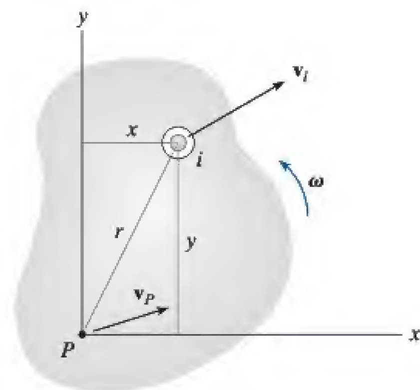


Fig. 18-1

La energía cinética de todo el cuerpo se determina por la escritura de expresiones semejantes para cada una de las partículas del cuerpo y la integración de los resultados, es decir,

$$T = \frac{1}{2}\int_m dm\, v_i^2$$

Esta ecuación también puede expresarse en función de la velocidad del punto P. Si la velocidad angular del cuerpo es $\boldsymbol{\omega}$, entonces de acuerdo con la figura 18-1 tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{i/P}\\ &= (v_P)_x\mathbf{i} + (v_P)_y\mathbf{j} + \omega\mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})\\ &= [(v_P)_x - \omega y]\mathbf{i} + [(v_P)_y + \omega x]\mathbf{j}\end{aligned}$$

El cuadrado de la magnitud de $\mathbf{v}_i$ es, por tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = v_i^2 &= [(v_P)_x - \omega y]^2 + [(v_P)_y + \omega x]^2\\ &= (v_P)_x^2 - 2(v_P)_x\omega y + \omega^2 y^2 + (v_P)_y^2 + 2(v_P)_y\omega x + \omega^2 x^2\\ &= v_P^2 - 2(v_P)_x\omega y + 2(v_P)_y\omega x + \omega^2 r^2\end{aligned}$$

Al sustituir ésta en la ecuación de energía cinética se obtiene

$$T = \frac{1}{2}\left(\int_m dm\right)v_P^2 - (v_P)_x\omega\left(\int_m y\, dm\right) + (v_P)_y\omega\left(\int_m x\, dm\right) + \frac{1}{2}\omega^2\left(\int_m r^2\, dm\right)$$

La primera integral de la derecha representa toda la masa m del cuerpo. Como $\bar{y}m = \int y\, dm$ y $\bar{x}m = \int x\, dm$, la segunda y tercera integrales localizan el centro de masa G con respecto a P. La última integral representa el momento de inercia del cuerpo I_P con respecto a P, calculado con respecto al eje z que pasa por el punto P. Por tanto,

$$T = \tfrac{1}{2}mv_P^2 - (v_P)_x\omega\bar{y}m + (v_P)_y\omega\bar{x}m + \tfrac{1}{2}I_P\omega^2 \qquad (18\text{-}1)$$

Como un caso especial, si el punto P coincide con el centro de masa G del cuerpo, entonces $\bar{y} = \bar{x} = 0$, y por consiguiente

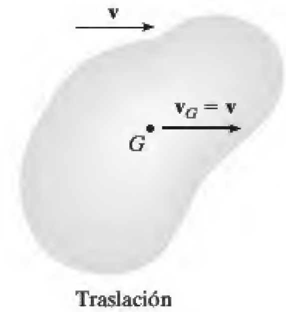
$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega^2 \qquad (18\text{-}2)$$

Ambos términos del lado derecho son *siempre positivos*, puesto que v_G y ω están elevados al cuadrado. El primer término representa la energía cinética de traslación, con respecto al centro de masa, y el segundo la energía cinética de rotación del cuerpo con respecto al centro de masa.

18

Traslación. Cuando un cuerpo rígido de masa m se somete a *traslación* rectilínea o a *traslación* curvilínea, figura 18-2, la energía cinética producida por la rotación es cero, en vista de que $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. La energía cinética del cuerpo es por consiguiente

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 \tag{18-3}$$



Traslación

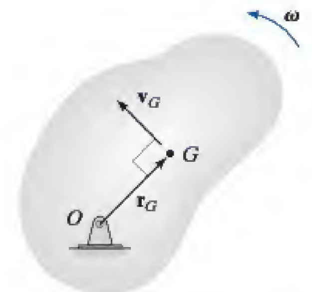
Fig. 18-2

Rotación con respecto a un eje fijo. Cuando un cuerpo rígido *gira alrededor de un eje fijo* que pasa por el punto O, figura 18-3, el cuerpo tiene energía cinética tanto de *traslación* como de *rotación*, de modo que

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega^2 \tag{18-4}$$

La energía cinética del cuerpo también puede formularse en este caso si observamos que $v_G = r_G\omega$, de modo que $T = \frac{1}{2}(I_G + mr_G^2)\omega^2$. Según el teorema de los ejes paralelos, los términos entre paréntesis representan el momento de inercia I_O del cuerpo con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento y que pasa por el punto O. Por tanto,*

$$T = \tfrac{1}{2}I_O\omega^2 \tag{18-5}$$



Rotación alrededor de un eje fijo

Fig. 18-3

Por la derivación, esta ecuación dará el mismo resultado que la ecuación 18-4, puesto que toma en cuenta las energías cinéticas *tanto* de traslación *como* de rotación del cuerpo.

Movimiento plano general. Cuando un cuerpo rígido se somete a movimiento plano general, figura 18-4, su velocidad angular es $\boldsymbol{\omega}$ y la velocidad de su centro de masa es $\mathbf{v}_G$. Por consiguiente, la energía cinética es

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega^2 \tag{18-6}$$



Movimiento plano general

Fig. 18-4

Esta ecuación también puede expresarse en función del movimiento del cuerpo con respecto a su centro instantáneo de velocidad cero, es decir,

$$T = \tfrac{1}{2}I_{CI}\omega^2 \tag{18-7}$$

donde I_{CI} es el momento de inercia del cuerpo con respecto a su centro instantáneo. La comprobación es semejante a la de la ecuación 18-5 (vea el problema 18-1).

*Es importante que observe la similitud entre esta derivación y la de $\Sigma M_O = I_O\alpha$, ecuación 17-16. También puede obtenerse el mismo resultado de manera directa con la ecuación 18-1 si selecciona el punto P en O y toma en cuenta que $v_O = 0$.

18



La energía cinética total de esta aplanadora consiste en la energía cinética del cuerpo o estructura de la máquina debido a su traslación, y a las energías cinéticas de traslación y rotación del rodillo y de las ruedas por su movimiento plano general. Aquí excluimos la energía cinética adicional desarrollada por las partes móviles del motor y el tren motriz.

Sistema de cuerpos. Como la energía es una cantidad escalar, la energía cinética total de cuerpos rígidos *conectados* es la suma de las energías cinéticas de todas sus partes móviles. Según el tipo de movimiento, la energía cinética de *cada cuerpo* se determina por la ecuación 18-2 o las formas alternativas antes mencionadas.

18.2 Trabajo de una fuerza

Con frecuencia se encuentran varios tipos de fuerzas en problemas de cinética plana que implican un cuerpo rígido. El trabajo de cada una de estas fuerzas se presentó en la sección 14.1 y se resume a continuación.

Trabajo de una fuerza variable. Si una fuerza externa $\mathbf{F}$ actúa en un cuerpo, el trabajo realizado por ella cuando el cuerpo se mueve a lo largo de una trayectoria s, figura 18-5, es

$$U_F = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_s F \cos\theta \, ds \qquad (18\text{-}8)$$

Aquí θ es el ángulo entre las "colas" de la fuerza y el desplazamiento diferencial. La integración debe explicar la variación de la dirección y magnitud de la fuerza.

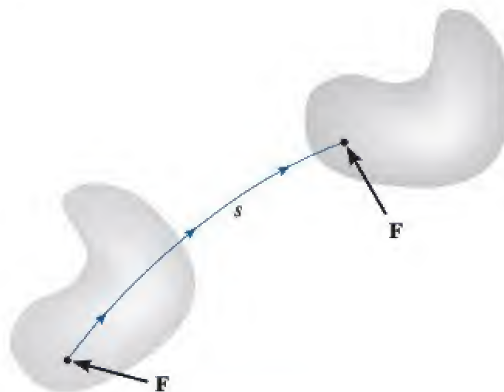


Fig. 18-5

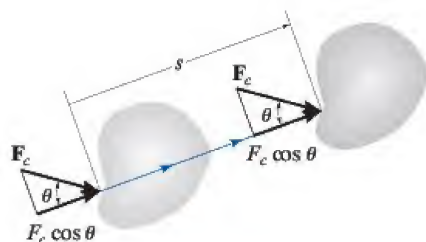


Fig. 18-6

Trabajo de una fuerza constante. Si una fuerza externa $\mathbf{F}_c$ actúa en un cuerpo, figura 18-6 y mantiene una magnitud constante F_c y dirección constante θ, en tanto que el cuerpo experimenta una traslación s, entonces la ecuación anterior puede integrarse, de modo que el trabajo es

$$U_{F_c} = (F_c \cos\theta) s \qquad (18\text{-}9)$$

Trabajo de un peso. El peso de un cuerpo realiza trabajo sólo cuando su centro de masa G experimenta un *desplazamiento vertical* Δy. Si este desplazamiento es *hacia arriba*, figura 18-7, el trabajo es negativo, puesto que el peso se opone al desplazamiento.

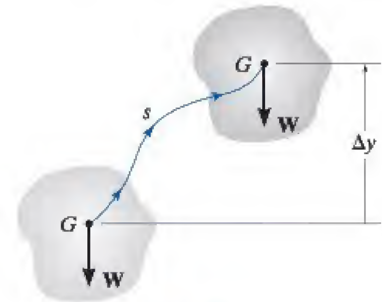


Fig. 18-7

$$U_W = -W\,\Delta y \tag{18-10}$$

Asimismo, si el desplazamiento es *hacia abajo* $(-\Delta y)$ el trabajo se vuelve *positivo*. En ambos casos el cambio de elevación se considera mínimo de modo que **W**, producido por la gravitación, es constante.

Trabajo de una fuerza de resorte. Si un resorte elástico lineal se conecta a una cuerpo, la fuerza $F_s = ks$ *que actúa en el cuerpo* realiza trabajo cuando el resorte se alarga o comprime desde s_1 hasta una posición s_2 *más lejana*. En ambos casos el trabajo será *negativo* puesto que el *desplazamiento del cuerpo* se opone a la dirección de la fuerza, figura 18-8. El trabajo es

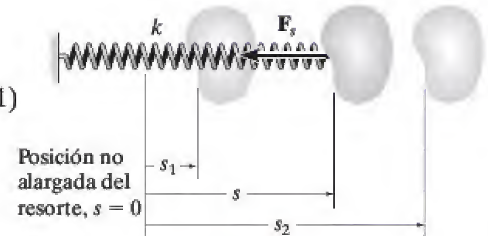


Fig. 18-8

$$U_s = -\left(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2\right) \tag{18-11}$$

donde $|s_2| > |s_1|$.

Fuerzas que no realizan trabajo. Existen algunas fuerzas externas que no realizan trabajo cuando el cuerpo se desplaza. Estas fuerzas actúan o en *puntos fijos* en el cuerpo o tienen una dirección *perpendicular a su desplazamiento.* Entre algunos ejemplos están las reacciones en un soporte de pasador alrededor del cual gira un cuerpo, la reacción normal que actúa en un cuerpo que se mueve a lo largo de una superficie fija, y el peso de un cuerpo cuando su centro de gravedad se mueve en un *plano horizontal*, figura 18-9. Una fuerza de fricción $\mathbf{F}_f$ que actúa en un cuerpo redondo cuando *rueda sin deslizarse* sobre una superficie áspera tampoco realiza trabajo.* Esto es porque, durante cualquier *instante de tiempo dt*, $\mathbf{F}_f$ actúa en un punto del cuerpo el cual tiene *velocidad cero* (centro instantáneo, *CI*) y por tanto el trabajo realizado por la fuerza en el punto es cero. Dicho de otra manera, el punto no se desplaza en la dirección de la fuerza durante este instante. Como $\mathbf{F}_f$ se pone en contacto con puntos sucesivos durante sólo un instante, el trabajo de $\mathbf{F}_f$ será cero.

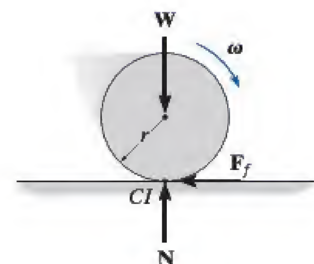
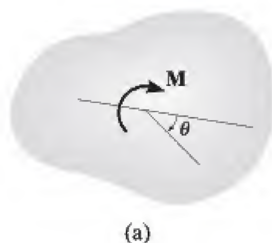
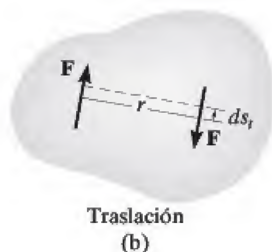


Fig. 18-9

*El trabajo realizado por una fuerza de fricción *cuando el cuerpo se desliza* se analizó en la sección 14.3.



(a)



Traslación
(b)



Rotación
(c)

Fig. 18-10

18.3 Trabajo de un momento de par

Considere el cuerpo de la figura 18-10*a*, el cual se somete a un momento de par $M = Fr$. Si el cuerpo experimenta un desplazamiento diferencial, entonces el trabajo realizado por las fuerzas del par se puede determinar si se considera el desplazamiento como la suma de una traslación distinta más rotación. Cuando el cuerpo *se traslada*, el trabajo de cada fuerza lo realiza sólo el *componente de desplazamiento* a lo largo de la línea de acción de las fuerzas ds_t, figura 18-10*b*. Es obvio que el trabajo "positivo" de una fuerza *anula* el trabajo "negativo" de la otra. Cuando el cuerpo experimenta una rotación diferencial $d\theta$ alrededor del punto arbitrario O, figura 18-10*c*, entonces cada fuerza experimenta un desplazamiento $ds_\theta = (r/2)d\theta$ en la dirección de la fuerza. Por consiguiente, el trabajo total realizado es

$$
\begin{aligned}
dU_M &= F\left(\frac{r}{2}d\theta\right) + F\left(\frac{r}{2}d\theta\right) = (Fr)\,d\theta \\
&= M\,d\theta
\end{aligned}
$$

El trabajo es *positivo* cuando **M** y $d\boldsymbol{\theta}$ tienen el *mismo sentido de dirección* y *negativo* si estos vectores están en el *sentido opuesto*.

Cuando el cuerpo gira en el plano a través de un ángulo finito θ medido en radianes, desde θ_1 hasta θ_2, el trabajo de un momento de par es por consiguiente

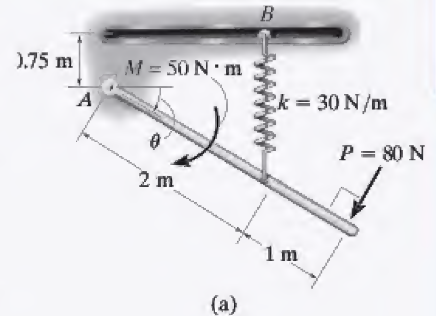
$$
U_M = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,d\theta \qquad (18\text{-}12)
$$

Si el momento de par **M** tiene una *magnitud constante*, entonces

$$
U_M = M(\theta_2 - \theta_1) \qquad (18\text{-}13)
$$

EJEMPLO 18.1

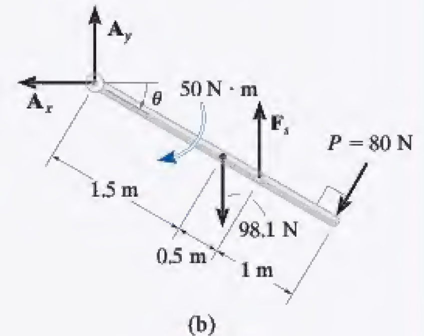
La barra que se muestra en la figura 18-11*a* tiene una masa de 10 kg y se somete a un momento de par $M = 50\ \text{N}\cdot\text{m}$ y a una fuerza $P = 80$ N, la cual siempre se aplica perpendicular al extremo de la barra. Además, la longitud no alargada del resorte es de 0.5 m y permanece en la posición vertical debido a la guía de rodillo en B. Determine el trabajo total realizado por todas las fuerzas que actúan en la barra cuando gira hacia abajo desde $\theta = 0°$ hasta $\theta = 90°$.



(a)

SOLUCIÓN

Primero se traza el diagrama de cuerpo libre con todas las fuerzas que actúan en el cuerpo, figura 18-11*b*.



(b)

Fig. 18-11

Peso *W*. Como el peso 10(9.81)N = 98.1 N se desplaza hacia abajo 1.5 m, el trabajo es

$$U_W = 98.1\ \text{N}(1.5\ \text{m}) = 147.2\ \text{J}$$

¿Por qué el trabajo es positivo?

Momento de par *M*. El momento de par gira a través de un ángulo $\theta = \pi/2$ rad. Por tanto,

$$U_M = 50\ \text{N}\cdot\text{m}(\pi/2) = 78.5\ \text{J}$$

Fuerza de resorte F_s. Cuando $\theta = 0°$ el resorte se alarga (0.75 m – 0.5 m) = 0.25 m y cuando $\theta = 90°$, el alargamiento es (2 m + 0.75 m) – 0.5 m = 2.25 m. Por tanto,

$$U_s = -\left[\tfrac{1}{2}(30\ \text{N/m})(2.25\ \text{m})^2 - \tfrac{1}{2}(30\ \text{N/m})(0.25\ \text{m})^2\right] = -75.0\ \text{J}$$

Por inspección, el resorte realiza trabajo negativo en la barra puesto que $\mathbf{F}_s$ actúa en la dirección opuesta al desplazamiento. Esto concuerda con el resultado.

Fuerza *P*. A medida que la barra desciende, la fuerza se desplaza una distancia de $(\pi/2)(3\ \text{m}) = 4.712$ m. El trabajo es positivo. ¿Por qué?

$$U_P = 80\ \text{N}(4.712\ \text{m}) = 377.0\ \text{J}$$

Reacciones en el pasador. Las fuerzas $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ no realizan trabajo puesto que no se desplazan.

Trabajo total. El trabajo de todas las fuerzas cuando la barra se desplaza es por tanto

$$U = 147.2\ \text{J} + 78.5\ \text{J} - 75.0\ \text{J} + 377.0\ \text{J} = 528\ \text{J} \qquad \textit{Resp.}$$

18

18.4 Principio de trabajo y energía

Aplicar el principio de trabajo y energía desarrollado en la sección 14.2 a cada una de las partículas de un cuerpo rígido y con la suma algebraica de los resultados, puesto que la energía es un escalar, el principio de trabajo y energía para un cuerpo rígido resulta

$$T_1 + \Sigma U_{1\text{-}2} = T_2 \tag{18-14}$$

Esta ecuación establece que la energía cinética inicial de traslación *y* rotación del cuerpo, más el trabajo realizado por todas las fuerzas externas y momentos de par que actúan en el cuerpo a medida que se mueve desde su posición inicial hasta su posición final, es igual a su energía cinética final de traslación *y* rotación. Observe que el trabajo de las *fuerzas internas* del cuerpo no tiene que considerarse. Estas fuerzas actúan en pares colineales iguales pero opuestos, de modo que cuando el cuerpo se mueve, el trabajo de una fuerza anula el de su contraparte. Además, como el cuerpo es rígido, entre estas fuerzas *no hay movimiento relativo*, de modo que no se realiza trabajo interno.

Cuando varios cuerpos rígidos están conectados por pasadores, o por cables inextensibles o engranados unos con otros, puede aplicarse la ecuación 18-14 a *todo el sistema* de cuerpos conectados. En todos estos casos las fuerzas internas, que mantienen los diversos miembros juntos, no realizan trabajo y por consiguiente se eliminan del análisis.



El trabajo del par de torsión o momento, desarrollado por los engranes motrices de los motores se transforma en energía cinética de rotación del tambor.

Procedimiento para el análisis

El principio de trabajo y energía se utiliza para resolver problemas cinéticos que implican *velocidad*, *fuerza* y *desplazamiento*, puesto que estos términos intervienen en la formulación. Para su aplicación, se sugiere el siguiente procedimiento.

Energía cinética (diagramas cinemáticos).

- La energía cinética de un cuerpo se compone de dos partes. La energía cinética de traslación se refiere a la velocidad del centro de masa, $T = \frac{1}{2}mv_G^2$ y la energía cinética de rotación se determina por el momento de inercia del cuerpo con respecto al centro de masa, $T = \frac{1}{2}I_G\omega^2$. En el caso especial de rotación alrededor de un eje fijo (o rotación alrededor del *CI*), estas dos energías cinéticas se combinan y pueden expresarse como $T = \frac{1}{2}I_O\omega^2$, donde I_O es el momento de inercia con respecto al eje de rotación.
- Los *diagramas cinemáticos* de velocidad pueden ser útiles para determinar v_G y ω o para establecer una *relación* entre v_G y ω.*

Trabajo (diagrama de cuerpo libre).

- Trace un diagrama de cuerpo libre del cuerpo cuando se encuentra en un punto intermedio a lo largo de la trayectoria que incluya todas las fuerzas y momentos de par que realizan trabajo en el cuerpo cuando se desplaza a lo largo de la trayectoria.
- Una fuerza realiza trabajo cuando se desplaza en su dirección.
- Las fuerzas que son funciones de desplazamiento deben integrarse para obtener el trabajo. Gráficamente, el trabajo es igual al área bajo la curva de fuerza-desplazamiento.
- El trabajo de un peso es el producto de su magnitud y el desplazamiento vertical, $U_W = Wy$. Es positivo cuando el peso se mueve hacia abajo.
- El trabajo de un resorte es de la forma $U_s = \frac{1}{2}ks^2$, donde k es la rigidez del resorte y s es su alargamiento o compresión.
- El trabajo de un par es el producto del momento de par por el ángulo en radianes a través de los que gira, $U_M = M\theta$.
- Como se requiere la *adición algebraica* de los términos de trabajo, es importante especificar el signo apropiado de cada término. Específicamente, el trabajo es *positivo* cuando la fuerza (momento de par) actúa en la *misma dirección* que su desplazamiento (rotación); de lo contrario es negativo.

Principio de trabajo y energía.

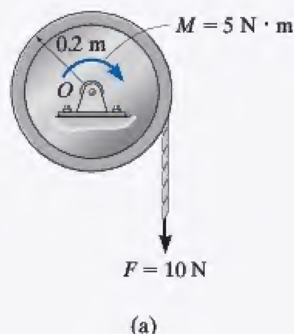
- Aplique el principio de trabajo y energía, $T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$. Como ésta es una ecuación escalar, puede utilizarse para determinar sólo una incógnita cuando se aplica a un solo cuerpo rígido.

*Un breve repaso de las secciones 16.5 a 16.7 puede ser útil cuando se resuelven problemas, puesto que los cálculos de energía cinética requieren un análisis cinemático de la velocidad.

18

EJEMPLO 18.2

El disco de 30 kg que se ilustra en la figura 18-12*a* está soportado por un pasador que pasa por su centro. Determine el número de revoluciones que debe realizar para que alcance una velocidad angular de 20 rad/s a partir del punto de reposo. En él actúa una fuerza constante $F = 10$ N, aplicada a una cuerda enrollada alrededor de su periferia y un momento de par constante $M = 5$ N · m. Ignore la masa de la cuerda en el cálculo.



(a)

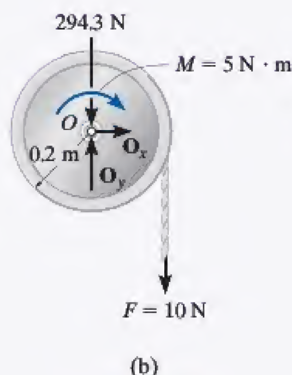
SOLUCIÓN

Energía cinética. Como el disco gira alrededor de un eje fijo, e inicialmente está en reposo, entonces

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = \tfrac{1}{2} I_O \omega_2^2 = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}(30\text{ kg})(0.2\text{ m})^2\right](20\text{ rad/s})^2 = 120\text{ J}$$

Trabajo (diagrama de cuerpo libre). Como se muestra en la figura 18-12*b*, las reacciones en los pasadores $\mathbf{O}_x$ y $\mathbf{O}_y$ y el peso (294.3 N) no realizan trabajo, puesto que no se desplazan. El *momento de par*, de magnitud constante realiza trabajo positivo $U_M = M\theta$ ya que el disco *gira* un ángulo de θ rad en el sentido de las manecillas del reloj y la *fuerza constante* **F** realiza trabajo positivo $U_{Fc} = Fs$ ya que la cuerda desciende $s = \theta r = \theta(0.2\text{ m})$.



(b)

Fig. 18-12

Principio de trabajo y energía.

$$\{T_1\} + \{\Sigma U_{1-2}\} = \{T_2\}$$

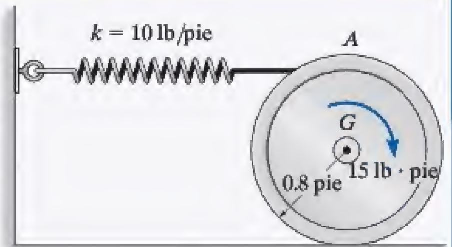
$$\{T_1\} + \{M\theta + Fs\} = \{T_2\}$$

$$\{0\} + \{(5\text{ N}\cdot\text{m})\theta + (10\text{ N})\theta(0.2\text{ m})\} = \{120\text{ J}\}$$

$$\theta = 17.14\text{ rad} = 17.14\text{ rad}\left(\frac{1\text{ rev}}{2\pi\text{ rad}}\right) = 2.73\text{ rev} \quad \textbf{\textit{Resp.}}$$

EJEMPLO 18.3

La rueda mostrada en la figura 18-13*a* pesa 40 lb y su radio de giro es $k_G = 0.6$ pie con respecto a su centro de masa *G*. Si se somete a un momento de par en el sentido de las manecillas del reloj de 15 lb · pie y rueda desde el punto de reposo sin deslizarse, determine su velocidad angular después de que su centro *G* se mueve 0.5 pie. La rigidez del resorte es $k = 10$ lb/pie e inicialmente no está alargado cuando se aplica el momento de par.



(a)

SOLUCIÓN

Energía cinética (diagrama cinemático). Como en principio la rueda está en reposo,

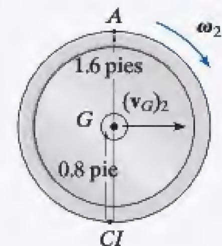
$$T_1 = 0$$

El diagrama cinemático de la rueda cuando está en su posición final se muestra en la figura 18-13*b*. La energía cinética final se determina por

$$T_2 = \tfrac{1}{2} I_{CI}\omega_2^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{40\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}(0.6\text{ pie})^2 + \left(\frac{40\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}\right)(0.8\text{ pie})^2\right]\omega_2^2$$

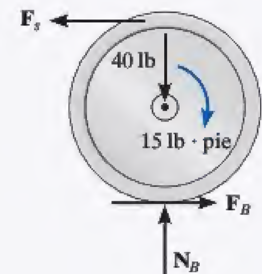
$$T_2 = 0.6211\,\omega_2^2$$



(b)

Trabajo (diagrama de cuerpo libre). Como se muestra en la figura 18-13*c*, sólo la fuerza del resorte $\mathbf{F}_s$ y el momento de par realizan trabajo. La fuerza normal no se desplaza a lo largo de su línea de acción y la fuerza de fricción *no realiza trabajo*, puesto que la rueda no se desliza cuando rueda.

El trabajo de $\mathbf{F}_s$ se determina con $U_s = -\frac{1}{2}ks^2$. En este caso el trabajo es negativo puesto que $\mathbf{F}_s$ actúa en la dirección opuesta al desplazamiento. Como la rueda no se desliza cuando el centro *G* se mueve 0.5 pie, entonces la rueda gira $\theta = s_G/r_{G/CI} = 0.5$ pie/0.8 pie $= 0.625$ rad, figura 18-13*b*. Por tanto, el resorte se alarga $s = \theta r_{A/CI} = (0.625\text{ rad})(1.6\text{ pies}) = 1$ pie.



(c)

Fig. 18-13

Principio de trabajo y energía.

$$\{T_1\} + \{\Sigma U_{1-2}\} = \{T_2\}$$

$$\{T_1\} + \left\{M\theta - \tfrac{1}{2}ks^2\right\} = \{T_2\}$$

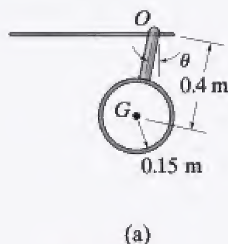
$$\{0\} + \left\{15\text{ lb}\cdot\text{pie}\,(0.625\text{ rad}) - \frac{1}{2}(10\text{ lb/pie})(1\text{ pie})^2\right\} = \{0.6211\,\omega_2^2\text{ pie}\cdot\text{lb}\}$$

$$\omega_2 = 2.65\text{ rad/s} \circlearrowright \qquad \textbf{Resp.}$$

EJEMPLO 18.4



El tubo de 700 kg cuelga por igual de los dos dientes del montacargas que se muestra en la fotografía. Experimenta un movimiento de oscilación de modo que cuando $\theta = 30°$ está momentáneamente en reposo. Determine las fuerzas normal y de fricción que actúan en cada uno de los dientes necesarias para sostener el tubo cuando $\theta = 0°$. Las mediciones del tubo y dientes se muestran en la figura 18-14*a*. Ignore la masa de los dientes y el espesor del tubo.



(a)

Fig. 18-14

SOLUCIÓN

Debemos utilizar las ecuaciones de movimiento para determinar las fuerzas en los dientes ya que estas fuerzas no realizan trabajo. Antes de hacerlo, sin embargo, aplicaremos el principio de trabajo y energía para determinar la velocidad angular del tubo cuando $\theta = 0°$.

Energía cinética (diagrama cinemático). Como el tubo está en un principio en reposo, entonces

$$T_1 = 0$$

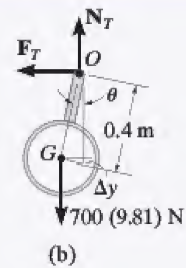
La energía cinética final se calcula con respecto al punto fijo O o al centro de masa G. Para el cálculo consideraremos que el tubo es un anillo delgado de modo que $I_G = mr^2$. Si se considera el punto G, tenemos

$$\begin{aligned} T_2 &= \tfrac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega_2^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(700 \text{ kg})[(0.4 \text{ m})\omega_2]^2 + \tfrac{1}{2}[700 \text{ kg}(0.15 \text{ m})^2]\omega_2^2 \\ &= 63.875\omega_2^2 \end{aligned}$$

Si se considera el punto O entonces debe utilizarse el teorema de los ejes paralelos para determinar I_O. Por tanto,

$$\begin{aligned} T_2 = \tfrac{1}{2}I_O\omega_2^2 &= \tfrac{1}{2}[700 \text{ kg}(0.15 \text{ m})^2 + 700 \text{ kg}(0.4 \text{ m})^2]\omega_2^2 \\ &= 63.875\omega_2^2 \end{aligned}$$

Trabajo (diagrama de cuerpo libre). Figura 18-14*b*. Las fuerzas normal y de fricción no realizan trabajo en los dientes puesto que no se mueven cuando el tubo oscila. El peso realiza trabajo positivo puesto que desciende una distancia vertical $\Delta y = 0.4 \text{ m} - 0.4 \cos 30° \text{m} = 0.05359 \text{ m}$.



(b)

Principio de trabajo y energía.

$$\{T_1\} + \{\Sigma U_{1-2}\} = \{T_2\}$$

$$\{0\} + \{700(9.81) \text{ N}(0.05359 \text{ m})\} = \{63.875\omega_2^2\}$$

$$\omega_2 = 2.400 \text{ rad/s}$$

Ecuaciones de movimiento. Al recurrir a los diagramas de cuerpo libre y cinético mostrados en la figura 18-14*c* y utilizar el resultado de ω_2, tenemos

$$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_t = m(a_G)_t; \quad F_T = (700 \text{ kg})(a_G)_t$$

$$+\uparrow \Sigma F_n = m(a_G)_n; \quad N_T - 700(9.81) \text{ N} = (700 \text{ kg})(2.400 \text{ rad/s})^2(0.4 \text{ m})$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_O\alpha; \quad 0 = [(700 \text{ kg})(0.15 \text{ m})^2 + (700 \text{ kg})(0.4 \text{ m})^2]\alpha$$

Como $(a_G)_t = (0.4 \text{ m})\alpha$, entonces

$$\alpha = 0, \quad (a_G)_t = 0$$

$$F_T = 0$$

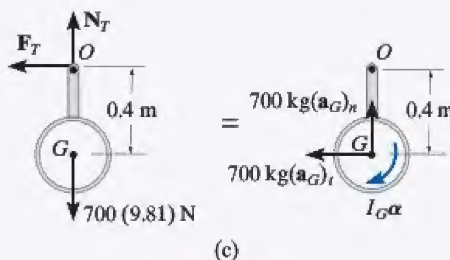
$$N_T = 8.480 \text{ kN}$$

Se utilizan dos dientes para soportar la carga, por consiguiente,

$$F'_T = 0 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$N'_T = \frac{8.480 \text{ kN}}{2} = 4.24 \text{ kN} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

NOTA: debido al movimiento de oscilación, los dientes se someten a una fuerza normal *mayor* que la que se generaría si la carga estuviera estática, en cuyo caso $N'_T = 700(9.81) \text{ N}/2 = 3.43 \text{ kN}$.

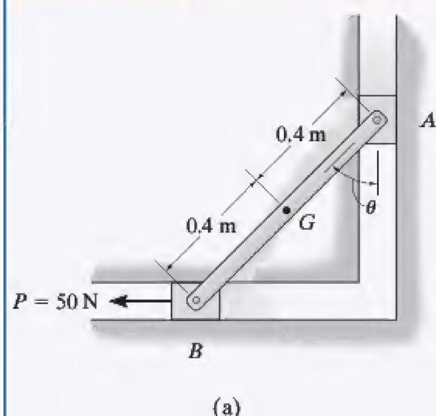


(c)

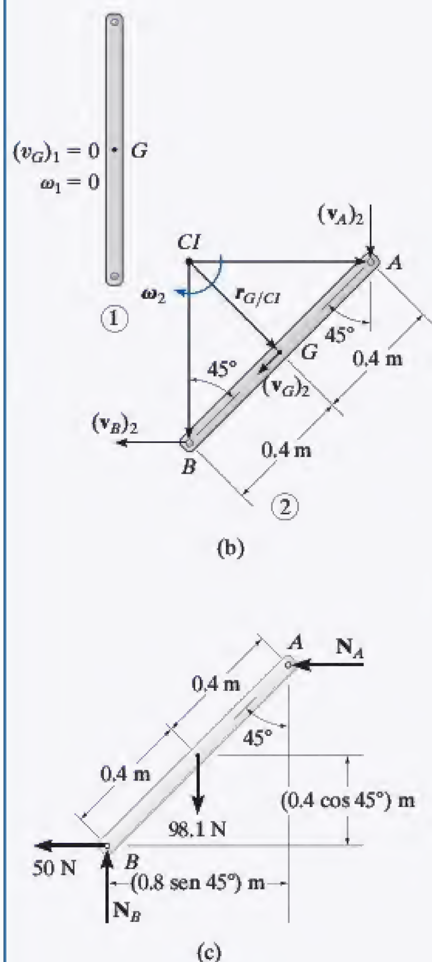
Fig. 18-14

18

EJEMPLO 18.5



(a)



(b)

(c)

Fig. 18-15

La barra de 10 kg que se muestra en la figura 18-15*a* está restringida de modo que sus extremos se mueven a lo largo de las ranuras. La barra inicialmente está en reposo cuando $\theta = 0°$. Si en el bloque corredizo *B* actúa una fuerza horizontal $P = 50$ N, determine la velocidad angular de la barra cuando $\theta = 45°$. Ignore la masa de los bloques *A* y *B*.

SOLUCIÓN

¿Por qué puede utilizarse el principio de trabajo y energía para resolver este problema?

Energía cinética (diagramas cinemáticos). En la figura 18-15*b* se muestran dos diagramas cinemáticos de la barra, cuando está en la posición inicial 1 y en la posición final 2. Cuando la barra está en la posición 1, $T_1 = 0$ puesto que $(\mathbf{v}_G)_1 = \boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{0}$. En la posición 2, la velocidad angular es $\boldsymbol{\omega}_2$ y la velocidad del centro de masa es $(\mathbf{v}_G)_2$. Por tanto, la energía cinética es

$$
\begin{aligned}
T_2 &= \tfrac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega_2^2 \\
&= \tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{12}(10\text{ kg})(0.8\text{ m})^2\right]\omega_2^2 \\
&= 5(v_G)_2^2 + 0.2667(\omega_2)^2
\end{aligned}
$$

Las dos incógnitas $(v_G)_2$ y ω_2 pueden relacionarse con base en el centro instantáneo de velocidad cero de la barra, figura 18-15*b*. Se ve que a medida que *A* desciende a una velocidad $(\mathbf{v}_A)_2$, *B* se mueve horizontalmente a la izquierda a una velocidad $(\mathbf{v}_B)_2$. Al conocer estas direcciones, el *CI* se encuentra como se muestra en la figura. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
(v_G)_2 &= r_{G/CI}\omega_2 = (0.4\tan 45°\text{ m})\omega_2 \\
&= 0.4\omega_2
\end{aligned}
$$

En consecuencia,

$$T_2 = 0.8\omega_2^2 + 0.2667\omega_2^2 = 1.0667\omega_2^2$$

Desde luego, también podemos determinar este resultado con $T_2 = \frac{1}{2}I_{CI}\omega_2^2$.

Trabajo (diagrama de cuerpo libre). Figura 18-15*c*. Las fuerzas normales $\mathbf{N}_A$ y $\mathbf{N}_B$ no realizan trabajo cuando la barra se desplaza. ¿Por qué? El peso de 98.1 N se desplaza una distancia vertical de $\Delta y = (0.4 - 0.4\cos 45°)$ m; mientras que la fuerza de 50 N recorre una distancia horizontal de $s = (0.8\text{ sen }45°)$ m. Estas dos fuerzas realizan trabajo positivo. ¿Por qué?

Principio de trabajo y energía.

$$\{T_1\} + \{\Sigma U_{1-2}\} = \{T_2\}$$

$$\{T_1\} + \{W\,\Delta y + Ps\} = \{T_2\}$$

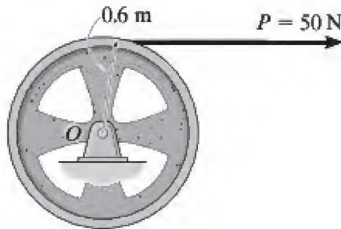
$$\{0\} + \{98.1\text{ N}(0.4\text{ m} - 0.4\cos 45°\text{ m}) + 50\text{ N}(0.8\text{ sen }45°\text{ m})\} = \{1.0667\omega_2^2\text{ J}\}$$

Si resolvemos ω_2 obtenemos

$$\omega_2 = 6.11\text{ rad/s}\circlearrowright$$ ***Resp.***

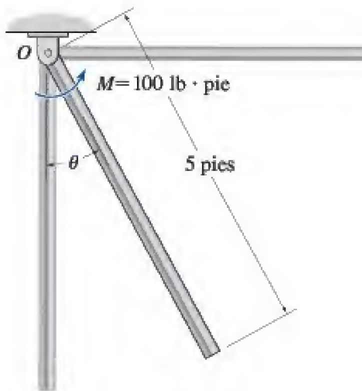
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F18-1. La rueda de 80 kg tiene un radio de giro con respecto al centro de masa O de $k_O = 400$ mm. Determine su velocidad angular después de que ha realizado 20 revoluciones a partir del punto de reposo.



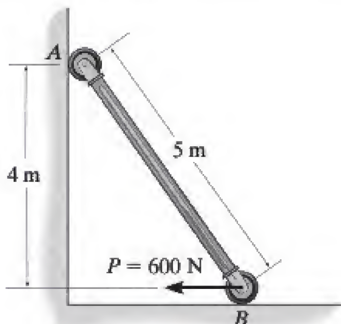
F18-1

F18-2. La barra delgada uniforme de 50 lb se somete a un momento de par $M = 100$ lb · pie. Si la barra está en reposo cuando $\theta = 0°$, determine su velocidad angular cuando $\theta = 90°$.



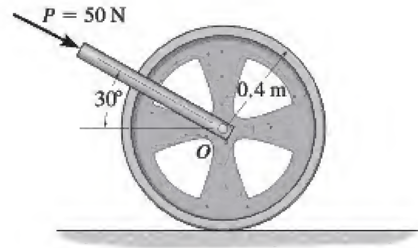
F18-2

F18-3. La barra delgada uniforme de 50 kg está en reposo en la posición que se muestra cuando se aplica una fuerza $P = 600$ N. Determine su velocidad angular cuando alcanza la posición vertical.



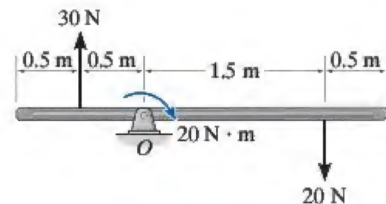
F18-3

F18-4. La rueda de 50 kg se somete a una fuerza de 50 N. Si comienza a rodar desde el punto de reposo sin deslizarse, determine su velocidad angular después de que ha realizado 10 revoluciones. Su radio de giro con respecto a su centro de masa O *es* $k_O = 0.3$ m.



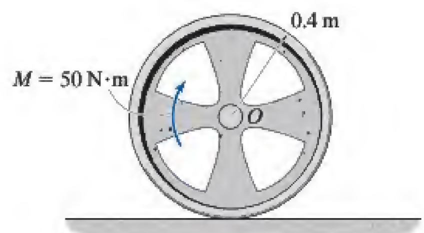
F18-4

F18-5. Si la barra delgada uniforme de 30 kg comienza a rodar del reposo en la posición mostrada, determine su velocidad angular después de que ha realizado 4 revoluciones. Las fuerzas permanecen perpendiculares a la barra.



F18-5

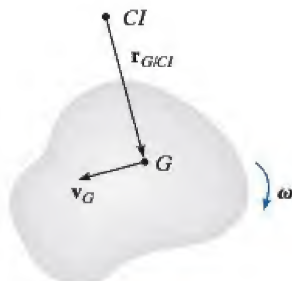
F18-6. La rueda de 20 kg tiene un radio de giro con respecto a su centro O de $k_O = 300$ mm. Cuando se somete a un momento de par $M = 50$ N · m, rueda sin deslizarse. Determine su velocidad angular después de que su centro O ha recorrido una distancia de $s_O = 20$ m, a partir del reposo.



F18-6

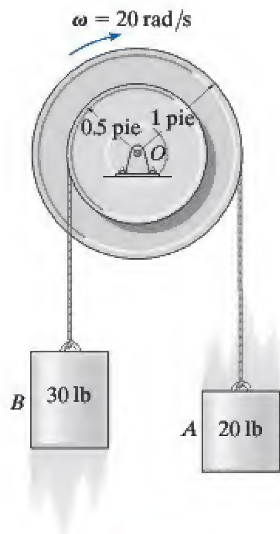
PROBLEMAS

•**18-1.** En un instante dado el cuerpo de masa m tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la velocidad de su centro de masa es $\mathbf{v}_G$. Demuestre que su energía cinética puede representarse como $T = \frac{1}{2}I_{CI}\omega^2$, donde I_{CI} es el momento de inercia del cuerpo calculado con respecto al eje instantáneo de velocidad cero, localizado a una distancia $r_{G/CI}$ del centro de masa, como se muestra.



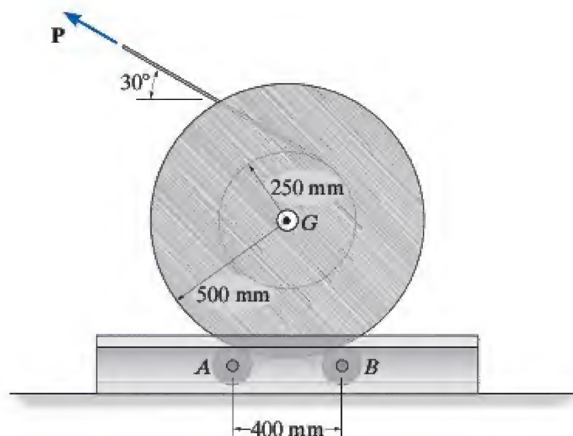
Prob. 18-1

18-2. La doble polea se compone de dos partes conectadas entre sí. Pesa 50 lb y tiene un radio de giro con respecto a su centro de masa de $k_O = 0.6$ pie. Si gira con una velocidad angular de 20 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj, determine la energía cinética del sistema. Suponga que ninguno de los cables se desliza sobre la polea.



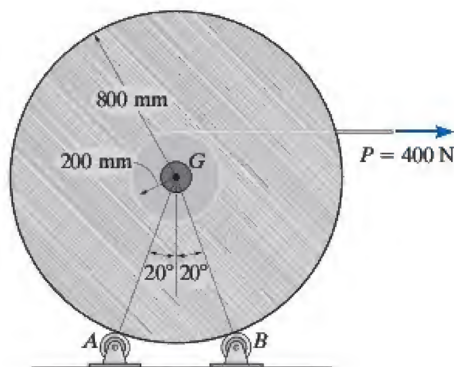
Prob. 18-2

18-3. Se aplica una fuerza $P = 20$ N al cable, la cual hace que gire el carrete de 175 kg sin deslizarse sobre los dos rodillos A y B del despachador. Determine la velocidad angular del carrete después de que ha realizado dos revoluciones a partir del reposo. Ignore la masa del cable. Cada rodillo puede considerarse como un cilindro de 18 kg con radio de giro de 0.1 m. El radio de giro del carrete con respecto a su centro de masa es $k_G = 0.42$ m.



Prob. 18-3

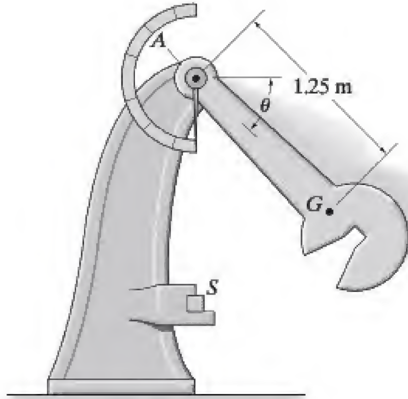
***18-4.** El carrete de cable, originalmente en reposo, tiene una masa de 200 kg y un radio de giro de $k_G = 325$ mm. Si el carrete descansa sobre dos pequeños rodillos A y B y se aplica una fuerza horizontal constante de $P = 400$ N al extremo del cable, determine la velocidad angular del carrete cuando se han desenrollado 8 m de cable. Ignore la fricción, la masa de los rodillos y el cable desenrollado.



Prob. 18-4

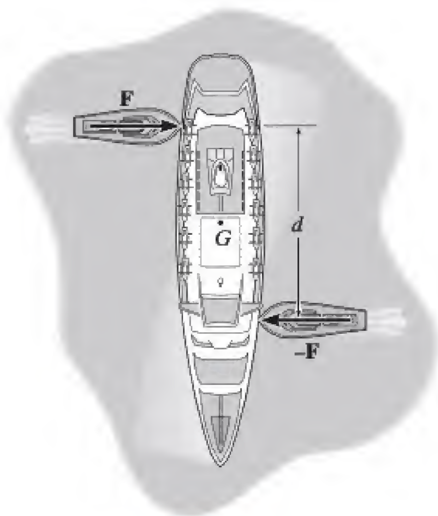
18

•**18-5.** El péndulo de la máquina de impacto Charpy tiene una masa de 50 kg y un radio de giro de $k_A = 1.75$ m. Si se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 0°$, determine su velocidad angular justo antes de que choque con la muestra S, $\theta = 90°$.



Prob. 18-5

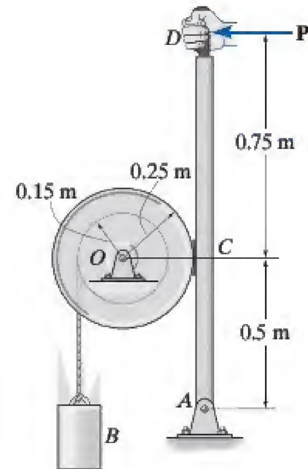
18-6. Cada uno de los dos remolcadores ejerce una fuerza constante **F** en el buque. Estas fuerzas siempre actúan perpendiculares a la línea de centro del buque. Si la masa de éste es m y su radio de giro con respecto a su centro de masa G es k_G, determine su velocidad angular después de que gire 90°. El buque originalmente está en reposo.



Prob. 18-6

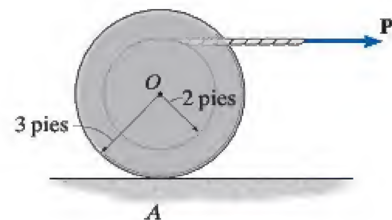
18-7. El tambor tiene una masa de 50 kg y un radio de giro con respecto al pasador en O de $k_O = 0.23$ m. Al partir del punto de reposo, se permite que el bloque B de 15 kg suspendido caiga 3 m sin aplicar el freno ACD. Determine su rapidez en este instante. Si el coeficiente de fricción cinética en la balata C es $\mu_k = 0.5$, determine la fuerza **P** que debe aplicarse en la palanca del freno de mano, el cual detendrá el bloque después de que *descienda* 3 m. Ignore el espesor de la palanca.

*__18-8.__ El tambor tiene una masa de 50 kg y un radio de giro con respecto al pasador en O de $k_O = 0.23$ m. Si el bloque de 15 kg desciende a 3 m/s y se aplica una fuerza $P = 100$ N a la palanca de freno, determine qué tanto desciende el bloque a partir del instante en que se aplica el freno hasta que se detiene. Ignore el espesor de la palanca. El coeficiente de fricción cinética de la balata es $\mu_k = 0.5$.



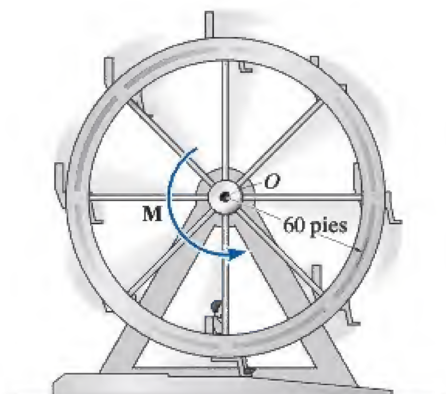
Probs. 18-7/8

•**18-9.** El carrete pesa 150 lb y su radio de giro es $k_O = 2.25$ pies. Si se enrolla una cuerda alrededor de su núcleo interno y el extremo se jala con una fuerza horizontal de $P = 40$ lb, determine su velocidad angular después de que el centro O ha recorrido 10 pies a la derecha. El carrete comienza a moverse del reposo y no se desliza en A cuando rueda. Ignore la masa de la cuerda.



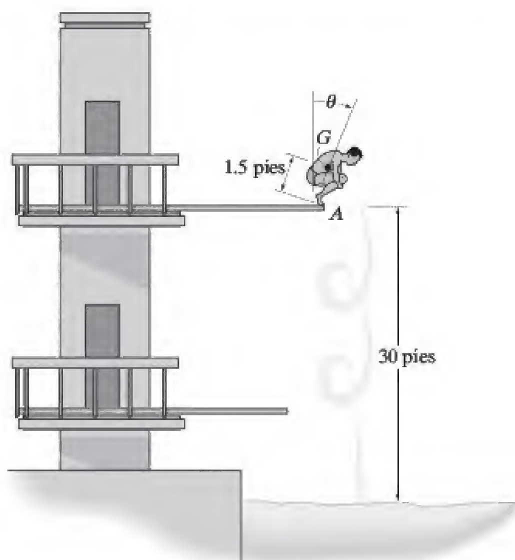
Prob. 18-9

18-10. Un hombre que pesa 180 lb se sienta en una silla de la rueda de la fortuna, la cual, sin el hombre, pesa 15 000 lb y su radio de giro es $k_O = 37$ pies. Si se aplica un par de torsión $M = 80(10^3)$ lb · pie con respecto a O, determine la velocidad angular de la rueda después de que gire 180°. Ignore el peso de las sillas y observe que el hombre permanece en posición vertical a medida que gira la rueda. La rueda comienza a girar desde el punto de reposo en la posición que se muestra.



Prob. 18-10

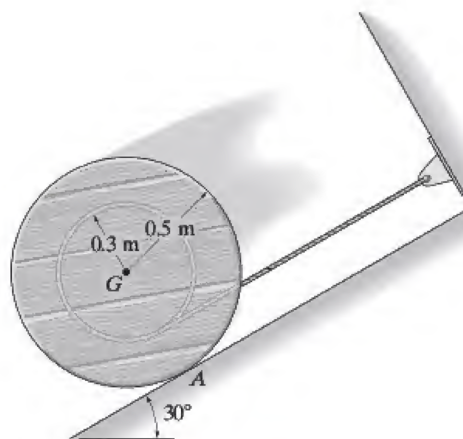
18-11. Un clavadista que pesa 150 lb se enconcha en el extremo del trampolín como se muestra. En esta posición el radio de giro con respecto a su centro de gravedad es $k_G = 1.2$ pies. Mientras mantiene esta posición cuando $\theta = 0°$, gira sobre la punta de su pies en A hasta que pierde el contacto con el trampolín cuando $\theta = 90°$. Si permanece rígido, determine aproximadamente cuántos giros realiza antes de chocar con el agua después de caer 30 pies.



Prob. 18-11

***18-12.** El carrete tiene una masa de 60 kg y un radio de giro $k_G = 0.3$ m. Si se suelta del reposo, determine qué tanto desciende su centro del plano liso antes de que alcance una velocidad angular de $\omega = 6$ rad/s. Ignore la fricción y la masa de la cuerda la cual se enrolla alrededor del núcleo central.

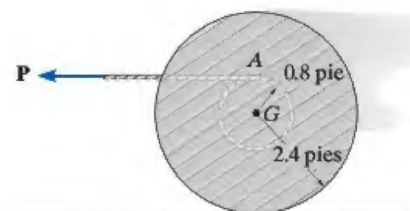
•18-13. Resuelva el problema 18-12 si el coeficiente de fricción cinética entre el carrete y el plano en A es $\mu_k = 0.2$.



Probs. 18-12/13

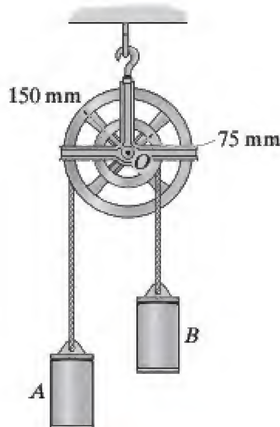
18

18-14. El carrete pesa 500 lb y su radio de giro es $k_G = 1.75$ pies. Se aplica una fuerza horizontal $P = 15$ lb al cable enrollado alrededor de su núcleo interno. Si el carrete originalmente está en reposo, determine su velocidad angular después de que el centro de masa G ha recorrido 6 pies a la izquierda. El carrete rueda sin deslizarse. Ignore la masa del cable.



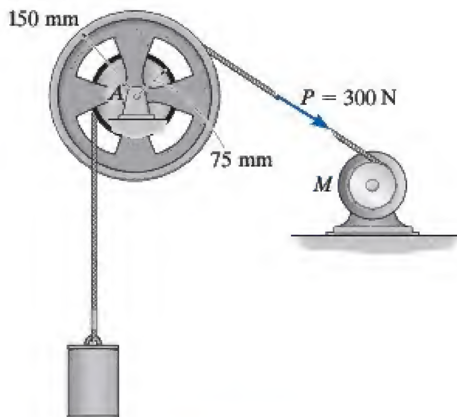
Prob. 18-14

18-15. Si el sistema comienza a moverse a partir del punto de reposo, determine la velocidad de los cilindros de 20 kg A y B después de que A ha descendido una distancia de 2 m. La polea diferencial tiene una masa de 15 kg con un radio de giro con respecto a su centro de masa de $k_O = 100$ mm.



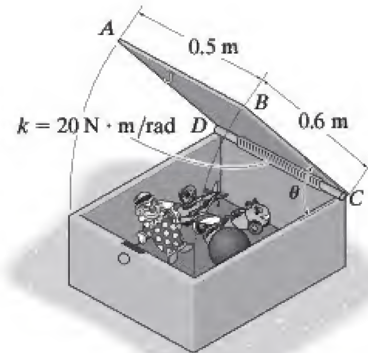
Prob. 18-15

***18-16.** Si el motor M ejerce una fuerza constante de $P = 300$ N en el cable enrollado alrededor del borde externo del carrete, determine la velocidad del cilindro de 50 kg después de que ha recorrido una distancia de 2 m. Inicialmente el sistema está en reposo. El carrete tiene una masa de 25 kg y el radio de giro con respecto a su centro de masa A es $k_A = 125$ mm.



Prob. 18-16

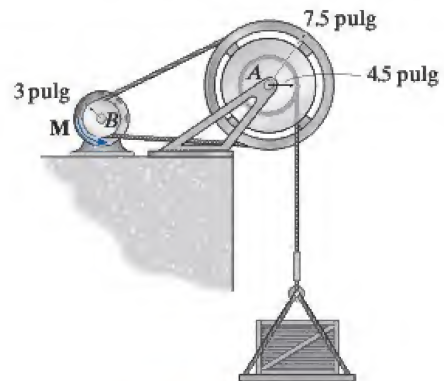
•**18-17.** La tapa de 6 kg de la caja se mantiene en equilibrio por medio del resorte de torsión cuando $\theta = 60°$. Si la tapa se fuerza para que se cierre, $\theta = 0°$, y entonces se suelta, determine su velocidad angular cuando se abre a $\theta = 45°$.



Prob. 18-17

18-18. La rueda y el carrete adjunto tienen un peso combinado de 50 lb y un radio de giro con respecto a su centro de $k_A = 6$ pulg. Si la polea B montada en el motor se somete a un par de torsión $M = 40\ (2 - e^{-0.1\theta})$ lb · pie, donde θ está en radianes, determine la velocidad del embalaje de 200 lb después de que ha ascendido una distancia de 5 pies, a partir del punto de reposo. Ignore la masa de la polea B.

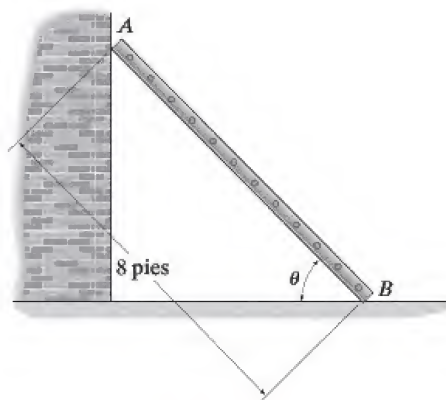
18-19. La rueda y el carrete adjunto tienen un peso combinado de 50 lb y un radio de giro con respecto a su centro de $k_A = 6$ pulg. Si la polea B montada en el motor se somete a un par de torsión $M = 50$ lb · pie, determine la velocidad del embalaje de 200 lb después de que la polea ha realizado 5 revoluciones. Ignore la masa de la polea.



Probs. 18-18/19

18

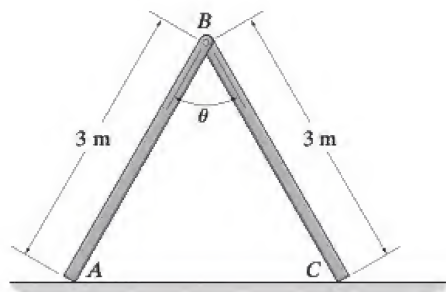
***18-20.** La escalera de 30 lb se coloca contra la pared a un ángulo de $\theta = 45°$ como se muestra. Si se suelta desde el punto de reposo, determine su velocidad angular en el instante justo antes de $\theta = 0°$. Ignore la fricción y suponga que la escalera es una barra delgada uniforme.



Prob. 18-20

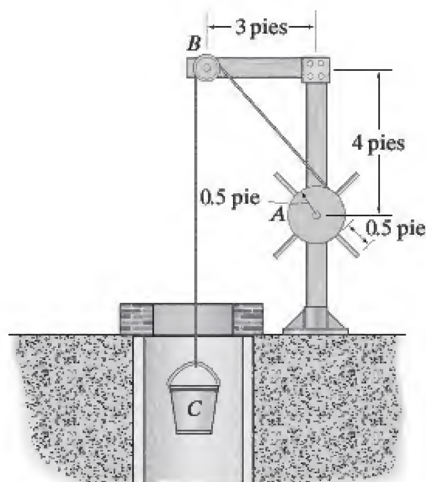
•**18-21.** Determine la velocidad angular de las dos barras de 10 kg cuando $\theta = 180°$ si se sueltan desde el punto de reposo en la posición $\theta = 60°$. Ignore la fricción.

18-22. Determine la velocidad angular de las dos barras de 10 kg cuando $\theta = 90°$ si se sueltan desde el punto de reposo en la posición $\theta = 60°$. Ignore la fricción.



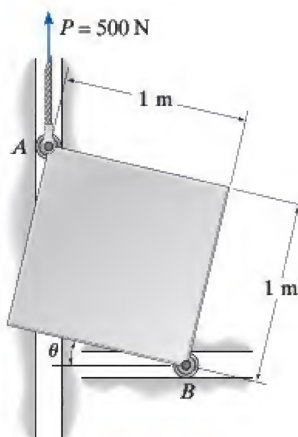
Probs. 18-21/22

18-23. Si la cubeta de 50 lb se suelta desde el punto de reposo, determine su velocidad antes de que haya caído una distancia de 10 pies. El molinete A puede considerarse como un cilindro de 30 lb, mientras que los rayos son barras delgadas, cada una con un peso de 2 lb. Ignore el peso de la polea.



Prob. 18-23

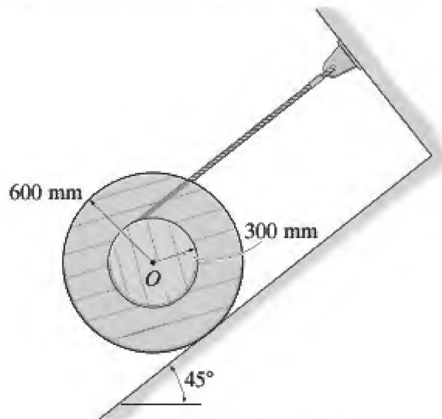
***18-24.** Si la esquina A de la placa de 60 kg se somete a una fuerza vertical $P = 500$ N y la placa se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 0°$, determine su velocidad angular cuando $\theta = 45°$.



Prob. 18-24

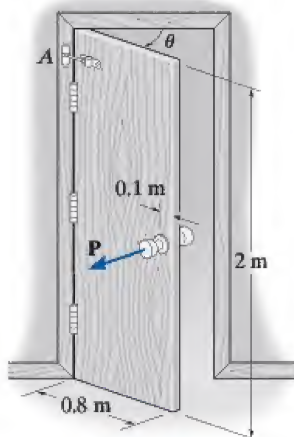
•**18-25.** El carrete tiene una masa de 100 kg y un radio de giro de 400 mm con respecto a su centro de masa O. Si se suelta desde el punto de reposo, determine su velocidad angular después de que su centro O desciende por el plano una distancia de 2 m. La superficie de contacto entre el carrete y el plano inclinado es lisa.

18-26. El carrete tiene una masa de 100 kg y un radio de giro de 400 mm con respecto a su centro de masa O. Si se suelta desde el punto de reposo, determine su velocidad angular después de que su centro O desciende por el plano una distancia de 2 m. El coeficiente de fricción cinética entre el carrete y el plano inclinado es $\mu_k = 0.15$.



Probs. 18-25/26

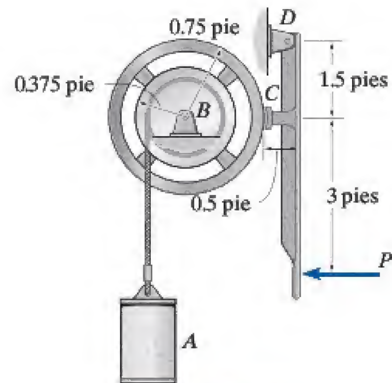
18-27. La puerta uniforme tiene una masa de 20 kg y puede considerarse como una placa delgada con las dimensiones que se indican. Si está conectada a un resorte de torsión en A, cuya rigidez es $k = 80$ N · m/rad, cuando se cierra en $\theta = 0°$, después de que se abre cuando $\theta = 90°$ y se suelta desde el punto de reposo, determine el giro inicial relativo del resorte en radianes de modo que la puerta tenga una velocidad inicial angular de 12 rad/s. *Sugerencia:* para un resorte de torsión, $M = k\theta$, donde k es la rigidez y θ el ángulo de torsión.



Prob. 18-27

*__18-28.__ El cilindro A de 50 lb va en descenso a una rapidez de 20 pies/s cuando se aplica el freno. Si la rueda B debe detenerse después de haber realizado 5 revoluciones, determine la fuerza constante **P** que debe aplicarse a la palanca de freno. El coeficiente de fricción cinética entre la balata C y la rueda es $\mu_k = 0.5$. El peso de la rueda es de 25 lb y el radio de giro con respecto a su centro de masa es $k = 0.6$ pie.

•**18-29.** Cuando se aplica una fuerza $P = 30$ lb a la palanca de freno, el cilindro A de 50 lb va en descenso a una rapidez de 20 pies/s. Determine el número de revoluciones que la rueda B realizará antes de detenerla. El coeficiente de fricción cinética entre la balata C y la rueda es $\mu_k = 0.5$. El peso de la rueda es de 25 lb y el radio de giro con respecto a su centro de masa es $k = 0.6$ pie.



Probs. 18-28/29

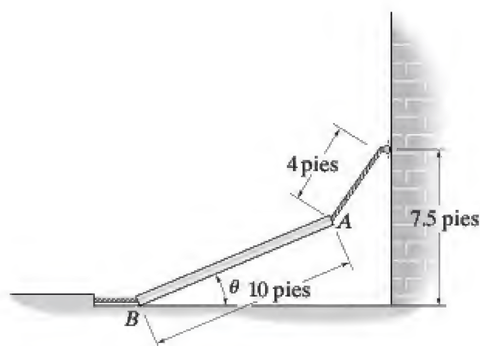
18-30. El bloque de 100 lb es transportado una corta distancia por medio de dos rodillos cilíndricos, cada uno de 35 lb de peso. Si se aplica una fuerza horizontal $P = 25$ lb al bloque, determine su rapidez después de que se ha desplazado 2 pies a la izquierda. Originalmente el bloque está en reposo. No hay deslizamiento.



Prob. 18-30

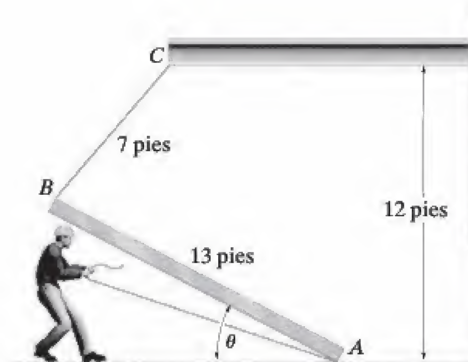
18

18-31. La viga que pesa 150 lb está sostenida por dos cables. Si el cable se corta en el extremo B de modo que la viga se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 30°$, determine la rapidez a la cual el extremo A choca con la pared. Ignore la fricción en B.



Prob. 18-31

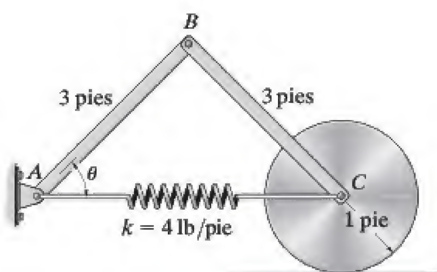
18-33. La viga pesa 1500 lb y será levantada hasta una posición vertical mediante un jalón muy lento desde su extremo inferior A. Si la cuerda se rompe cuando $\theta = 60°$ y la viga de hecho está en reposo, determine la velocidad de A cuando la cuerda BC llegue a su posición vertical. Ignore la fricción, la masa de las cuerdas y trate la viga como una barra delgada.



Prob. 18-33

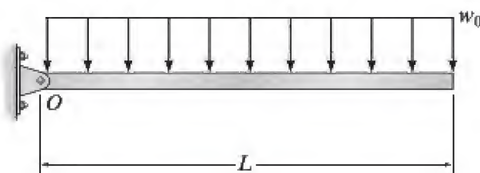
18

***18-32.** El ensamble se compone de dos barras delgadas de 15 lb y un disco de 20 lb. Si el resorte no está alargado cuando $\theta = 45°$ y el ensamble se suelta desde el punto de reposo en esta posición, determine la velocidad angular de la barra AB cuando $\theta = 0°$. El disco rueda sin deslizarse.



Prob. 18-32

18-34. La barra delgada uniforme de masa m y longitud L se somete a una carga distribuida uniforme w_0, la cual siempre actúa de manera perpendicular al eje de la barra. Si ésta se suelta del punto de reposo desde la posición que se muestra, determine su velocidad angular en el instante en que ha girado 90°. Resuelva el problema de rotación en (a) el plano horizontal y (b) el plano vertical.



Prob. 18-34

18.5 Conservación de la energía

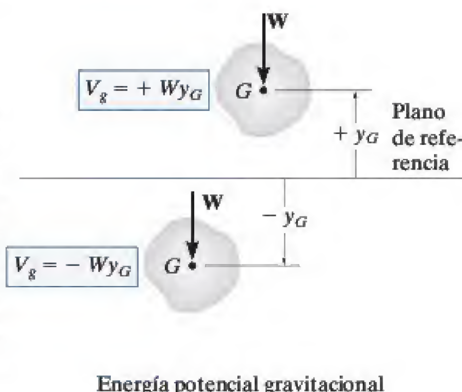


Fig. 18-16

Cuando un sistema de fuerzas que actúa en un cuerpo rígido se compone de sólo *fuerzas conservadoras*, puede utilizarse el teorema de la conservación de la energía para resolver un problema que de lo contrario se resolvería con el principio de trabajo y energía. Este teorema suele ser más fácil de aplicar puesto que el trabajo de una fuerza conservadora es *independiente de la trayectoria* y depende sólo de las posiciones inicial y final del cuerpo. En la sección 14.5 se demostró que el trabajo de una fuerza conservadora puede expresarse como la diferencia de la energía potencial del cuerpo medida con respecto a una referencia o un plano de referencia seleccionados.

Energía potencial gravitacional. Como el peso total de un cuerpo puede considerarse como concentrado en su centro de gravedad, su *energía potencial gravitacional* se determina al conocer la altura de su centro de gravedad sobre o bajo un plano de referencia horizontal.

$$V_g = W y_G \tag{18-15}$$

En este caso la energía potencial es *positiva* cuando y_G es positiva hacia arriba, puesto que el peso tiene la capacidad de realizar *trabajo positivo* cuando el cuerpo regresa al plano de referencia, figura 18-16. Asimismo, si G está *bajo* el plano de referencia ($-y_G$), la energía potencial gravitacional es *negativa*, puesto que el peso realiza *trabajo negativo* cuando el cuerpo vuelve al plano de referencia.

Energía potencial elástica. La fuerza desarrollada por un resorte elástico también es una fuerza conservadora. La *energía potencial elástica* que un resorte imparte a un cuerpo conectado cuando el resorte se alarga o comprime desde una posición no deformada ($s = 0$) hasta una posición final s, figura 18-17, es

$$V_e = +\tfrac{1}{2}ks^2 \tag{18-16}$$

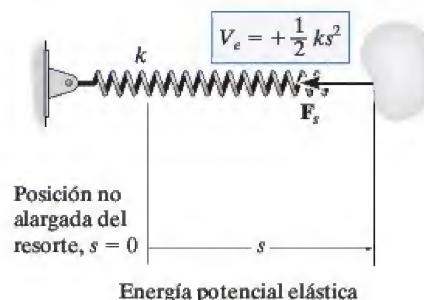


Fig. 18-17

En la posición deformada, la fuerza del resorte que actúa *en el cuerpo* siempre tiene la capacidad de realizar trabajo positivo cuando el resorte regresa a su posición no deformada original (vea la sección 14.5).

18

Conservación de la energía. En general, si un cuerpo se somete tanto a fuerzas gravitacionales como elásticas, la *energía potencial* total puede expresarse como una función potencial representada como la suma algebraica

$$V = V_g + V_e \tag{18-17}$$

Aquí la medición de V depende de la ubicación del cuerpo con respecto a un plano de referencia seleccionado.

Como el trabajo de fuerzas conservadoras puede escribirse como una diferencia de sus energías potenciales, es decir, $(\Sigma U_{1-2})_{\text{cons}} = V_1 - V_2$, ecuación 14-16, podemos reescribir el principio de trabajo y energía para un cuerpo rígido como

$$T_1 + V_1 + (\Sigma U_{1-2})_{\text{no cons}} = T_2 + V_2 \tag{18-18}$$

En este caso $(\Sigma U_{1-2})_{\text{no cons}}$ representa el trabajo de las fuerzas no conservadoras, como la fricción. Si este término es cero, entonces

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{18-19}$$

18

Esta ecuación se conoce como energía mecánica de conservación. Establece que la *suma* de las energías potencial y cinética del cuerpo permanece *constante* cuando el cuerpo se mueve de una posición a otra. También es válida para un sistema de cuerpos rígidos lisos conectados por pasador, libres de fricción, cuerpos conectados por cuerdas inextensibles y cuerpos acoplados con otros cuerpos. En todos estos casos, las fuerzas que actúan en los puntos de contacto se *eliminan* del análisis, puesto que ocurren en pares colineales iguales pero opuestos y cada par de fuerzas se recorre una distancia igual cuando el sistema se desplaza.

Es importante recordar que solamente los problemas que implican sistemas de fuerzas conservadoras pueden resolverse con la ecuación 18-19. Como se planteó en la sección 14.5, las fuerzas de fricción u otras fuerzas resistentes al avance, las cuales dependen de la velocidad o aceleración, son no conservadoras. El trabajo de fuerzas como ésas se transforma en energía térmica utilizada para calentar las superficies de contacto, y por consiguiente esta energía se disipa en el medio circundante y no puede recuperarse. Por consiguiente, los problemas que implican fuerzas de fricción se resuelven ya sea por el principio de trabajo y energía de la forma de la ecuación 18-18, si es pertinente, o por las ecuaciones de movimiento.



Los resortes de la parte superior de la puerta de la cochera se enrollan cuando la puerta baja. Cuando la puerta sube, la energía potencial almacenada en los resortes se transforma entonces en energía potencial gravitacional del peso de la puerta, lo que facilita su apertura.

Procedimiento para el análisis

La ecuación de conservación de la energía se utiliza para resolver problemas que implican *velocidad*, *desplazamiento* y *sistemas de fuerzas conservadoras*. Para su aplicación se sugiere el siguiente procedimiento.

Energía potencial.

- Trace dos diagramas que muestren el cuerpo localizado en sus posiciones inicial y final a lo largo de la trayectoria.
- Si el centro de gravedad, G, se somete a un *desplazamiento vertical*, establezca un plano de referencia horizontal fijo con respecto al cual se medirá la energía potencial gravitacional del cuerpo V_g.
- Los datos de elevación y_G del centro de gravedad del cuerpo con respecto al plano de referencia y de la extensión o compresión de cualquier resorte de conexión pueden determinarse con la geometría del problema y anotarse en los dos diagramas.
- La energía potencial se determina con $V = V_g + V_e$. Donde $V_g = Wy_G$, la cual puede ser positiva o negativa y $V_e = \frac{1}{2}ks^2$, la cual siempre es positiva.

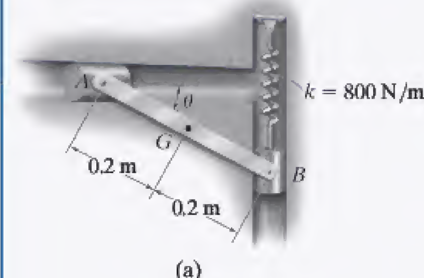
Energía cinética.

- La energía cinética del cuerpo se compone de dos partes, es decir, energía cinética de traslación, $T = \frac{1}{2}mv_G^2$ y energía cinética de rotación, $T = \frac{1}{2}I_G\omega^2$.
- Los diagramas cinemáticos de velocidad pueden ser útiles para establecer una *relación* entre v_G y ω.

Conservación de la energía.

- Aplique la ecuación de conservación de la energía $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$.

EJEMPLO 18.6



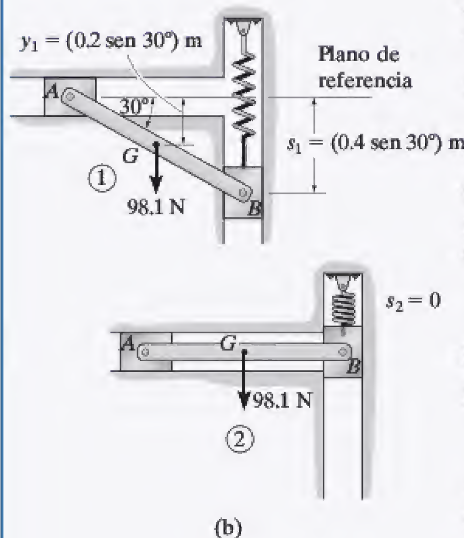
(a)

La barra AB de 10 kg que se muestra en la figura 18-18*a* está restringida de modo que sus extremos se mueven en las ranuras horizontal y vertical. La rigidez del resorte es $k = 800$ N/m y no está alargado cuando $\theta = 0°$. Determine la velocidad angular de AB cuando $\theta = 0°$, si la barra se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 30°$. Ignore la masa de los bloques corredizos.

SOLUCIÓN

Energía potencial. Los dos diagramas de la barra en sus posiciones inicial y final, se muestran en la figura 18-18*b*. El plano de referencia, utilizado para medir la energía potencial gravitacional, se coloca en línea con la barra cuando $\theta = 0°$.

Cuando la barra está en la posición 1, el centro de gravedad G está *debajo del plano de referencia* y por tanto su energía potencial gravitacional es *negativa*. Además, en el resorte se almacena energía potencial elástica (positiva), puesto que se alarga una distancia $s_1 = (0.4 \text{ sen } 30°)$m. Por tanto,



(b)

$$V_1 = -Wy_1 + \tfrac{1}{2}ks_1^2$$
$$= -(98.1 \text{ N})(0.2 \text{ sen } 30° \text{ m}) + \tfrac{1}{2}(800 \text{ N/m})(0.4 \text{ sen } 30° \text{ m})^2 = 6.19 \text{ J}$$

Cuando la barra está en la posición 2, su energía potencial es cero, puesto que el centro de gravedad G está en el plano de referencia y el resorte no está alargado, $s_2 = 0$. Por consiguiente,

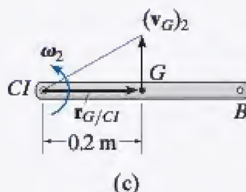
$$V_2 = 0$$

Energía cinética. La barra se suelta del punto de reposo desde la posición 1, por tanto $(\mathbf{v}_G)_1 = \boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{0}$, y entonces

$$T_1 = 0$$

En la posición 2, la velocidad angular es $\boldsymbol{\omega}_2$ y el centro de masa de la barra tiene una velocidad de $(\mathbf{v}_G)_2$. Por consiguiente,

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega_2^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(10 \text{ kg})(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{12}(10 \text{ kg})(0.4 \text{ m})^2\right]\omega_2^2$$



(c)

Fig. 18-18

Con *cinemática*, $(\mathbf{v}_G)_2$ puede relacionarse con $\boldsymbol{\omega}_2$ como se muestra en la figura 18-18*c*. En el instante considerado, el centro instantáneo de velocidad cero *(CI)* de la barra está en el punto A; de ahí que $(v_G)_2 = (r_{G/CI})\omega_2 = (0.2 \text{ m})\omega_2$. Si sustituimos en la expresión anterior y simplificamos (o utilizamos $\frac{1}{2}I_{CI}\omega_2^2$), obtenemos

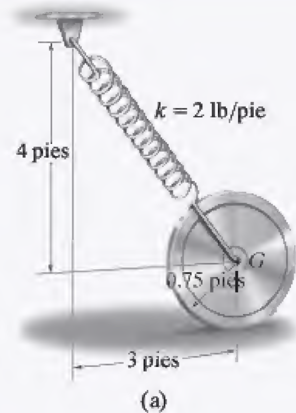
$$T_2 = 0.2667\omega_2^2$$

Conservación de la energía.

$$\{T_1\} + \{V_1\} = \{T_2\} + \{V_2\}$$
$$\{0\} + \{6.19 \text{ J}\} = \{0.2667\omega_2^2\} + \{0\}$$
$$\omega_2 = 4.82 \text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 18.7

La rueda mostrada en la figura 18-19*a* pesa 30 lb y su radio de giro es $k_G = 0.6$ pie. Está conectada a un resorte de rigidez $k = 2$ lb/pie y longitud no alargada de 1 pie. Si el disco se suelta desde el punto de reposo en la posición que se muestra y rueda sin deslizarse, determine su velocidad angular en el instante en que G se mueve 3 pies a la izquierda.

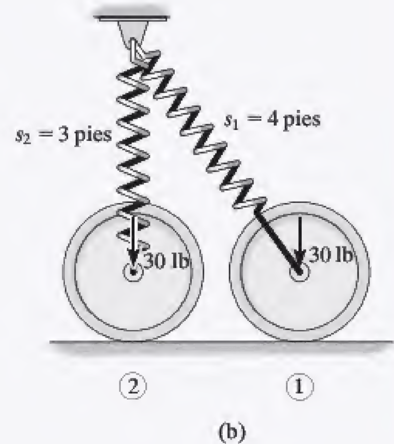


(a)

SOLUCIÓN

Energía potencial. En la figura 18-19*b* se muestran dos diagramas de la rueda, cuando está en las posiciones inicial y final. En este caso no se requiere un plano de referencia gravitacional puesto que el peso no se desplaza verticalmente. Según la geometría del problema el resorte está alargado $s_1 = \left(\sqrt{3^2 + 4^2} - 1\right) = 4$ pies pies en la posición inicial y $s_2 = (4 - 1) = 3$ pies en la posición final. Por consiguiente,

$$V_1 = \tfrac{1}{2}ks_1^2 = \tfrac{1}{2}(2\text{ lb/pie})(4\text{ pies})^2 = 16\text{ J}$$
$$V_2 = \tfrac{1}{2}ks_2^2 = \tfrac{1}{2}(2\text{ lb/pie})(3\text{ pies})^2 = 9\text{ J}$$



(b)

Energía cinética. El disco se suelta desde el punto de reposo y por tanto $(\mathbf{v}_G)_1 = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{0}$. Por consiguiente,

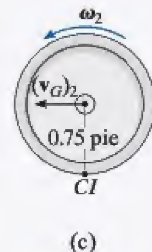
$$T_1 = 0$$

Como el centro instantáneo de velocidad cero está en el suelo, figura 18-19*c*, tenemos

$$T_2 = \frac{1}{2}I_{CI}\omega_2^2$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{30\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}\right)(0.6\text{ pie})^2 + \left(\frac{30\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}\right)(0.75\text{ pie})^2\right]\omega_2^2$$
$$= 0.4297\omega_2^2$$

Conservación de la energía.

$$\{T_1\} + \{V_1\} = \{T_2\} + \{V_2\}$$
$$\{0\} + \{16\text{ J}\} = \{0.4297\omega_2^2\} + \{9\text{ J}\}$$
$$\omega_2 = 4.04\text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$



(c)

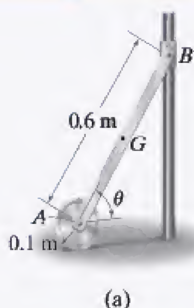
Fig. 18-19

NOTA: si el principio de trabajo y energía se utilizara para resolver este problema, entonces se tendría que determinar el trabajo del resorte por la consideración tanto del cambio de magnitud como de dirección de la fuerza del resorte.

18

18

EJEMPLO 18.8



(a)

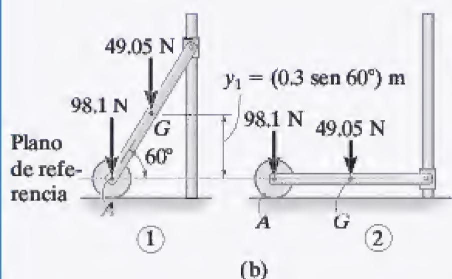
El disco homogéneo de 10 kg que se muestra en la figura 18-20*a* está conectado a una barra *AB* uniforme de 5 kg. Si el ensamble se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 60°$, determine la velocidad angular de la barra cuando $\theta = 0°$. Suponga que el disco rueda sin deslizarse. Ignore la fricción a lo largo de la guía y la masa del collarín en *B*.

SOLUCIÓN

Energía potencial. En la figura 18-20*b* se muestran dos diagramas de la barra y el disco, cuando están en sus posiciones inicial y final. Por conveniencia el plano de referencia pasa por el punto *A*.

Cuando el sistema está en la posición 1, sólo el peso de la barra tiene energía potencial positiva. Por tanto,

$$V_1 = W_r y_1 = (49.05 \text{ N})(0.3 \text{ sen } 60° \text{ m}) = 12.74 \text{ J}$$



(b)

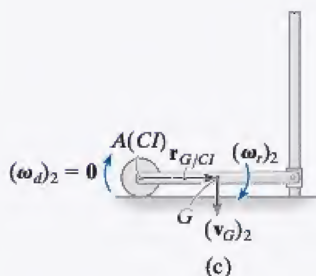
Cuando el sistema está en la posición 2, tanto el peso de la barra como el peso del disco tienen energía potencial cero. ¿Por qué? Por consiguiente,

$$V_2 = 0$$

Energía cinética. Como todo el sistema está en reposo en la posición inicial,

$$T_1 = 0$$

En la posición final la barra tiene una velocidad angular $(\boldsymbol{\omega}_r)_2$ y su centro de masa tiene una velocidad $(\mathbf{v}_G)_2$, figura 18-20*c*. Como la barra está *totalmente extendida* en esta posición, el disco está momentáneamente en reposo, y $(\boldsymbol{\omega}_d)_2 = \mathbf{0}$ y $(\mathbf{v}_A)_2 = \mathbf{0}$. Por lo que se refiere a la barra $(\mathbf{v}_G)_2$ puede relacionarse con $(\boldsymbol{\omega}_r)_2$ con respecto al centro instantáneo de velocidad cero, el cual se encuentra en el punto *A*, figura 18-20*c*. De modo que $(v_G)_2 = r_{G/CI}(\omega_r)_2$ o $(v_G)_2 = 0.3(\omega_r)_2$. Por consiguiente,



(c)

Fig. 18-20

$$T_2 = \frac{1}{2}m_r(v_G)_2^2 + \frac{1}{2}I_G(\omega_r)_2^2 + \frac{1}{2}m_d(v_A)_2^2 + \frac{1}{2}I_A(\omega_d)_2^2$$

$$= \frac{1}{2}(5 \text{ kg})[(0.3 \text{ m})(\omega_r)_2]^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}(5 \text{ kg})(0.6 \text{ m})^2\right](\omega_r)_2^2 + 0 + 0$$

$$= 0.3(\omega_r)_2^2$$

Conservación de la energía.

$$\{T_1\} + \{V_1\} = \{T_2\} + \{V_2\}$$

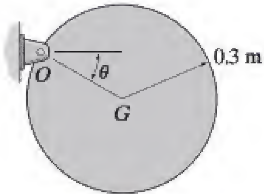
$$\{0\} + \{12.74 \text{ J}\} = \{0.3(\omega_R)_2^2\} + \{0\}$$

$$(\omega_r)_2 = 6.52 \text{ rad/s} \circlearrowright \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

NOTA: también podemos determinar la energía cinética final de la barra por medio de $T_2 = \frac{1}{2}I_{CI}\omega_2^2$.

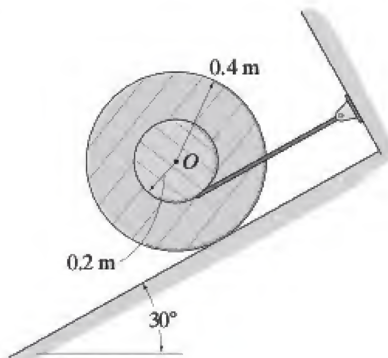
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F18-7. Si el disco de 30 kg se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 0°$, determine su velocidad angular cuando $\theta = 90°$.



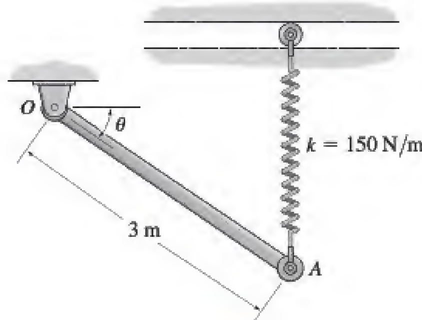
F18-7

F18-8. El carrete de 50 kg tiene un radio de giro con respecto a su centro O de $k_O = 300$ mm. Si se suelta desde el punto de reposo, determine su velocidad angular cuando su centro O ha descendido 6 m por el plano inclinado liso.



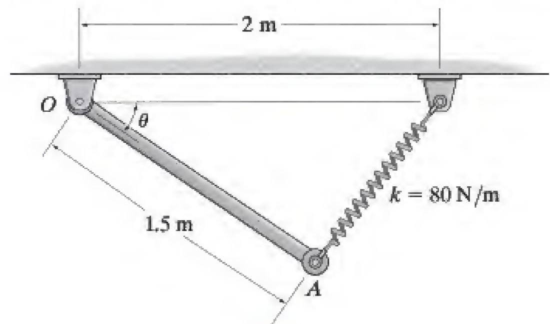
F18-8

F18-9. La barra OA de 60 kg se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 0°$. Determine su velocidad angular cuando $\theta = 45°$. El resorte permanece vertical durante el movimiento y cuando $\theta = 0°$ no está alargado.



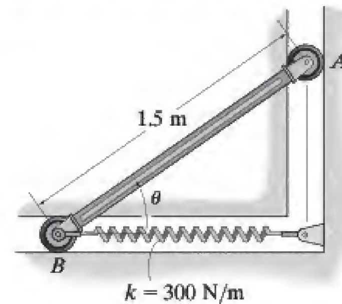
F18-9

F18-10. La barra de 30 kg se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 0°$. Determine su velocidad angular cuando $\theta = 90°$. Cuando $\theta = 0°$ el resorte no está alargado.



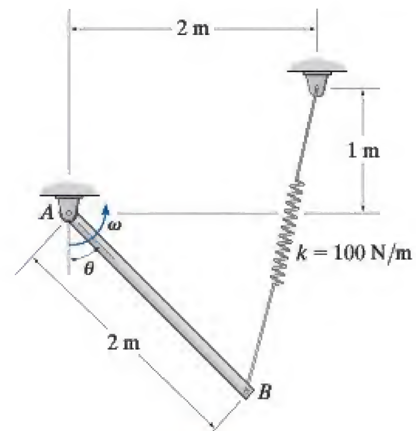
F18-10

F18-11. La barra de 30 kg se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 45°$. Determine su velocidad angular cuando $\theta = 0°$. Cuando $\theta = 45°$ el resorte no está alargado.



F18-11

F18-12. La barra de 20 kg se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 0°$. Determine su velocidad angular cuando $\theta = 90°$. La longitud no alargada del resorte es de 0.5 m.



F18-12

PROBLEMAS

18-35. Resuelva el problema 18-5 con la ecuación de conservación de la energía.

***18-36.** Resuelva el problema 18-12 con la ecuación de conservación de la energía.

•18-37. Resuelva el problema 18-32 con la ecuación de conservación de la energía.

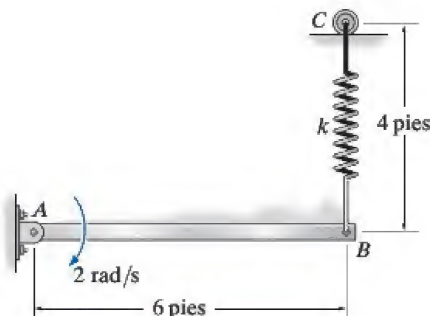
18-38. Resuelva el problema 18-31 con la ecuación de conservación de la energía.

18-39. Resuelva el problema 18-11 con la ecuación de conservación de la energía.

***18-40.** En el instante que se muestra, la barra de 50 lb gira en el sentido de las manecillas del reloj a 2 rad/s. El resorte conectado a su extremo siempre permanece vertical debido a la guía de rodillo C. Si la longitud no alargada del resorte es de 2 pies y su rigidez es $k = 6$ lb/pie, determine la velocidad angular de la barra en el momento en que ha girado 30° en el sentido de las manecillas del reloj.

•18-41. En el instante que se muestra, la barra de 50 lb gira en el sentido de las manecillas del reloj a 2 rad/s. El resorte conectado a su extremo siempre permanece vertical debido a la guía de rodillo C. Si la longitud no alargada del resorte es de 2 pies y su rigidez es $k = 12$ lb/pie, determine el ángulo θ, medido con respecto a la horizontal, hacia la cual la barra gira antes de que se detenga momentáneamente.

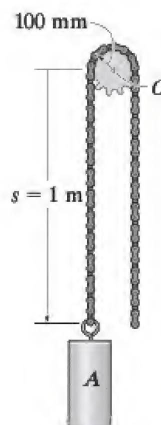
18



Probs. 18-40/41

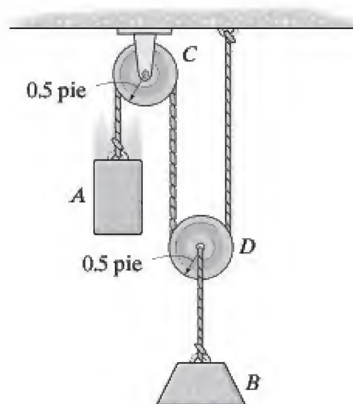
18-42. Una cadena cuya masa se ignora está colgada sobre la rueda dentada que tiene una masa de 2 kg y un radio de giro de $k_O = 50$ mm. Si el bloque A de 4 kg se suelta del punto de reposo desde la posición $s = 1$ m, determine la velocidad angular de la rueda dentada cuando $s = 2$ m.

18-43. Resuelva el problema 18-42 si la masa de la cadena por unidad de longitud es de 0.8 kg/m. En el cálculo ignore la parte de la cadena colgada sobre la rueda dentada.



Probs. 18-42/43

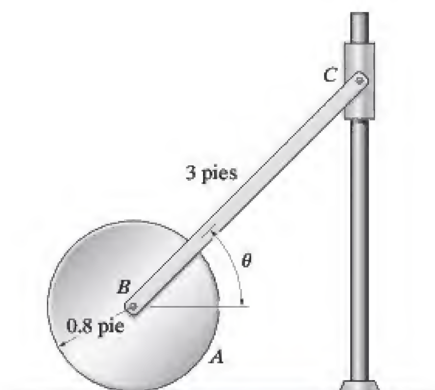
***18-44.** El sistema se compone de los bloques A y B de 60 lb y 20 lb, respectivamente y de las poleas C y D de 5 lb que pueden ser tratadas como discos delgados. Determine la rapidez del bloque A después de que el bloque B se ha elevado 5 pies, a partir del punto de reposo. Suponga que la cuerda no se desliza sobre las poleas e ignore la masa de la cuerda.



Prob. 18-44

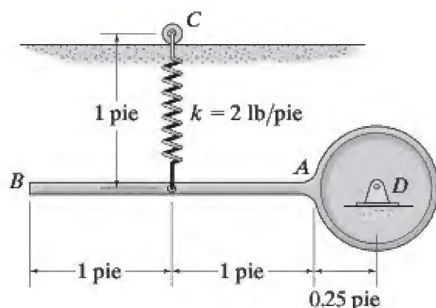
•**18-45.** El sistema se compone de un disco A de 20 lb, una barra delgada BC de 4 lb y un collarín C de 1 lb. Si el disco rueda sin deslizarse, determine la velocidad del collarín cuando la barra está horizontal, es decir, $\theta = 0°$. El sistema se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 45°$.

18-46. El sistema se compone de un disco A de 20 lb, una barra delgada BC de 4 lb y un collarín C de 1 lb. Si el disco rueda sin deslizarse, determine la velocidad del collarín en el instante $\theta = 30°$. El sistema se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 45°$.



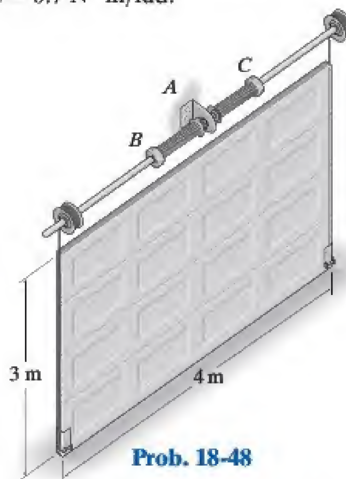
Probs. 18-45/46

18-47. El péndulo se compone de una barra BA de 2 lb y un disco de 6 lb. El resorte se alarga 0.3 pie cuando la barra está horizontal como se muestra. Si el péndulo se suelta desde el punto de reposo y gira alrededor del punto D, determine su velocidad angular en el instante cuando la barra está vertical. El rodillo C permite que el resorte permanezca vertical cuando la barra falla.



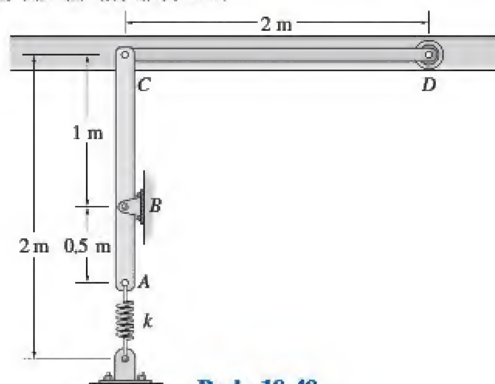
Prob. 18-47

*__18-48.__ La puerta de cochera uniforme tiene una masa de 150 kg y corre a lo largo de correderas lisas en sus extremos. Se levanta por medio de dos resortes, cada uno de los cuales está conectado a la ménsula de anclaje en A y la flecha de contrapeso en B y C. Cuando la puerta sube, los resortes comienzan a desenrollarse de la flecha, con lo cual ayudan a subir la puerta. Si cada resorte proporciona un momento de torsión de $M = (0.7\theta)$ N · m, donde θ está en radianes, determine el ángulo θ_0 al cual tanto el resorte de enrollado izquierdo como el resorte de enrollado derecho deberán montarse de modo que la puerta quede completamente balanceada por los resortes, es decir, cuando la puerta esté en la posición vertical y se le imprima una leve fuerza hacia arriba, los resortes la subirán a lo largo de las correderas laterales hasta el plano horizontal sin ninguna velocidad angular final. *Nota:* la energía potencial elástica de un resorte de torsión es $V_e = \frac{1}{2}k\theta^2$, donde $M = k\theta$ y en este caso $k = 0.7$ N · m/rad.



Prob. 18-48

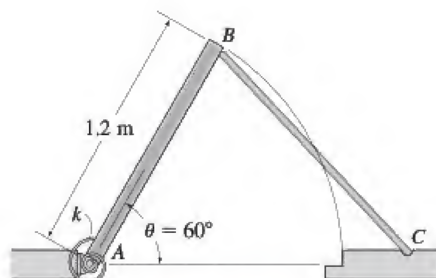
•**18-49.** La puerta de cochera CD tiene una masa de 50 kg y puede ser tratada como una placa delgada. Determine la longitud no alargada de cada uno de los dos resortes laterales cuando la puerta está abierta, de modo que cuando la puerta caiga libremente desde la posición abierta se detenga cuando alcance su posición de totalmente cerrada, es decir, cuando AC gire 180°. Cada uno de los resortes laterales tiene una rigidez de $k = 350$ N/m. Ignore la masa de las barras laterales AC.



Prob. 18-49

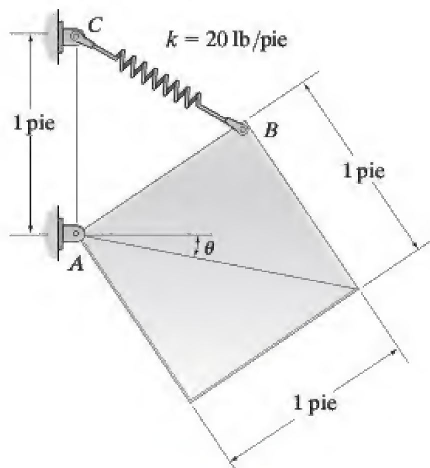
18

18-50. El panel de puerta rectangular uniforme tiene una masa de 25 kg y se mantiene en equilibrio sobre la horizontal en la posición $\theta = 60°$ por la barra BC. Determine la rigidez requerida del resorte de torsión en A, de modo que la velocidad angular de la puerta sea cero cuando se cierre ($\theta = 0°$) una vez que la barra de soporte BC se quite. Cuando $\theta = 60°$ el resorte no está deformado.



Prob. 18-50

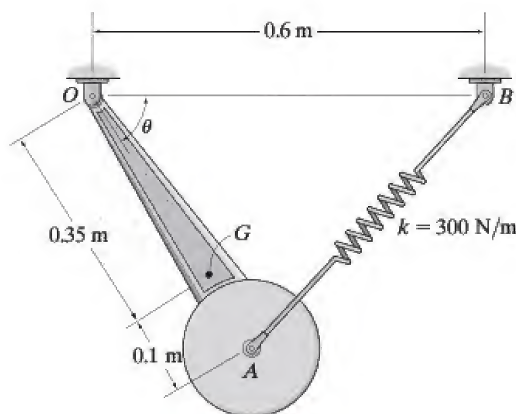
*__18-52.__ La placa cuadrada de 50 lb está sujeta por medio de un pasador en el esquina A y conectada a un resorte que tiene una rigidez de $k = 20$ lb/pie. Si la placa se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 0°$, determine su velocidad angular cuando $\theta = 90°$. Cuando $\theta = 0°$, el resorte no está alargado.



Prob. 18-52

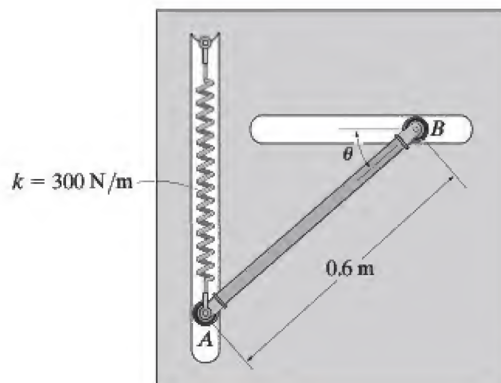
18

18-51. El péndulo de 30 kg tiene su centro de masa en G y un radio de giro con respecto al punto G de $k_G = 300$ mm. Si se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 0°$, determine su velocidad angular cuando $\theta = 90°$. El resorte AB tiene una rigidez de $k = 300$ N/m y cuando $\theta = 0°$ el resorte no está alargado.



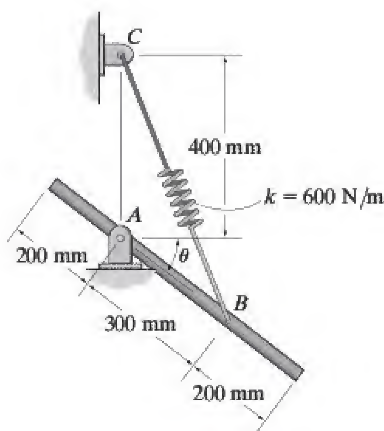
Prob. 18-51

•**18-53.** Un resorte que tiene una rigidez de $k = 300$ N/m está conectado al extremo de la barra de 15 kg y cuando $\theta = 0°$ no está alargado. Si la barra se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 0°$, determine su velocidad angular cuando $\theta = 30°$. El movimiento ocurre en el plano vertical.



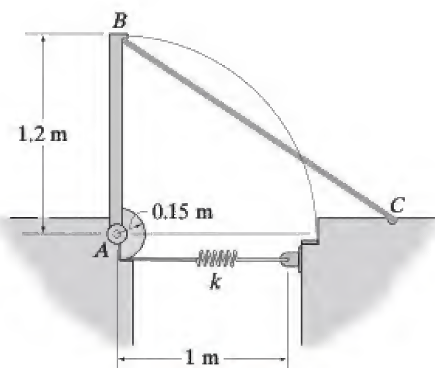
Prob. 18-53

18-54. Si la barra de 6 kg se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 30°$, determine su velocidad angular cuando $\theta = 0°$. El resorte conectado tiene una rigidez de $k = 600$ N/m, con una longitud no alargada de 300 mm.



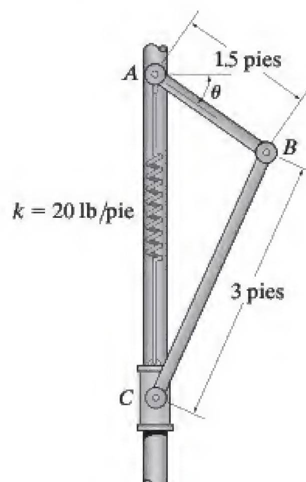
Prob. 18-54

18-55. La barra CB mantiene el panel de puerta rectangular de 50 kg en posición vertical. Cuando se quita la barra, el panel se cierra por su propio peso. El movimiento del panel lo controla un resorte conectado a un cable enrollado en la media polea. Para reducir los portazos excesivos, la velocidad angular del panel de puerta se limita a 0.5 rad/s en el momento del cierre. Determine la rigidez mínima k del resorte si éste no está alargado cuando el panel está en la posición vertical. Ignore la masa de la media polea.



Prob. 18-55

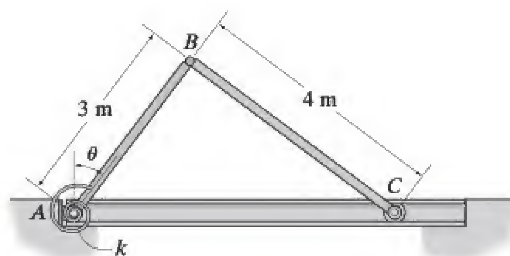
*__18-56.__ Las barras AB y BC pesan 15 lb y 30 lb, respectivamente. El collarín C se desliza libremente a lo largo de la guía vertical que pesa 5 lb. Si el sistema se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 0°$, determine la velocidad angular de las barras cuando $\theta = 90°$. Cuando $\theta = 0°$, el resorte no está alargado.



Prob. 18-56

•**18-57.** Determine la rigidez k de la muelle de torsión A, de modo que si las barras se sueltan desde el punto de reposo cuando $\theta = 0°$, la velocidad de la barra AB es de 0.5 rad/s en la posición cerrada, $\theta = 90°$. La muelle no está enrollada cuando $\theta = 0°$. La masa de las barras por unidad de longitud es de 10 kg/m.

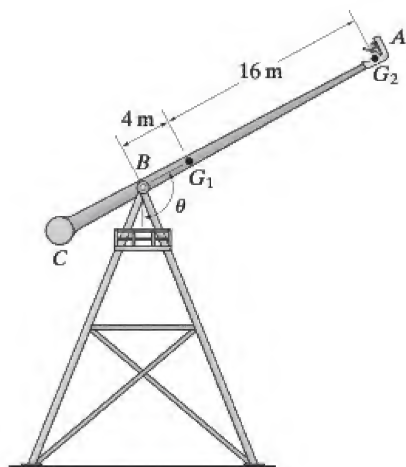
18-58. La rigidez de la muelle de torsión en A es $k = 900$ N · m/rad y cuando $\theta = 0°$ está desenrollada. Determine la velocidad angular de las barras, AB y BC, cuando $\theta = 0°$, si se sueltan desde el punto de reposo en la posición cerrada, $\theta = 90°$. La masa por unidad de longitud de las barras es de 10 kg/m.



Probs. 18-57/58

18

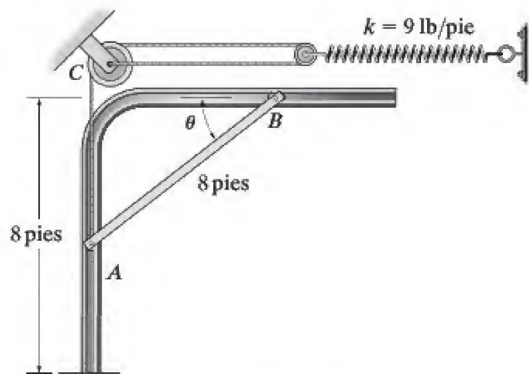
18-59. El brazo y el asiento del juego mecánico tienen una masa de 1.5 Mg, con el centro de masa localizado en el punto G_1. El pasajero sentado en A tiene una masa de 125 kg, con su centro de masa en G_2. Si el brazo se eleva a una posición donde $\theta = 150°$ y se suelta desde el punto de reposo, determine la rapidez del pasajero en el instante $\theta = 0°$. El radio de giro del brazo es $k_{G1} = 12$ m con respecto a su centro de masa G_1. Ignore la estatura del pasajero.



Prob. 18-59

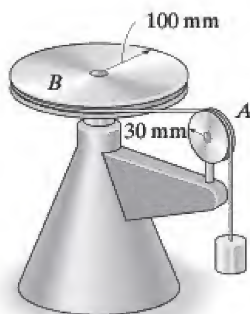
•18-61. El movimiento de la puerta de la cochera de 80 lb es guiado en sus extremos por la corredera. Determine el alargamiento inicial requerido del resorte cuando la puerta está abierta, $\theta = 0°$, de modo que, cuando caiga libremente se detenga justo cuando se cierra por completo, $\theta = 90°$. Suponga que la puerta puede considerarse con una placa delgada, y que hay un sistema de resorte y polea a ambos lados de la puerta.

18-62. El movimiento de la puerta de la cochera de 80 lb es guiado en sus extremos por la corredera. Si se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 0°$, determine su velocidad angular en el instante cuando $\theta = 30°$. En principio, el resorte está alargado 1 pie cuando la puerta se mantiene abierta, $\theta = 0°$. Suponga que la puerta puede considerarse con una placa delgada, y que hay un sistema de resorte y polea a ambos lados de la puerta.



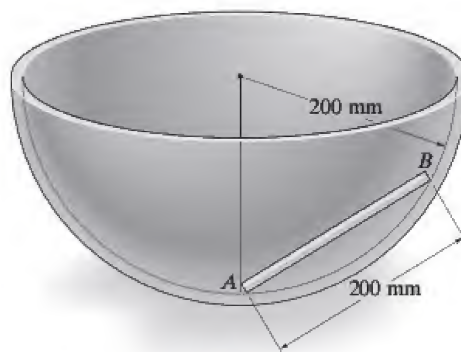
Probs. 18-61/62

18-60. El ensamble se compone de una polea A de 3 kg y la polea B de 10 kg. Si se cuelga un bloque de 2 kg de la cuerda, determine la rapidez del bloque después de que desciende 0.5 m a partir del punto de reposo. Ignore la masa de la cuerda y considere las poleas como discos delgados. No hay deslizamiento.



Prob. 18-60

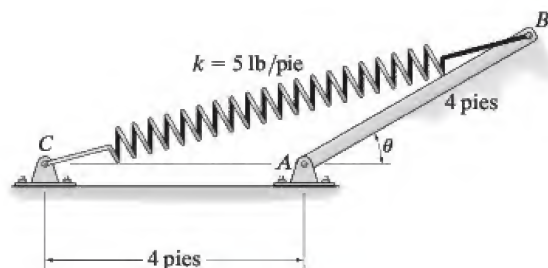
18-63. La barra AB de 500 g descansa a lo largo de la superficie interna lisa de un tazón semiesférico. Si la barra se suelta del punto de reposo desde la posición que se muestra, determine su velocidad angular en el instante en que desciende y queda horizontal.



Prob. 18-63

***18-64.** La barra AB de 25 lb está conectada a un resorte BC cuya longitud no alargada es de 4 pies. Si la barra se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 30°$, determine su velocidad angular cuando $\theta = 90°$.

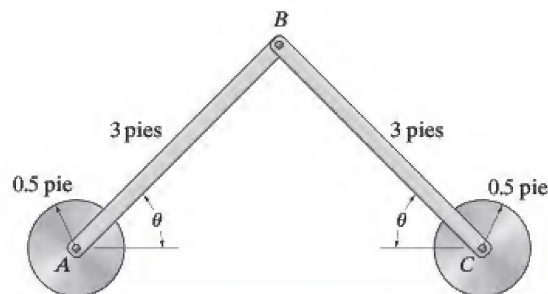
•**18-65.** La barra AB de 25 lb está conectada a un resorte BC cuya longitud no alargada es de 4 pies. Si la barra se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 30°$, determine su velocidad angular cuando el resorte vuelva a su longitud no alargada.



Probs. 18-64/65

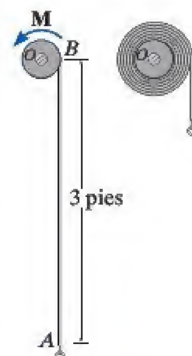
18-66. El ensamble se compone de dos barras de 8 lb conectadas por medio de un pasador a los dos discos de 10 lb. Si las barras se sueltan desde el punto de reposo cuando $\theta = 60°$, determine sus velocidades angulares cuando $\theta = 0°$. Suponga que los discos giran sin deslizarse.

18-67. El ensamble se compone de dos barras de 8 lb conectadas por medio de un pasador a los dos discos de 10 lb. Si las barras se sueltan desde el punto de reposo cuando $\theta = 60°$, determine sus velocidades angulares cuando $\theta = 30°$. Suponga que los discos ruedan sin deslizarse.



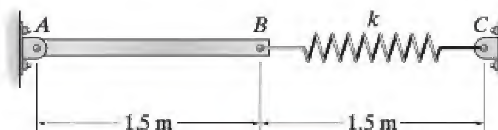
Probs. 18-66/67

***18-68.** La persiana uniforme AB tiene un peso total de 0.4 lb. Cuando se suelta, se enreda en el núcleo O accionado por resorte. El movimiento lo causa un resorte dentro del núcleo, el cual se enrolla de modo que ejerce un par de torsión $M = 0.3(10^{-3})\theta$ lb · pie, donde θ está en radianes, en el núcleo. Si la persiana se suelta desde el punto de reposo, determine la velocidad angular del núcleo cuando la persiana está totalmente enrollada, es decir, después de 12 revoluciones. Cuando esto ocurre, el resorte se desenrolla y el radio de giro de la persiana con respecto al eje O es $k_O = 0.9$ pulg. *Nota:* la energía potencial elástica de la muelle de torsión es $V_e = \frac{1}{2}k\theta^2$, donde $M = k\theta$ y $k = 0.3(10^{-3})$ lb · pie/rad.



Prob. 18-68

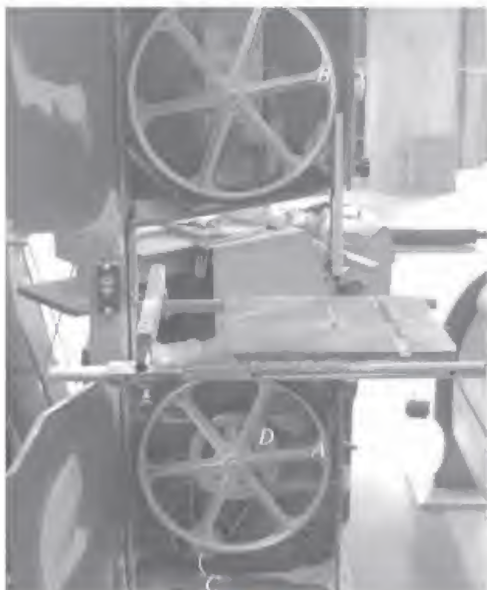
18-69. Cuando la barra AB de 10 kg está en posición horizontal está en reposo y el resorte no está alargado. Determine la rigidez k del resorte de modo que el movimiento de la barra se detenga momentáneamente cuando ha girado 90° en el sentido de las manecillas del reloj.



Prob. 18-69

PROBLEMAS CONCEPTUALES

P18-1. La hoja de la sierra de banda se enrolla alrededor de las dos grandes ruedas A y B. Cuando se enciende, un motor eléctrico hace girar la pequeña polea C, que entonces impulsa la polea más grande D, la cual está conectada a A y gira con ella. Explique por qué es una buena idea utilizar la polea D y las ruedas grandes A y B. Use valores numéricos apropiados para explicar su respuesta.



P18-1

P18-2. Para abrir y cerrar el cofre de este camión se utilizan dos muelles de torsión, $M = k\theta$, como auxiliares. Suponga que las muelles están desenrolladas ($\theta = 0°$) cuando el cofre está abierto y determine la rigidez k (N · m/rad) de cada muelle de modo que el cofre se levante con facilidad; es decir, prácticamente sin que se le aplique ninguna fuerza al cerrarlo. Use valores numéricos apropiados para explicar su resultado.



P18-2

P18-3. La operación de esta puerta de cochera es auxiliada por dos resortes AB y los elementos laterales BCD, los cuales están sujetos por medio de un pasador en C. Suponga que los resortes no están alargados cuando la puerta está en la posición horizontal (abierta) y $ABCD$ está vertical, y determine la rigidez k de cada uno de los resortes de modo que cuando la puerta caiga a la posición vertical (cerrada), se detenga lentamente. Use valores numéricos apropiados para explicar su respuesta.



P18-3

P18-4. Determine el contrapeso A requerido para balancear el peso de la plataforma de puente cuando $\theta = 0°$. Demuestre que este peso mantendrá la plataforma en equilibrio considerando la energía potencial del sistema cuando la plataforma está en la posición arbitraria θ. Tanto la plataforma como AB están en posición horizontal cuando $\theta = 0°$. Ignore los pesos de los demás miembros. Use valores numéricos apropiados para explicar su resultado.

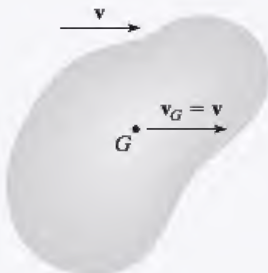


P18-4

REPASO DEL CAPÍTULO

Energía cinética

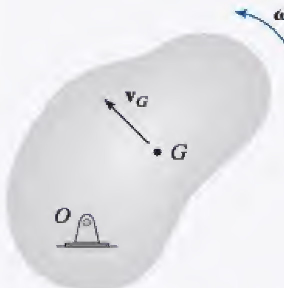
La energía cinética de un cuerpo rígido que experimenta movimiento plano puede ser referida a su centro de masa. Incluye una suma escalar de sus energías cinéticas de traslación y rotación.



Traslación

Traslación

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2$$



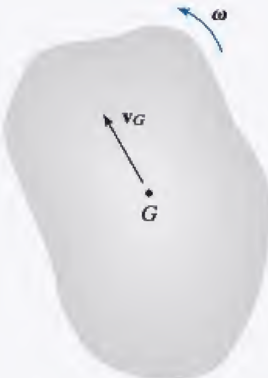
Rotación alrededor de un eje fijo

Rotación alrededor de un eje fijo

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$$

o

$$T = \frac{1}{2}I_O\omega^2$$



Movimiento plano general

Movimiento plano general

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$$

o

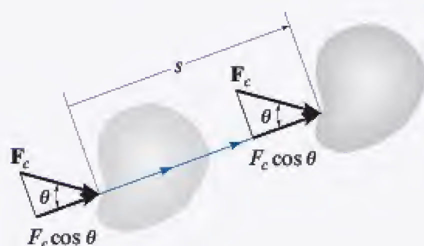
$$T = \frac{1}{2}I_{CI}\omega^2$$

Trabajo de una fuerza y un momento de par

Una fuerza realiza trabajo cuando experimenta un desplazamiento *ds* en la dirección de la fuerza. En particular, las fuerzas de fricción y normal que actúan en un cilindro o en cualquier cuerpo circular que rueda *sin deslizarse* no realizan trabajo, puesto que la fuerza normal no se desplaza y la fuerza de fricción actúa en puntos sucesivos de la superficie del cuerpo.

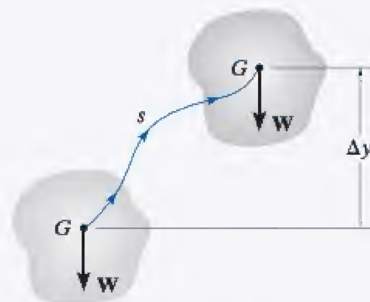


$$U_F = \int F \cos \theta \, ds$$



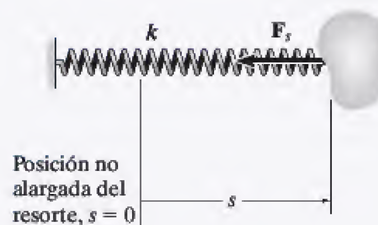
$$U_{F_c} = (F_c \cos \theta)s$$

Fuerza constante



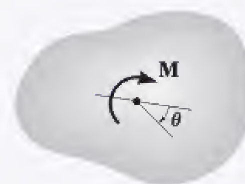
$$U_W = -W \Delta y$$

Peso



$$U = -\frac{1}{2} k s^2$$

Resorte



$$U_M = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \, d\theta$$

$$U_M = M(\theta_2 - \theta_1)$$

Magnitud constante

Principio de trabajo y energía

Los problemas que implican velocidad, fuerza y desplazamiento pueden resolverse con el principio de trabajo y energía. La energía cinética es la suma tanto de sus partes de rotación como de sus partes de traslación. Para su aplicación, deberá trazarse un diagrama de cuerpo libre para explicar el trabajo de todas las fuerzas y momentos de par que actúan en el cuerpo cuando se mueve a lo largo de la trayectoria.

$$T_1 = \Sigma U_{1-2} = T_2$$

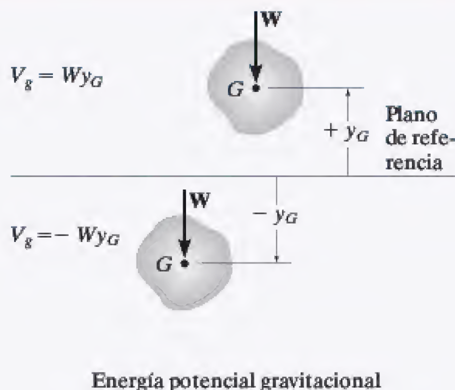
Conservación de la energía

Si un cuerpo se somete sólo a fuerzas conservadoras, entonces puede utilizarse la ecuación de conservación de la energía para resolver el problema. Esta ecuación requiere que la suma de las energías potencial y cinética del cuerpo permanezca igual en dos puntos cualesquiera a lo largo de la trayectoria.

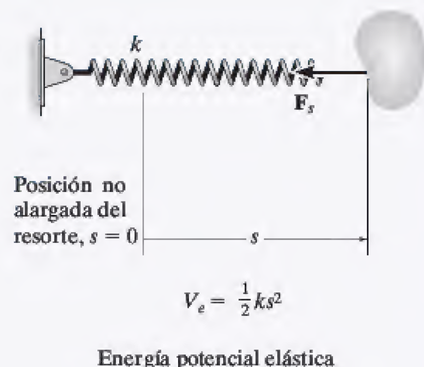
$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

donde $V = V_g + V_e$

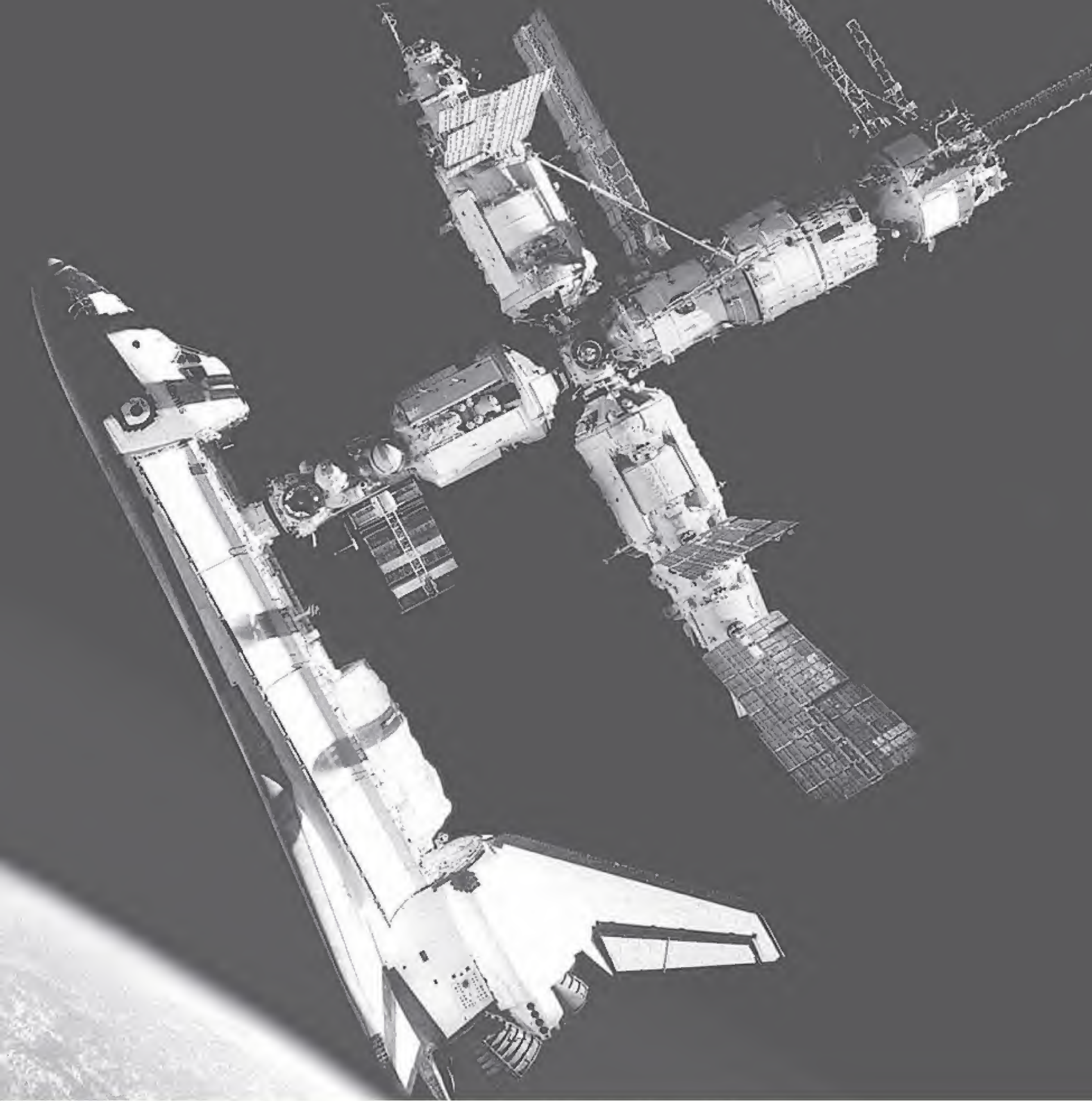
La energía potencial es la suma de las energías potencial elástica y gravitacional del cuerpo. La energía potencial gravitacional será positiva si el centro de gravedad del cuerpo está por encima del plano de referencia. Si está por debajo, entonces será negativa. La energía potencial elástica siempre es positiva, sin importar si el resorte está alargado o comprimido.



Energía potencial gravitacional



Energía potencial elástica



El acoplamiento de este transbordador con la Estación Espacial Internacional requiere la aplicación de principios de impulso y cantidad de movimiento para predecir con precisión su movimiento orbital y orientación apropiada.

Cinética plana de un cuerpo rígido: impulso y cantidad de movimiento

19

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Desarrollar fórmulas para la cantidad de movimiento lineal y angular de un cuerpo.
- Aplicar los principios de impulso y cantidad de movimiento lineal y angular para resolver problemas de cinética plana de un cuerpo rígido que implican fuerza, velocidad y tiempo.
- Analizar la aplicación de la conservación de la cantidad de movimiento.
- Analizar la mecánica del impacto excéntrico.

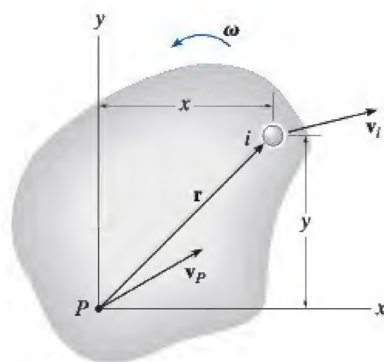
19.1 Cantidad de movimiento lineal y angular

En este capítulo utilizaremos los principios de impulso y cantidad de movimiento lineal y angular para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo en el contexto de su relación con el movimiento plano de un cuerpo rígido. Antes de hacerlo, primero formalizaremos los métodos de obtener la cantidad de movimiento lineal y angular de un cuerpo, suponiendo que éste es simétrico con respecto a un plano de referencia *x-y* inercial.

Cantidad de movimiento lineal. La cantidad de movimiento lineal de un cuerpo rígido se determina con la suma vectorial de los momentos lineales de todas las partículas del cuerpo, es decir, $\mathbf{L} = \Sigma m_i \mathbf{v}_i$. Como $\Sigma m_i \mathbf{v}_i = m\mathbf{v}_G$ (véase la sección 15.2) también podemos escribir

$$\mathbf{L} = m\mathbf{v}_G \qquad (19\text{-}1)$$

Esta ecuación establece que la cantidad de movimiento lineal del cuerpo es una cantidad vectorial de *magnitud* mv_G, la cual comúnmente se mide en unidades de kg · m/s o slug · pie/s y *dirección* definida por $\mathbf{v}_G$ la velocidad de su centro de masa.



(a)

(b)

Fig. 19-1

Cantidad de movimiento angular. Considere el cuerpo que aparece en la figura 19-1*a*, el cual se somete a movimiento plano general. En el instante que se muestra, el punto arbitrario *P* tiene una velocidad conocida $\mathbf{v}_P$ y el cuerpo tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Por consiguiente, la velocidad de la partícula *iésima* del cuerpo es

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{i/P} = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

La cantidad de movimiento angular de esta partícula con respecto al punto *P* es igual al "momento" de su cantidad de movimiento lineal con respecto a *P*, figura 19-1*a*. Por tanto,

$$(\mathbf{H}_P)_i = \mathbf{r} \times m_i \mathbf{v}_i$$

Si expresamos $\mathbf{v}_i$ en función de $\mathbf{v}_P$ y utilizamos vectores cartesianos, tenemos

$$(H_P)_i\mathbf{k} = m_i(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times [(v_P)_x\mathbf{i} + (v_P)_y\mathbf{j} + \omega\mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})]$$
$$(H_P)_i = -m_i y(v_P)_x + m_i x(v_P)_y + m_i\omega r^2$$

Si $m_i \rightarrow dm$ e integramos a lo largo de toda la masa *m* del cuerpo, obtenemos

$$H_P = -\left(\int_m y\,dm\right)(v_P)_x + \left(\int_m x\,dm\right)(v_P)_y + \left(\int_m r^2\,dm\right)\omega$$

En este caso H_P representa la cantidad de movimiento angular del cuerpo con respecto a un eje (el eje *z*) perpendicular al plano de movimiento que pasa por el punto *P*. Como $\bar{y}m = \int y\,dm$ y $\bar{x}m = \int x\,dm$ se utilizan las integrales del primero y segundo términos de la derecha para localizar el centro de masa *G* del cuerpo con respecto a *P*, figura 19-1*b*. Además, la última integral representa el momento de inercia del cuerpo con respecto al punto *P*. Por tanto,

$$H_P = -\bar{y}m(v_P)_x + \bar{x}m(v_P)_y + I_P\omega \qquad (19\text{-}2)$$

Esta ecuación se reduce a una forma más simple si *P* coincide con el centro de masa *G* del cuerpo,* en cuyo caso $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Por consiguiente,

*También se reduce a la misma forma simple $H_P = I_P\omega$, si el punto *P* es un *punto fijo* (vea la ecuación 19-9) o la velocidad de *P* está dirigida a lo largo de la línea *PG*.

$$H_G = I_G\omega \tag{19-3}$$

Aquí la cantidad de movimiento angular del cuerpo con respecto a G es igual al producto del momento de inercia del cuerpo con respecto a un eje que pasa por G y la velocidad angular del cuerpo. Dese cuenta que $\mathbf{H}_G$ es una cantidad vectorial de *magnitud* $I_G\omega$, la cual por lo común se mide en unidades de $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ o $\text{slug}\cdot\text{pie}^2/\text{s}$ y una *dirección* definida por $\boldsymbol{\omega}$, la cual siempre es perpendicular al plano de movimiento.

La ecuación 19-2 también puede reescribirse en función de los componentes x y y de la velocidad del centro de masa del cuerpo, $(\mathbf{v}_G)_x$ y $(\mathbf{v}_G)_y$, y del momento de inercia I_G del cuerpo. Como G se ubica en las coordenadas $(\overline{x},\overline{y})$, entonces, de acuerdo con el teorema de ejes paralelos, $I_P = I_G + m(\overline{x}^2 + \overline{y}^2)$. Al sustituir en la ecuación 19-2 y reordenar los términos, tenemos

$$H_P = \overline{y}m[-(v_P)_x + \overline{y}\omega] + \overline{x}m[(v_P)_y + \overline{x}\omega] + I_G\omega \tag{19-4}$$

A partir del diagrama cinemático de la figura 19-1*b*, $\mathbf{v}_G$ puede expresarse en función de $\mathbf{v}_P$ como

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \overline{\mathbf{r}}$$

$$(v_G)_x\mathbf{i} + (v_G)_y\mathbf{j} = (v_P)_x\mathbf{i} + (v_P)_y\mathbf{j} + \omega\mathbf{k} \times (\overline{x}\mathbf{i} + \overline{y}\mathbf{j})$$

Al realizar el producto vectorial e igualar los componentes **i** y **j** respectivos se obtienen las dos ecuaciones escalares

$$(v_G)_x = (v_P)_x - \overline{y}\omega$$

$$(v_G)_y = (v_P)_y + \overline{x}\omega$$

Si sustituimos estos resultados en la ecuación 19-4 obtenemos

$$(\circlearrowleft +)\; H_P = -\overline{y}m(v_G)_x + \overline{x}m(v_G)_y + I_G\omega \tag{19-5}$$

Como se muestra en la figura 19-1*c*, *este resultado indica que cuando la cantidad de movimiento angular del cuerpo se calcula con respecto al punto P, es equivalente al momento de la cantidad de movimiento lineal* $m\mathbf{v}_G$, *o de sus componentes* $m(\mathbf{v}_G)_x$ y $m(\mathbf{v}_G)_y$, *con respecto a P más la cantidad de movimiento angular* $I_G\boldsymbol{\omega}$. Con estos resultados, a continuación consideraremos tres tipos de movimiento.

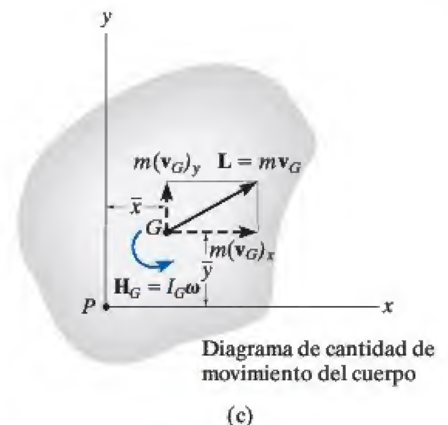
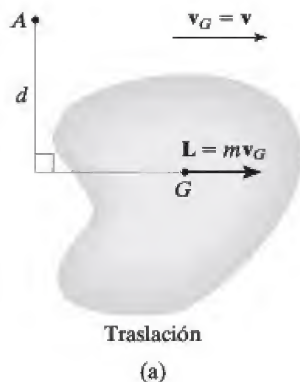


Diagrama de cantidad de movimiento del cuerpo

(c)

Fig. 19-1 (cont.)

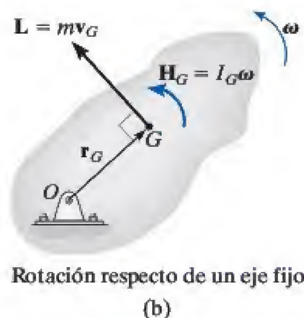


Traslación
(a)

Traslación. Cuando un cuerpo rígido se somete a *traslación* rectilínea o curvilínea, figura 19-2*a*, entonces $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ y su centro de masa tiene una velocidad de $\mathbf{v}_G = \mathbf{v}$. Por consiguiente, la cantidad de movimiento lineal, y la cantidad de movimiento angular con respecto a G, se convierten en

$$\boxed{\begin{aligned} L &= mv_G \\ H_G &= 0 \end{aligned}} \qquad (19\text{-}6)$$

Si la cantidad de movimiento angular se calcula con respecto a algún otro punto A, el "momento" de la cantidad de movimiento lineal $\mathbf{L}$ debe calcularse con respecto al punto. Como d es el "brazo de momento" como se muestra en la figura 19-2*a*, entonces de acuerdo con la ecuación 19-5, $H_A = (d)(mv_G) \circlearrowleft$.



Rotación respecto de un eje fijo
(b)

Fig. 19-2

Rotación con respecto a un eje fijo. Cuando un cuerpo rígido *gira alrededor de un eje fijo*, figura 19-2*b*, la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular con respecto a G, son

$$\boxed{\begin{aligned} L &= mv_G \\ H_G &= I_G\omega \end{aligned}} \qquad (19\text{-}7)$$

En ocasiones es conveniente calcular la cantidad de movimiento angular con respecto al punto O. Si observamos que $\mathbf{L}$ (o $\mathbf{v}_G$) siempre es *perpendicular* a $\mathbf{r}_G$, tenemos

$$(\circlearrowleft +)\ H_O = I_G\omega + r_G(mv_G) \qquad (19\text{-}8)$$

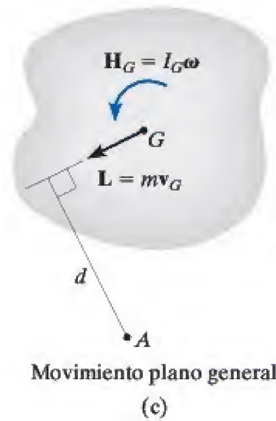
Como $v_G = r_G\omega$, esta ecuación puede escribirse como $H_O = (I_G + mr_G^2)\omega$. Al utilizar el teorema de ejes paralelos,*

$$\boxed{H_O = I_O\omega} \qquad (19\text{-}9)$$

En el cálculo, entonces, pueden utilizarse la ecuación 19-8 o la 19-9.

*Es importante observar la similitud entre esta derivación y la de la ecuación 17-16 $(\Sigma M_O = I_O\alpha)$, y la ecuación 18-5 $\left(T = \frac{1}{2}I_O\omega^2\right)$. También observe que puede obtenerse el mismo resultado con la ecuación 19-2 si selecciona el punto P en O, y tiene en cuenta que $(v_O)_x = (v_O)_y = 0$.

19



Movimiento plano general

(c)

Fig. 19-2

Movimiento plano general. Cuando un cuerpo rígido se somete a movimiento plano general, figura 19-2*c*, la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular con respecto a G, son

$$\boxed{\begin{aligned} L &= mv_G \\ H_G &= I_G\omega \end{aligned}} \qquad (19\text{-}10)$$

Si la cantidad de movimiento angular se calcula con respecto al punto A, figura 19-2*c*, es necesario incluir el momento de $\mathbf{L}$ y $\mathbf{H}_G$, con respecto a este punto. En este caso,

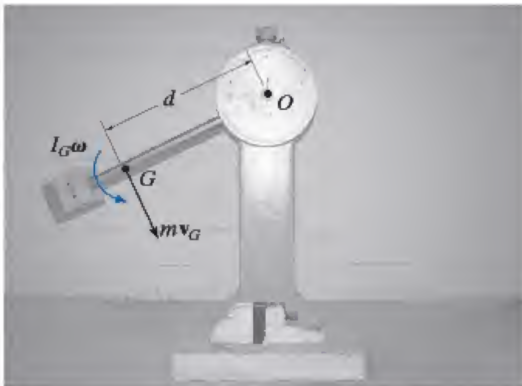
$$(\circlearrowleft +) \qquad H_A = I_G\omega + (d)(mv_G)$$

Aquí, d es el brazo de momento, como se muestra en la figura.

Como un caso especial, si el punto A es el centro instantáneo de velocidad cero entonces, al igual que la ecuación 19-9, podemos escribir la ecuación anterior como

$$\boxed{H_{CI} = I_{CI}\omega} \qquad (19\text{-}11)$$

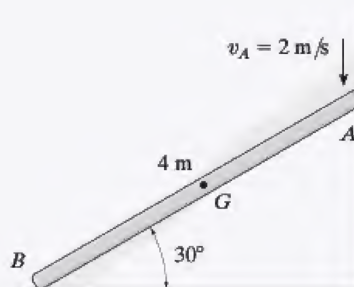
donde I_{CI} es el momento de inercia del cuerpo con respecto al CI. Vea el problema 19-2.



A medida que el péndulo oscila hacia abajo, su cantidad de movimiento angular con respecto al punto O puede determinarse si se calcula el momento de $I_G\boldsymbol{\omega}$ y $m\mathbf{v}_G$ con respecto a O. Éste es $H_O = I_G\omega + (mv_G)d$. Puesto que $v_G = \omega d$, entonces $H_O = I_G\omega + m(\omega d)d = (I_G + md^2)\omega = I_O\omega$.

EJEMPLO 19.1

En un instante dado la barra delgada de 5 kg tiene el movimiento que se muestra en la figura 19-3*a*. Determine su cantidad de movimiento angular con respecto al punto *G* y con respecto al *CI* en este instante.



(a)

SOLUCIÓN

Barra. La barra experimenta *movimiento plano general*. El *CI* se establece en la figura 19-3*b*, de modo que

$$\omega = \frac{2 \text{ m/s}}{4 \text{ m} \cos 30°} = 0.5774 \text{ rad/s}$$

$$v_G = (0.5774 \text{ rad/s})(2 \text{ m}) = 1.155 \text{ m/s}$$

Por tanto,

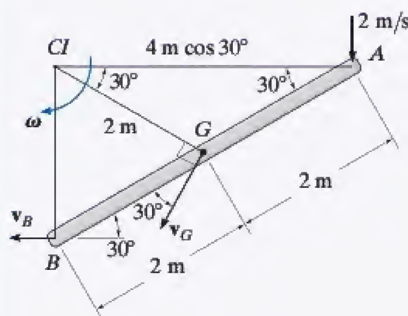
$$(\circlearrowleft +)\ H_G = I_G\omega = \left[\tfrac{1}{12}(5 \text{ kg})(4 \text{ m})^2\right](0.5774 \text{ rad/s}) = 3.85 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} \circlearrowright \quad \textit{Resp.}$$

Al agregar $I_G\omega$ y el momento de mv_G con respecto al *CI* se obtiene

$$(\circlearrowleft +)\ H_{CI} = I_G\omega + d(mv_G)$$
$$= \left[\tfrac{1}{12}(5 \text{ kg})(4 \text{ m})^2\right](0.5774 \text{ rad/s}) + (2 \text{ m})(5 \text{ kg})(1.155 \text{ m/s})$$
$$= 15.4 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} \circlearrowright \quad \textit{Resp.}$$

También podemos utilizar

$$(\circlearrowleft +)\ H_{CI} = I_{CI}\omega$$
$$= \left[\tfrac{1}{12}(5 \text{ kg})(4 \text{ m})^2 + (5 \text{ kg})(2 \text{ m})^2\right](0.5774 \text{ rad/s})$$
$$= 15.4 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} \circlearrowright \quad \textit{Resp.}$$



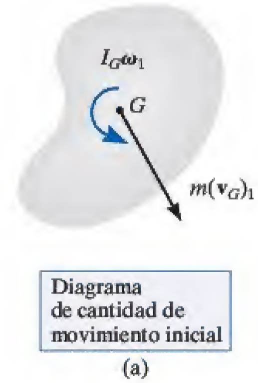
(b)

Fig. 19-3

19

19.2 Principio de impulso y cantidad de movimiento

Como en el caso del movimiento de una partícula, el principio de impulso y cantidad de movimiento para un cuerpo rígido puede desarrollarse si se *combina* la ecuación de movimiento con cinemática. La ecuación resultante dará una *solución directa a problemas que impliquen fuerza, velocidad y tiempo*.



(a)

Principio de impulso y cantidad de movimiento lineal.

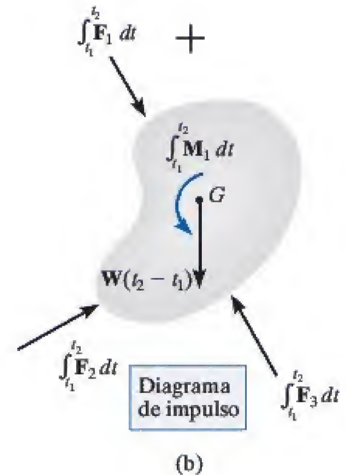
La ecuación de traslación de un cuerpo rígido puede escribirse como $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G = m(d\mathbf{v}_G/dt)$. Como la masa del cuerpo es constante,

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_G)$$

Si se multiplican ambos lados por dt e integran de $t = t_1$, $\mathbf{v}_G = (\mathbf{v}_G)_1$ a $t = t_2$, $\mathbf{v}_G = (\mathbf{v}_G)_2$ se obtiene

$$\Sigma\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}\,dt = m(\mathbf{v}_G)_2 - m(\mathbf{v}_G)_1$$

Esta ecuación se conoce como *principio de impulso y cantidad de movimiento lineal*. Establece que la suma de todos los impulsos creados por el *sistema de fuerzas externas* que actúa en el cuerpo durante el intervalo t_1 a t_2 es igual al cambio de la cantidad de movimiento lineal del cuerpo durante este intervalo, figura 19-4.



(b)

Principio de impulso y cantidad de movimiento angular.

Si el cuerpo tiene *movimiento plano general* entonces $\Sigma M_G = I_G\alpha = I_G(d\omega/dt)$. Como el momento de inercia es constante,

$$\Sigma M_G = \frac{d}{dt}(I_G\omega)$$

Al multiplicar ambos lados por dt e integrar de $t = t_1$, $\omega = \omega_1$ a $t = t_2$, $\omega = \omega_2$ resulta

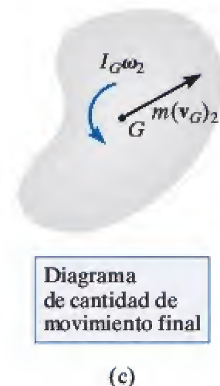
$$\Sigma\int_{t_1}^{t_2}M_G\,dt = I_G\omega_2 - I_G\omega_1 \qquad (19\text{-}12)$$

Del mismo modo, para *rotación con respecto a un eje fijo* que pasa por el punto O, la ecuación 17-16 ($\Sigma M_O = I_O\alpha$) cuando se integra se escribe

$$\Sigma\int_{t_1}^{t_2}M_O\,dt = I_O\omega_2 - I_O\omega_1 \qquad (19\text{-}13)$$

Las ecuaciones 19-12 y 19-13 se conocen como *principio de impulso y cantidad de movimiento angulares*. Ambas ecuaciones expresan que la suma del impulso angular que actúa en el cuerpo durante el intervalo t_1 a t_2 es igual al cambio de la cantidad de movimiento angular del cuerpo durante este intervalo.

=



(c)

Fig. 19-4

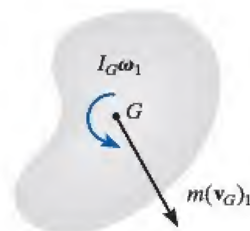


Diagrama de cantidad de movimiento inicial

(a)

Para resumir estos conceptos, si el movimiento se desarrolla en el plano *x-y*, las siguientes *tres ecuaciones escalares* pueden escribirse para describir el *movimiento plano* del cuerpo.

$$
\begin{aligned}
m(v_{Gx})_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x \, dt &= m(v_{Gx})_2 \\
m(v_{Gy})_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y \, dt &= m(v_{Gy})_2 \\
I_G\omega_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_G \, dt &= I_G\omega_2
\end{aligned}
\qquad (19\text{-}14)
$$

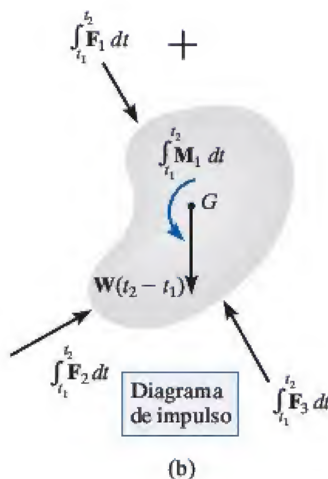


Diagrama de impulso

(b)

Los términos de estas ecuaciones pueden mostrarse gráficamente por medio de diagramas de impulso y cantidad de movimiento del cuerpo, figura 19-4. Observe que la cantidad de movimiento lineal $m\mathbf{v}_G$ se aplica en el centro de masa del cuerpo, figuras 19-4*a* y 19-4*c*; mientras que la cantidad de movimiento angular $I_G\boldsymbol{\omega}$ es un vector libre, y por consiguiente, del mismo modo que momento de par, puede aplicarse a cualquier punto del cuerpo. Cuando se traza el diagrama de impulso, figura 19-4*b*, las fuerzas **F** y el momento **M** varían con el tiempo y se indican por medio de las integrales. Sin embargo, si **F** y **M** son *constantes* la integración de los impulsos da $\mathbf{F}(t_2 - t_1)$ y $\mathbf{M}(t_2 - t_1)$, respectivamente. Tal es el caso del peso del cuerpo **W**, figura 19-4*b*.

Las ecuaciones 19-14 también pueden aplicarse a todo un sistema de cuerpos conectados en lugar de a cada uno por separado. Esto elimina la necesidad de incluir los impulsos de interacción que aparecen en las conexiones puesto que son *internos* al sistema. Las ecuaciones resultantes pueden escribirse en forma simbólica como

=

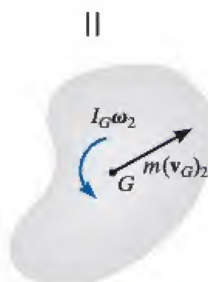


Diagrama de cantidad de movimiento final

(c)

Fig. 19-4 (cont.)

$$
\begin{aligned}
\left(\Sigma \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento lineal}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{x1} + \left(\Sigma \begin{matrix}\text{impulso lineal}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{x(1-2)} &= \left(\Sigma \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento lineal}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{x2} \\
\left(\Sigma \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento lineal}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{y1} + \left(\Sigma \begin{matrix}\text{impulso lineal}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{y(1-2)} &= \left(\Sigma \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento lineal}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{y2} \\
\left(\Sigma \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento angular}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{O1} + \left(\Sigma \begin{matrix}\text{impulso angular}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{O(1-2)} &= \left(\Sigma \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento angular}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{O2}
\end{aligned}
$$

(19-15)

Como se indica por medio de la tercera ecuación, la cantidad de movimiento angular y el impulso angular del sistema deben calcularse con respecto al *mismo punto de referencia O* para todos los cuerpos del sistema.

Procedimiento para el análisis

Los principios de impulso y cantidad de movimiento se utilizan para resolver problemas cinéticos que implican *velocidad, fuerza* y *tiempo*, puesto que estos términos intervienen en la formulación.

Diagrama de cuerpo libre.

- Establezca el marco de referencia x, y, z, inercial y trace el diagrama de cuerpo libre para mostrar gráficamente todas las fuerzas y momentos de par que producen impulsos en el cuerpo.
- Deberán establecerse la dirección y sentido de la velocidad inicial y final del centro de masa del cuerpo, $\mathbf{v}_G$, y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de éste. Si cualquiera de estos movimientos es desconocido, suponga que el sentido de sus componentes es en la dirección de las coordenadas inerciales positivas.
- Calcule el momento de inercia I_G o I_O.
- Como un procedimiento alternativo, trace los diagramas de impulso y cantidad de movimiento del cuerpo o sistema de cuerpos. Cada uno de estos diagramas representa una figura delineada del cuerpo el cual incluye gráficamente los datos requeridos para cada uno de los tres términos de las ecuaciones 19-14 o 19-15, figura 19-4. Estos diagramas son particularmente útiles para visualizar los términos de "momento" utilizados en el principio de impulso y cantidad de movimiento angular, si la aplicación se hace con respecto al *CI* o a otro punto diferente del centro de masa del cuerpo G o un punto fijo O.

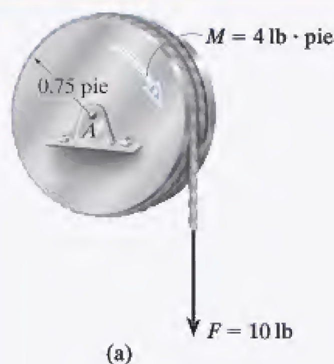
Principio de impulso y cantidad de movimiento.

- Aplique las tres ecuaciones escalares de impulso y cantidad de movimiento.
- La cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido que gira con respecto a un eje fijo es el momento de $m\mathbf{v}_G$ más $I_G\boldsymbol{\omega}$ con respecto al eje. Éste es igual a $H_O = I_O\omega$, donde I_O es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje.
- Todas las fuerzas que actúen en el diagrama de cuerpo libre crearán un impulso; sin embargo, algunas de ellas no realizarán trabajo.
- Las fuerzas que son funciones de tiempo deben integrarse para obtener el impulso.
- Con frecuencia se utiliza el principio de impulso y cantidad de movimiento angular para eliminar las fuerzas impulsoras desconocidas que son paralelas o que pasan por un eje común, puesto que su momento es cero con respecto a este eje.

Cinemática.

- Si se requieren más de tres ecuaciones para una solución completa, puede ser posible relacionar la velocidad del centro de masa del cuerpo con su velocidad angular por medio de *cinemática*. Si el movimiento parece ser complicado, los diagramas cinemáticos (de velocidad) pueden ser útiles para obtener la relación necesaria.

EJEMPLO 19.2



En el disco de 20 lb mostrado en la figura 19-5*a* actúan un momento de par de 4 lb · pie y una fuerza de 10 lb la cual se aplica a una cuerda enrollada alrededor de su periferia. Determine la velocidad angular del disco dos segundos después de que empieza a moverse del reposo. Además, ¿cuáles son los componentes de fuerza de la reacción en el pasador?

SOLUCIÓN

Como la velocidad angular, la fuerza y el tiempo intervienen en los problemas, aplicaremos los principios de impulso y cantidad de movimiento a la solución.

Diagrama de cuerpo libre. Figura 19-5*b*. El centro de masa del disco no se mueve; sin embargo, la carga hace que el disco gire en el sentido de las manecillas del reloj.

El momento de inercia del disco con respecto a su eje de rotación fijo es

$$I_A = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{20\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}\right)(0.75\text{ pie})^2 = 0.1747\text{ slug}\cdot\text{pie}^2$$

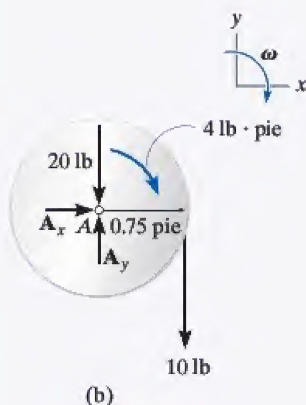


Fig. 19-5

Principio de impulso y cantidad de movimiento.

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m(v_{Ax})_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt = m(v_{Ax})_2$$

$$0 + A_x(2\text{ s}) = 0$$

$$(+\uparrow) \qquad m(v_{Ay})_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m(v_{Ay})_2$$

$$0 + A_y(2\text{ s}) - 20\text{ lb}(2\text{ s}) - 10\text{ lb}(2\text{ s}) = 0$$

$$(\circlearrowright +) \qquad I_A\omega_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} M_A\,dt = I_A\omega_2$$

$$0 + 4\text{ lb}\cdot\text{pie}(2\text{ s}) + [10\text{ lb}(2\text{ s})](0.75\text{ pie}) = 0.1747\omega_2$$

Al resolver estas ecuaciones resulta

$$A_x = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

$$A_y = 30\text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\omega_2 = 132\text{ rad/s}\circlearrowright \qquad \textit{Resp.}$$

19

EJEMPLO 19.3

El carrete de 100 kg que se muestra en la figura 19-6*a* tiene un radio de giro $k_G = 0.35$ m. Se enrolla un cable alrededor de la masa central del carrete y se aplica una fuerza horizontal de magnitud variable de $P = (t + 10)$ N, donde t está en segundos. Si el carrete inicialmente está en reposo, determine la velocidad angular en 5 s. Suponga que el carrete rueda sin deslizarse en A.

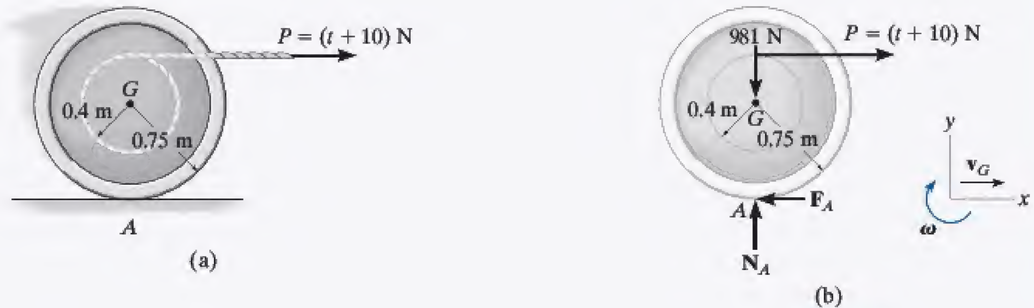


Fig. 19-6

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Según el diagrama de cuerpo libre, figura 19-6*b*, la fuerza *variable* **P** hará que la fuerza de fricción $\mathbf{F}_A$ sea variable y por tanto los impulsos creados tanto por **P** como por $\mathbf{F}_A$ deben determinarse por integración. La fuerza **P** hace que el centro de masa tenga una velocidad $\mathbf{v}_G$ hacia la derecha y por tanto el carrete tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ en el sentido de las manecillas del reloj.

Principio de impulso y cantidad de movimiento. Puede obtenerse una solución directa para $\boldsymbol{\omega}$ aplicando el principio de impulso y cantidad de movimiento angular con respecto al punto A, el CI, para eliminar el impulso creado por la fuerza de fricción desconocido.

$$(\circlearrowright +) \qquad I_A\omega_1 + \Sigma \int M_A\,dt = I_A\omega_2$$

$$0 + \left[\int_0^{5\,s} (t + 10)\text{ N}\,dt\right](0.75\text{ m} + 0.4\text{ m}) = [100\text{ kg}\,(0.35\text{ m})^2 + (100\text{ kg})(0.75\text{ m})^2]\omega_2$$

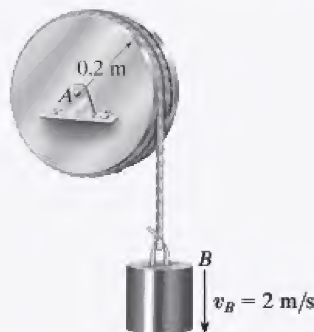
$$62.5(1.15) = 68.5\omega_2$$

$$\omega_2 = 1.05\text{ rad/s} \circlearrowright \qquad \textit{Resp.}$$

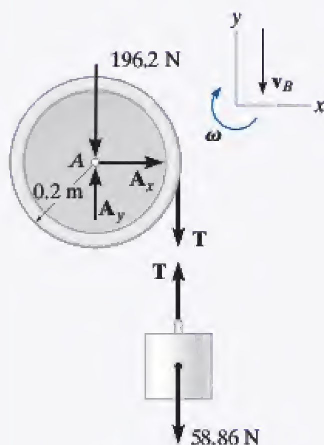
NOTA: trate de resolver este problema con el principio de impulso y cantidad de movimiento con respecto a G y por el principio de impulso y cantidad de movimiento lineal en la dirección x.

EJEMPLO 19.4

El cilindro que se muestra en la figura 19-7*a* tiene una masa de 6 kg. Cuelga de una cuerda la cual se enrolla alrededor de la periferia de un disco de 20 kg cuyo momento de inercia es $I_A = 0.40\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. Si inicialmente desciende con una rapidez de 2 m/s, determine su rapidez en 3 s. Ignore la masa de la cuerda en el cálculo.



(a)



(b)

Fig. 19-7

SOLUCIÓN I

Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre del cilindro y disco se muestran en la figura 19-7*b*. Todas las fuerzas son *constantes* puesto que el peso del cilindro crea el movimiento. El movimiento descendente del cilindro, $\mathbf{v}_B$, hace que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del disco sea en el sentido de las manecillas del reloj.

Principio de impulso y cantidad de movimiento. Podemos eliminar $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ del análisis al aplicar el principio de impulso y cantidad de movimiento angular con respecto al punto *A*. Por consiguiente

Disco

$$(\circlearrowright +) \qquad I_A\omega_1 + \Sigma \int M_A\, dt = I_A\omega_2$$

$$0.40\ \text{kg}\cdot\text{m}^2(\omega_1) + T(3\ \text{s})(0.2\ \text{m}) = (0.40\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\omega_2$$

Cilindro

$$(+\uparrow) \qquad m_B(v_B)_1 + \Sigma \int F_y\, dt = m_B(v_B)_2$$

$$-6\ \text{kg}(2\ \text{m/s}) + T(3\ \text{s}) - 58.86\ \text{N}(3\ \text{s}) = -6\ \text{kg}(v_B)_2$$

Cinemática. Como $\omega = v_B/r$, entonces $\omega_1 = (2\ \text{m/s})/(0.2\ \text{m}) = 10\ \text{rad/s}$ y $\omega_2 = (v_B)_2/0.2\ \text{m} = 5(v_B)_2$. Al sustituir y resolver las ecuaciones simultáneamente para $(v_B)_2$ obtenemos

$$(v_B)_2 = 13.0\ \text{m/s} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

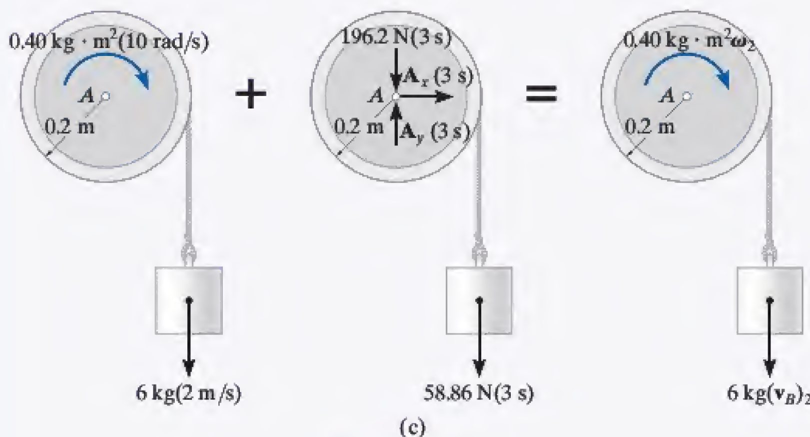
SOLUCIÓN II

Diagramas de impulso y cantidad de movimiento. Podemos obtener $(v_B)_2$ *directamente* al considerar el *sistema* compuesto del cilindro, la cuerda y el disco. Se trazaron los diagramas de impulso y cantidad de movimiento para clarificar la aplicación del principio de impulso y cantidad de movimiento angular con respecto al punto A, figura 19-7*c*.

Principio de impulso y cantidad de movimiento angular. Como $\omega_1 = 10$ rad/s y $\omega_2 = 5(v_B)_2$, tenemos

$$(\circlearrowright +)\left(\sum \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento angular}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{A1} + \left(\sum \begin{matrix}\text{impulso angular}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{A(1-2)} = \left(\sum \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento angular}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{A2}$$

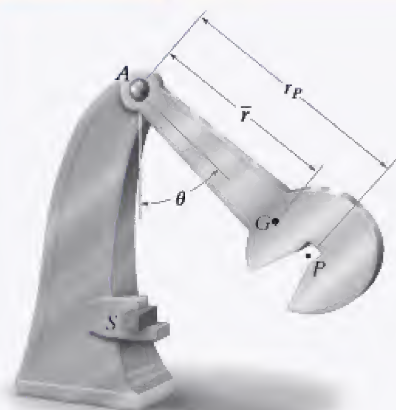
$$(6\text{ kg})(2\text{ m/s})(0.2\text{ m}) + (0.40\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(10\text{ rad/s}) + (58.86\text{ N})(3\text{ s})(0.2\text{ m})$$
$$= (6\text{ kg})(v_B)_2(0.2\text{ m}) + (0.40\text{ kg}\cdot\text{m}^2)[5(v_B)_2(0.2\text{ m})]$$
$$(v_B)_2 = 13.0\text{ m/s}\downarrow \qquad \textit{Resp.}$$



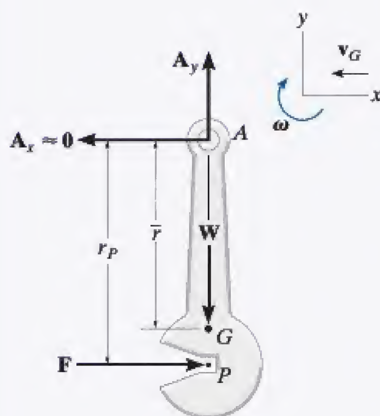
(c)

Fig. 19-7 (cont.)

EJEMPLO 19.5



(a)



(b)

Fig. 19-8

La prueba de impacto Charpy se utiliza en la prueba de materiales para determinar sus características de absorción de energía durante el impacto. La prueba se realiza por medio del péndulo mostrado en la figura 19-8*a*, el cual tiene una masa m, un centro de masa en G y un radio de giro k_G con respecto a G. Determine la distancia r_P del pasador en A al punto P donde el impacto con la muestra S deberá ocurrir de modo que la fuerza horizontal en el pasador A sea esencialmente cero durante el impacto. Para el cálculo, suponga que la muestra absorbe toda la energía cinética del péndulo adquirida mientras cae y de ese modo detiene su oscilación cuando $\theta = 0°$.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, figura 19-8*b*, las condiciones del problema requieren que la fuerza horizontal en A sea cero. Justo antes del impacto, la velocidad angular del péndulo es $\boldsymbol{\omega}_1$ y su centro de masa está en movimiento a la izquierda en $(v_G)_1 = \bar{r}\omega_1$.

Principio de impulso y cantidad de movimiento. Aplicaremos el principio de impulso y cantidad de movimiento angular con respecto al punto A. Por tanto,

$$I_A\omega_1 + \Sigma M_A\,dt = I_A\omega_2$$

$$(\circlearrowleft +) \qquad I_A\omega_1 - \left(\int F\,dt\right)r_P = 0$$

$$m(v_G)_1 + \Sigma\int F\,dt = m(v_G)_2$$

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad -m(\bar{r}\omega_1) + \int F\,dt = 0$$

Al eliminar el impulso $\int F\,dt$ y sustituir $I_A = mk_G^2 + m\bar{r}^2$ se obtiene

$$[mk_G^2 + m\bar{r}^2]\omega_1 - m(\bar{r}\omega_1)r_P = 0$$

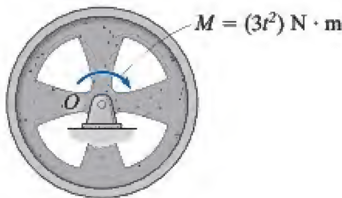
Al factorizar $m\omega_1$ y resolver r_P, obtenemos

$$r_P = \bar{r} + \frac{k_G^2}{\bar{r}} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: el punto P, así definido, se llama *centro de percusión*. Al colocar el punto de impacto P, la fuerza desarrollada en el pasador será mínima. Muchos implementos deportivos, como raquetas, palos de golf, etc., se diseñan de modo que el choque con el objeto golpeado ocurra en el centro de percusión. En consecuencia, el jugador no tendrá ninguna sensación de "aguijoneo" o de otra índole en su mano (vea además los problemas 17-66 y 19-1).

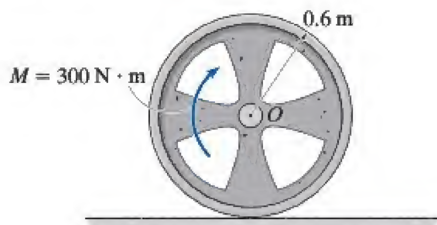
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F19-1. La rueda de 60 kg tiene un radio de giro con respecto a su centro O de $k_O = 300$ mm. Si se somete a un momento de par de $M = (3t^2)$ N·m, donde t está en segundos, determine su velocidad angular cuando $t = 4$ s, a partir del reposo.



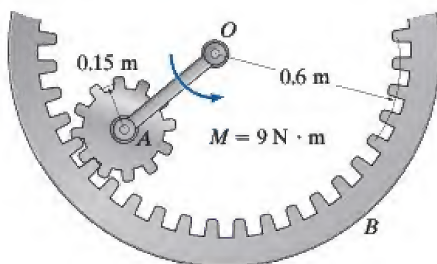
F19-1

F19-2. La rueda de 300 kg tiene un radio de giro con respecto a su centro O de $k_O = 400$ mm. Si se somete a un momento de par de $M = 300$ N·m, determine su velocidad angular 6 s después de que comienza a rodar del reposo sin deslizarse. Además, determine la fuerza de fricción que se desarrolla entre la rueda y el suelo.



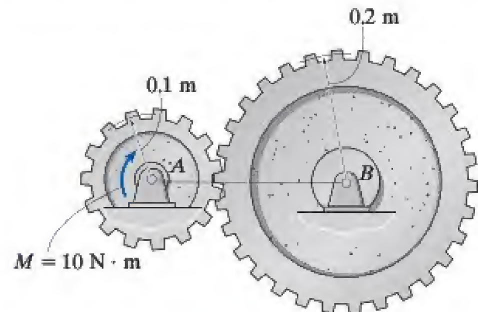
F19-2

F19-3. Si la barra OA de masa insignificante se somete al momento de par $M = 9$ N · m, determine la velocidad angular del engrane interno $t = 5$ s después de que comienza a moverse del reposo cuya masa es de 10 kg. El radio de giro del engrane con respecto a su centro de masa es $k_A = 100$ mm y rueda sobre el engrane externo fijo. El movimiento se desarrolla en el plano horizontal.



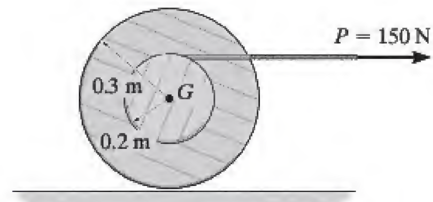
F19-3

F19-4. Los engranes A y B de 10 kg y 50 kg de masa tienen radios de giro con respecto a sus respectivos centros de masa de $k_A = 80$ mm y $k_B = 150$ mm. Si el engrane A se somete a un momento de par $M = 10$ N · m, determine la velocidad angular del engrane B 5 s después de que comienza a girar del reposo.



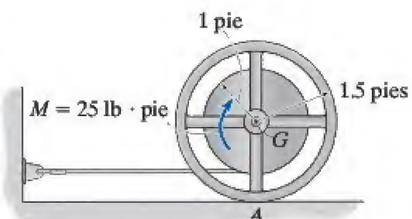
F19-4

F19-5. El carrete de 50 kg se somete a una fuerza horizontal $P = 150$ N. Si rueda sin deslizarse, determine su velocidad angular 3 s después de que comienza a rodar del reposo. Su radio de giro con respecto a su centro de masa es $k_G = 175$ mm.



F19-5

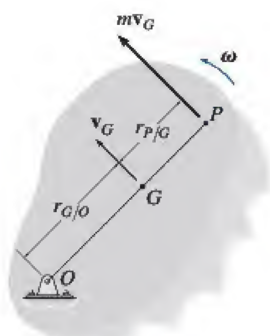
F19-6. El carrete pesa 150 lb y su radio de giro con respecto a su centro de gravedad es $k_G = 1.25$ pies. Si se somete a un par de torsión $M = 25$ lb · pie y comienza a rodar del reposo cuando se aplica el par de torsión, determine su velocidad angular en 3 segundos. El coeficiente de fricción cinética entre el carrete y el plano horizontal es $\mu_k = 0.15$.



F19-6

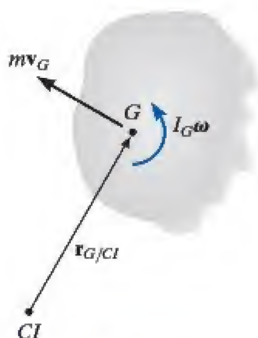
PROBLEMAS

•**19-1.** El cuerpo rígido (losa) tiene una masa m y gira con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ con respecto a un eje que pasa por el punto fijo O. Demuestre que los momentos de todas las partículas que componen el cuerpo pueden ser representadas por un solo vector de magnitud mv_G y que actúa en el punto P, llamado *centro de percusión*, el cual queda a una distancia $r_{P/G} = k_G^2/r_{G/O}$ del centro de masa G. Aquí k_G es el radio de giro del cuerpo, calculado con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento y que pasa por G.



Prob. 19-1

19-2. En un instante dado, el cuerpo tiene una cantidad de movimiento lineal $\mathbf{L} = m\mathbf{v}_G$ y una cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G = I_G\boldsymbol{\omega}$ calculado con respecto a su centro de masa. Demuestre que la cantidad de movimiento angular del cuerpo calculada con respecto al centro instantáneo de velocidad cero CI puede expresarse como $\mathbf{H}_{CI} = I_{CI}\boldsymbol{\omega}$, donde I_{CI} representa el momento de inercia del cuerpo calculado con respecto al eje instantáneo de velocidad cero. Como se muestra, el CI está a una distancia $r_{G/CI}$ del centro de masa G.



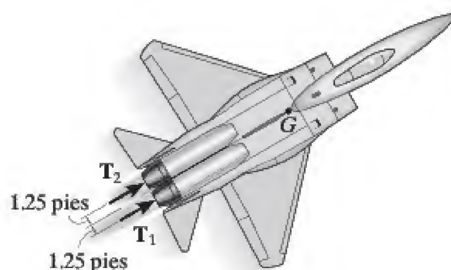
Prob. 19-2

19-3. Demuestre que si una losa gira con respecto a un eje perpendicular fijo a ella que pasa por su centro de masa G, la cantidad de movimiento angular es la misma cuando se calcula con respecto a cualquier otro punto P.



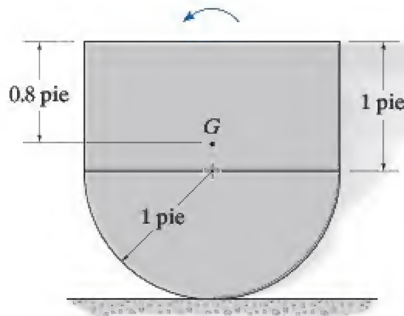
Prob. 19-3

***19-4.** El piloto de un avión de reacción averiado pudo controlarlo al acelerar los dos motores. Si el avión pesa 17 000 lb y su radio de giro es de $k_G = 4.7$ pies con respecto a su centro de masa G, determine su velocidad angular y la velocidad de su centro de masa G en $t = 5$ s si el empuje en cada motor se modifica a $T_1 = 5000$ lb y $T_2 = 800$ lb, como se muestra. Originalmente, el avión volaba en línea recta a 1200 pies/s. Ignore los efectos de resistencia al avance y la pérdida de combustible.



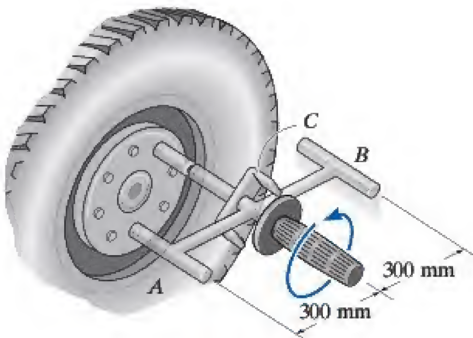
Prob. 19-4

•**19-5.** El ensamble pesa 10 lb y su radio de giro es $k_G = 0.6$ pie con respecto a su centro de masa G. La energía cinética del ensamble es de 31 pies · lb cuando está en la posición mostrada. Si rueda en sentido contrario al de las manecillas del reloj sobre la superficie sin deslizarse, determine su cantidad de movimiento lineal en este instante.



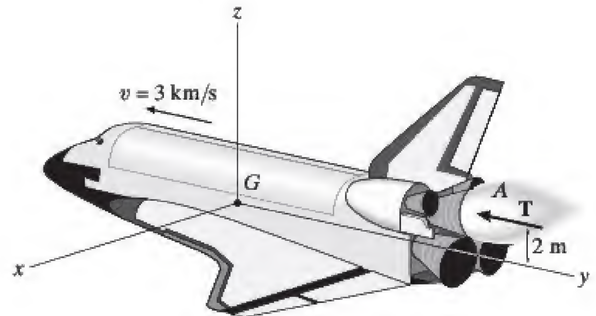
Prob. 19-5

19-6. La llave de impacto se compone de una barra AB de 1 kg y 580 mm de largo y de contrapesos cilíndricos A y B de 20 mm de diámetro y 1 kg de masa. Este ensamble gira libremente con respecto a una manivela y un dado, los cuales están en contacto con la tuerca de la rueda de un automóvil. Si a la barra AB se le imprime una velocidad angular de 4 rad/s y choca con la ménsula C de la manivela sin rebotar, determine el impulso angular impartido a la tuerca.



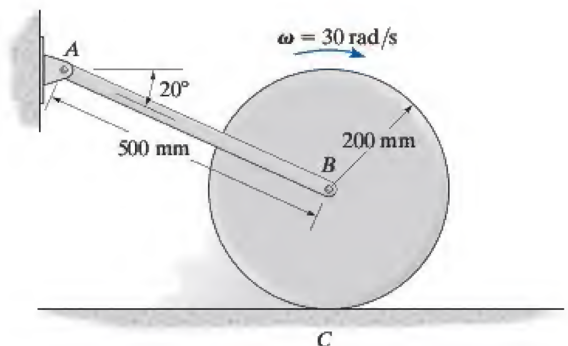
Prob. 19-6

19-7. El transbordador especial se encuentra en el "espacio profundo" donde los efectos de la gravedad pueden ser ignorados. Tiene una masa de 120 Mg, un centro de masa en G y un radio de giro $(k_G)_x = 14$ m con respecto al eje x. Originalmente viaja a $v = 3$ km/s cuando el piloto enciende el motor A que genera un empuje $T = 600(1 - e^{-0.3t})$ kN, donde t está en segundos. Determine la velocidad angular del transbordador 2 s después.



Prob. 19-7

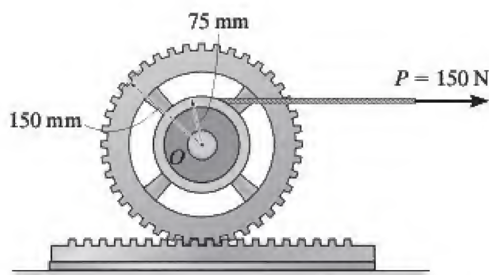
***19-8.** El cilindro de 50 kg tiene una velocidad angular de 30 rad/s cuando se pone en contacto con la superficie horizontal en C. Si el coeficiente de fricción cinética es $\mu_C = 0.2$, determine cuánto tiempo le llevará al cilindro dejar de girar. ¿Qué fuerza se desarrolla en el brazo AB durante este tiempo? El eje que pasa a través del cilindro está conectado a dos eslabones simétricos. (Sólo se muestra el AB.) Para el cálculo, ignore el peso de los eslabones.



Prob. 19-8

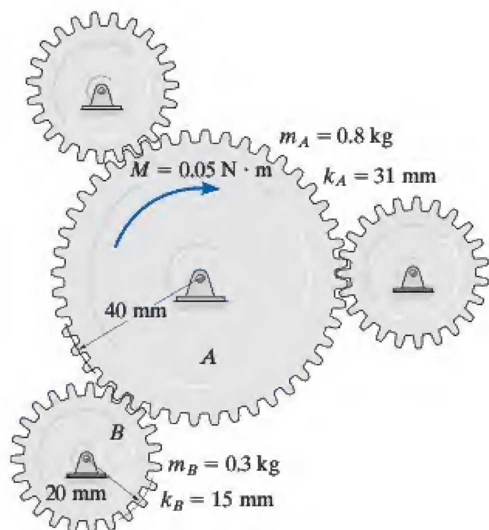
•**19-9.** Si la cuerda se somete a una fuerza horizontal $P = 150$ N y la cremallera está fija en el plano horizontal, determine la velocidad angular del engrane en 4 s a partir del reposo. La masa del engrane es de 50 kg y su radio de giro con respecto a su centro de masa O es $k_O = 125$ mm.

19-10. Si la cuerda se somete a una fuerza horizontal $P = 150$ N y el engrane está sostenido por un pasador fijo en O, determine su velocidad angular y la velocidad de la cremallera de 20 kg en 4 s a partir del reposo. La masa del engrane es de 50 kg y su radio de giro es $k_O = 125$ mm. Suponga que la superficie de contacto entre la cremallera y el plano horizontal es lisa.



Probs. 19-9/10

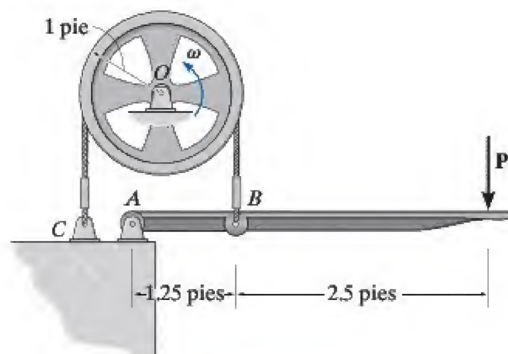
19-11. Un motor transmite un par de torsión $M = 0.05$ N · m al centro del engrane A. Determine la velocidad angular de cada uno de los tres engranes pequeños (iguales) 2 s después de que comienzan a girar desde el reposo. Los engranes pequeños (B) están montados por medio de un pasador en sus centros y sus masas y radios de giro centroidales se dan en la figura.



Prob. 19-11

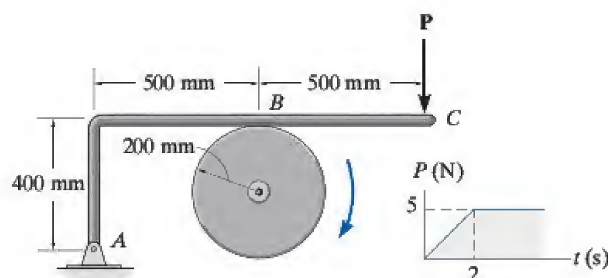
*__19-12.__ El volante de 200 lb tiene un radio de giro con respecto a su centro de gravedad O de $k_O = 0.75$ pie. Si gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj con una velocidad angular de 1200 rev/min antes de aplicar el freno, determine el tiempo requerido para que la rueda se detenga cuando se aplica una fuerza $P = 200$ lb a la palanca. El coeficiente de fricción cinética entre la banda y el borde de la rueda es $\mu_k = 0.3$ (*sugerencia:* recuerde por su texto de *Estática* que la relación de la tensión en la banda está dada por $T_B = T_C e^{\mu\beta}$, donde β es el ángulo de contacto en radianes).

•**19-13.** El volante de 200 lb tiene un radio de giro con respecto a su centro de gravedad O de $k_O = 0.75$ pie. Si gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj con una velocidad angular de 1200 rev/min antes de aplicar el freno, determine la fuerza requerida **P** que debe aplicarse a la palanca para detener la rueda en 2 s. El coeficiente de fricción cinética entre la banda y el borde de la rueda es $\mu_k = 0.3$ (*sugerencia:* recuerde por su texto de *Estática* que la relación de la tensión en la banda está dada por $T_B = T_C e^{\mu\beta}$, donde β es el ángulo de contacto en radianes).



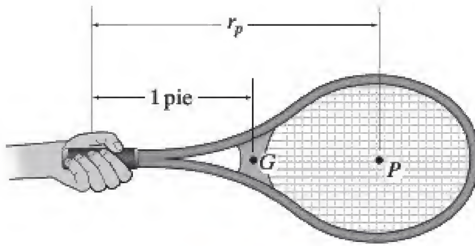
Probs. 19-12/13

19-14. El disco de 12 kg tiene una velocidad angular de $\omega = 20$ rad/s. Si se aplica el freno ABC de modo que la magnitud de la fuerza **P** varíe con el tiempo como se muestra, determine el tiempo requerido para detener el disco. El coeficiente de fricción cinética en B es $\mu_k = 0.4$. Ignore el espesor del freno.



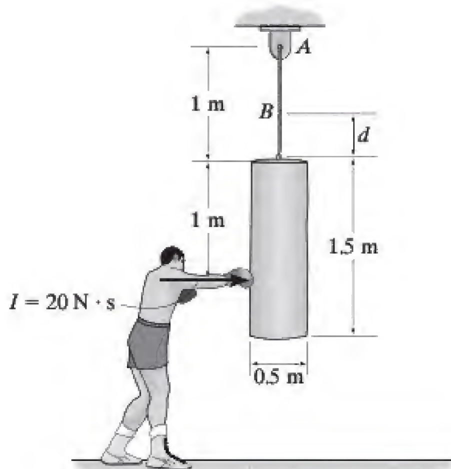
Prob. 19-14

19-15. La raqueta de tenis de 1.25 lb tiene su centro de gravedad en G y un radio de giro con respecto a G de $k_G = 0.625$ pie. Determine la posición P donde la bola debe ser golpeada de modo que no se sienta "ninguna sensación de aguijoneo" en la mano que sostiene la raqueta, es decir, que la fuerza horizontal ejercida por la raqueta en la mano sea cero.



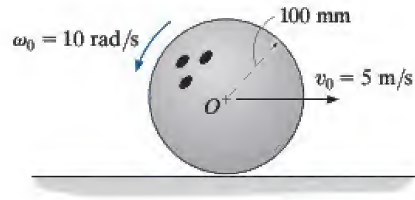
Prob. 19-15

***19-16.** Si el boxeador golpea el costal de 75 kg con un impulso de $I = 20$ N · s, determine la velocidad angular del costal inmediatamente después de ser golpeado. También, determine la ubicación d del punto B, con respecto al cual parece girar el costal. Trate el costal como un cilindro uniforme.



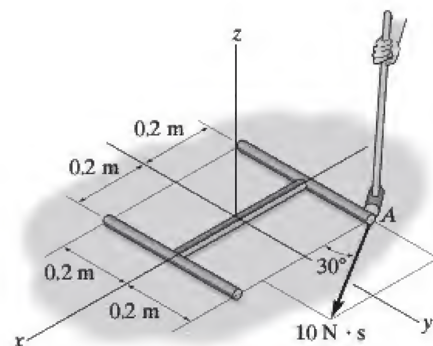
Prob. 19-16

•**19-17.** La bola de boliche de 5 kg es lanzada por la pista con un giro inverso de $\omega_0 = 10$ rad/s y la velocidad de su centro de masa O es $v_0 = 5$ m/s. Determine el tiempo para que la bola deje de girar a la inversa, y la velocidad de su centro de masa en este instante. El coeficiente de fricción cinética entre la bola y el callejón es $\mu_k = 0.08$.



Prob. 19-17

19-18. El ensamble de barras lisas mostrado está en reposo cuando lo golpea un martillo en A con un impulso de 10 N · s. Determine su velocidad angular y la magnitud de la velocidad de su centro de masa inmediatamente después de ser golpeado. Las barras tienen una masa por unidad de longitud de 6 kg/m.



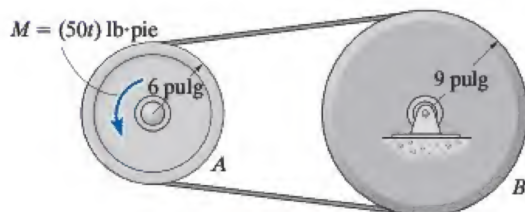
Prob. 19-18

19-19. El volante A tiene una masa de 30 kg y un radio de giro de $k_C = 95$ mm. El disco B tiene una masa de 25 kg, está apoyado en D por medio de un pasador y está acoplado al volante por una banda, la cual está sometida a una tensión de modo que no se deslice en las superficies de contacto. Si un motor proporciona un par de torsión $M = (12t)$ N · m al volante en sentido contrario al de las manecillas del reloj, donde t está en segundos, determine la velocidad angular del disco 3 s después de que se enciende el motor. Inicialmente, el volante está en reposo.



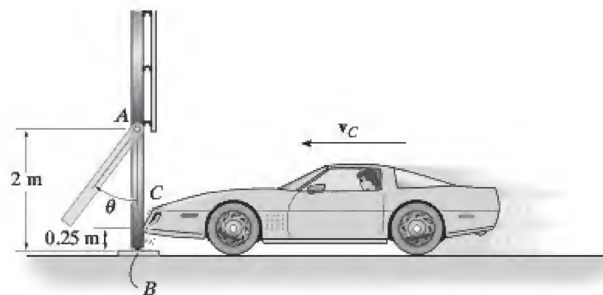
Prob. 19-19

***19-20.** El volante A de 30 lb tiene un radio de giro con respecto a su centro de 4 pulg. El disco B pesa 50 lb y está acoplado al volante por medio de una banda que no se desliza en sus superficies de contacto. Si un motor proporciona un par de torsión en sentido contrario al de las manecillas del reloj de $M = (50t)$ lb · pie, donde t está en segundos, determine el tiempo requerido para que el disco alcance una velocidad angular de 60 rad/s a partir del reposo.



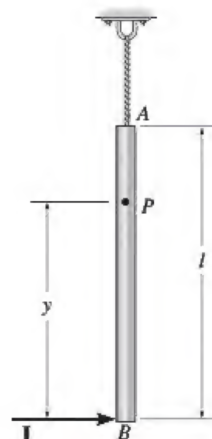
Prob. 19-20

•19-21. Por razones de seguridad, el poste de soporte de 20 kg, de una señalización está diseñado para que se rompa con resistencia insignificante en B cuando el poste se somete al impacto de un automóvil. Suponga que el poste está sujeto en A por medio de un pasador y que puede considerarse como una barra delgada, determine el impulso que el parachoques del automóvil ejerce en él, si después del impacto el poste parece girar en el sentido de las manecillas del reloj a un ángulo máximo de $\theta_{\text{máx}} = 150°$.



Prob. 19-21

19-22. La barra delgada tiene una masa m y cuelga del extremo A de una cuerda. Si recibe un golpe horizontal que le imprime un impulso **I** en su extremo inferior B, determine la ubicación y del punto P con respecto al cual la barra parece girar durante el impacto.

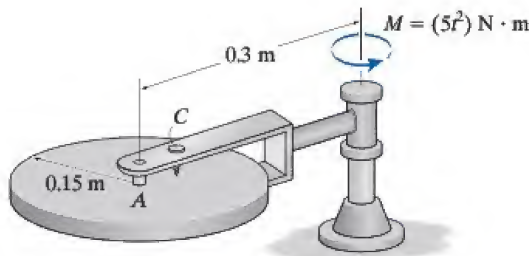


Prob. 19-22

19

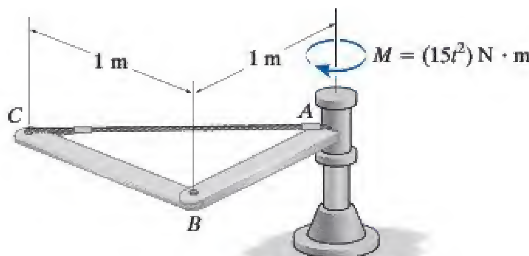
19-23. El disco circular de 25 kg está montado en una horquilla por medio de un eje liso A. El tornillo C se utiliza para bloquear el disco en la horquilla. Si ésta se somete a un par de torsión $M = (5t^2)$ N · m, donde t está en segundos y el disco está desbloqueado, determine la velocidad angular de la horquilla cuando $t = 3$ s, a partir del reposo. Ignore la masa de la horquilla.

***19-24.** El disco circular de 25 kg está montado en una horquilla por medio de un eje liso A. El tornillo C se utiliza para bloquear el disco en la horquilla. Si ésta se somete a un par de torsión $M = (5t^2)$ N · m, donde t está en segundos y el disco está bloqueado, determine la velocidad angular de la horquilla cuando $t = 3$ s, a partir del reposo. Ignore la masa de la horquilla.



Probs. 19-23/24

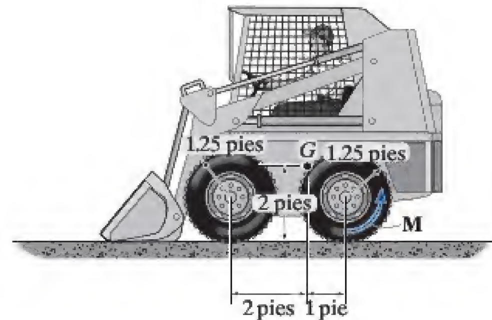
•19-25. Si la flecha se somete a un par de torsión $M = (15t^2)$ N · m, donde t está en segundos, determine la velocidad angular del ensamble cuando $t = 3$ s, a partir del reposo. Cada uno de los brazos AB y BC tiene una masa de 9 kg.



Prob. 19-25

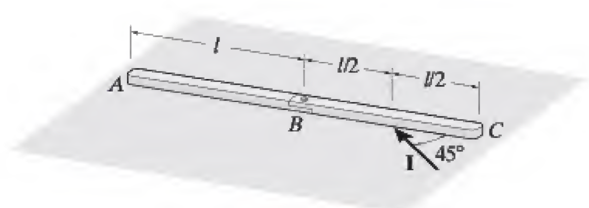
19-26. El cuerpo y el cucharón de un minicargador pesan 2000 lb y su centro de gravedad se encuentra en G. Cada una de las cuatro ruedas pesa 100 lb y su radio de giro con respecto a su centro de gravedad es de 1 pie. Si el motor proporciona un par de torsión de $M = 100$ lb · pie a cada una de las ruedas traseras motrices, determine la rapidez del minicargador en $t = 10$ s, a partir del reposo. Las ruedas giran sin deslizarse.

19-27. El cuerpo y el cucharón de un minicargador pesan 2000 lb y su centro de gravedad se encuentra en G. Cada una de las cuatro ruedas pesa 100 lb y su radio de giro con respecto a su centro de gravedad es de 1 pie. Si el minicargador alcanza una velocidad de 20 pies/s en 10 s, a partir del reposo, determine el par de torsión **M** suministrado a cada una de las ruedas traseras motrices. Las ruedas giran sin deslizarse.



Probs. 19-26/27

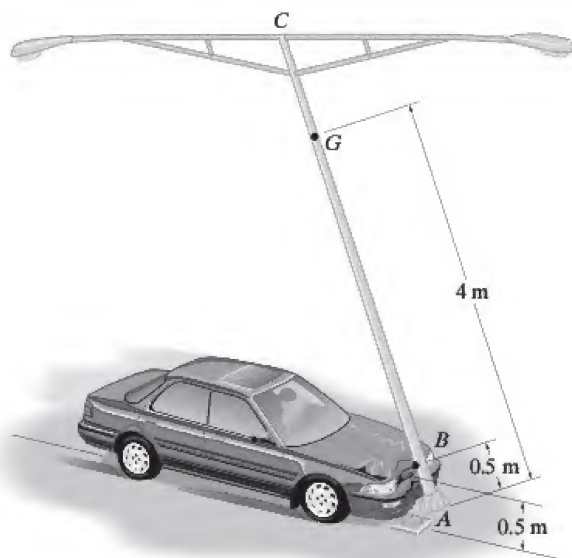
***19-28.** Cada una de las dos barras tiene una masa m y una longitud l, y descansan sobre el plano horizontal. Si se aplica un impulso **I** a un ángulo de 45° a una de las barras en su punto medio como se muestra, determine la velocidad angular de cada barra justo después del impacto. Las barras están conectadas por medio de un pasador en B.



Prob. 19-28

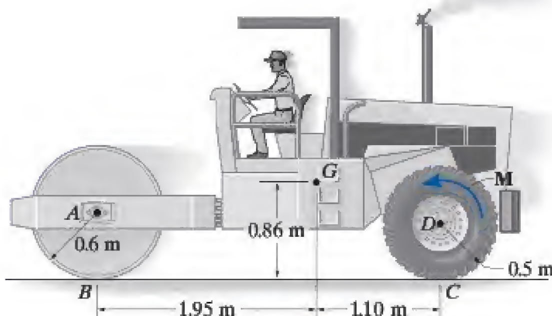
19

•**19-29.** El automóvil choca con un poste de luz, el cual está diseñado para romperse por su base con una resistencia insignificante. En un video tomado de la colisión se observa que al poste se le imprimió una velocidad angular de 60 rad/s cuando AC estaba vertical. El poste tiene una masa de 175 kg, un centro de masa en G y un radio de giro con respecto a un eje perpendicular al plano del poste que pasa por G de $k_G = 2.25$ m. Determine el impulso horizontal que el automóvil ejerce en el poste en el instante AC en que está esencialmente vertical.



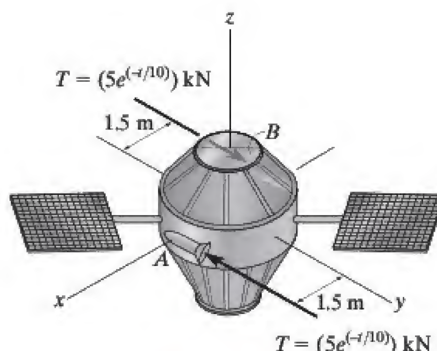
Prob. 19-29

19-30. El bastidor del rodillo tiene una masa de 5.5 Mg y un centro de masa en G. El rodillo tiene una masa de 2 Mg y un radio de giro con respecto a su centro de masa de $k_A = 0.45$ m. Si se aplica un par de torsión de $M = 600$ N · m a las ruedas traseras, determine la velocidad de la aplanadora en $t = 4$ s, a partir del reposo. No hay deslizamiento. Ignore la masa de las ruedas motrices.



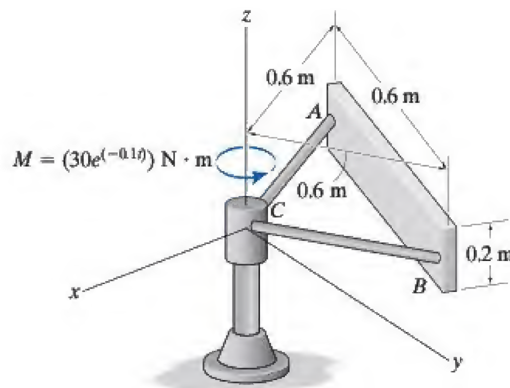
Prob. 19-30

19-31. El satélite de 200 kg tiene un radio de giro con respecto al eje centroidal z de $k_z = 1.25$ m. Inicialmente está girando a una velocidad angular constante de $\boldsymbol{\omega}_0 = \{1500\,\mathbf{k}\}$ rev/min. Si los propulsores A y B se encienden al mismo tiempo y producen un empuje de $T = (5e^{-0.1t})$ kN, donde t está en segundos, determine la velocidad angular del satélite cinco segundos después del encendido.



Prob. 19-31

*__19-32.__ Si el eje se somete a un par de torsión de $M = (30e^{-0.1t})$ N · m, donde t está en segundos, determine la velocidad angular del ensamble cuando $t = 5$ s, a partir del reposo. La placa rectangular tiene una masa de 25 kg. Las barras AC y BC tienen la misma masa de 5 kg.



Prob. 19-32

19

19.3 Conservación de la cantidad de movimiento

Conservación de la cantidad de movimiento lineal. Si la suma de todos los *impulsos lineales* que actúan en un sistema de cuerpos rígidos conectados es *cero* en una dirección específica, entonces la cantidad de movimiento lineal del sistema es constante, o se conserva en esta dirección, es decir,

$$\left(\sum \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento lineal}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_1 = \left(\sum \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento lineal}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_2 \qquad (19\text{-}16)$$

Esta ecuación se conoce como la *conservación de la cantidad de movimiento lineal.*

Sin inducir errores apreciables en los cálculos, la ecuación 19-16 puede ser aplicable en una dirección específica a lo largo de la cual los impulsos lineales son mínimos o *no impulsores*. De manera específica, las fuerzas no impulsoras ocurren cuando fuerzas mínimas actúan durante lapsos muy cortos. Algunos ejemplos son la fuerza de un resorte levemente deformado, la fuerza de contacto inicial con suelo blando, y en algunos casos el peso del cuerpo.

Conservación de la cantidad de movimiento angular. La cantidad de movimiento angular de un sistema de cuerpos rígidos conectados se conserva con respecto al centro de masa G del sistema, o con respecto a un punto fijo O, cuando la suma de todos los impulsos angulares con respecto a estos puntos es cero o apreciablemente mínima (no impulsores). La tercera de estas ecuaciones, 19-15, se vuelve entonces

$$\left(\sum \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento angular}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{O1} = \left(\sum \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento angular}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{O2} \qquad (19\text{-}17)$$

Esta ecuación se conoce como la *conservación de la cantidad de movimiento angular*. En el caso de un solo cuerpo rígido, la ecuación 19-17 aplicada al punto G se vuelve $(I_G\omega)_1 = (I_G\omega)_2$. Por ejemplo, considere un clavadista que ejecuta un salto mortal después de saltar de un trampolín. Al juntar sus brazos y piernas al pecho, *reduce* el momento de inercia de su cuerpo y, por tanto, *incrementa* su velocidad angular ($I_G\omega$ debe ser constante). Si recobra la posición recta justo antes de entrar al agua, el momento de inercia de su cuerpo se *incrementa*, y por tanto su velocidad angular *se reduce*. Como el peso crea un impulso lineal durante el tiempo del movimiento, este ejemplo también ilustra cómo puede conservarse la cantidad de movimiento angular de un cuerpo y aún así la cantidad de movimiento lineal es *no*. Tales casos ocurren siempre que las fuerzas externas que crean el impulso lineal pasan por el centro de masa del cuerpo o por un eje de rotación fijo.

Procedimiento para el análisis

La conservación de la cantidad de movimiento lineal o angular deberá aplicarse por el siguiente procedimiento.

Diagrama de cuerpo libre.

- Establezca el marco inercial de referencia x, y y trace el diagrama de cuerpo libre para el cuerpo o sistema de cuerpos durante el tiempo del impacto. A partir de este diagrama clasifique cada una de las fuerzas aplicadas como "impulsoras" o "no impulsoras".
- Por inspección del diagrama de cuerpo libre, la *conservación de la cantidad de movimiento lineal* es válida en una dirección dada cuando fuerzas impulsoras *no* externas actúan en el cuerpo o sistema en esa dirección; mientras que la *conservación de la cantidad de movimiento angular* es válida con respecto a un punto fijo O o en el centro de masa G de un cuerpo o sistema de cuerpos cuando todas las fuerzas impulsoras externas que actúan en el cuerpo o sistema crean un momento cero (o impulso angular cero) con respecto a O o G.
- Como un procedimiento alternativo, trace los diagramas de impulso y cantidad de movimiento del cuerpo o sistema de cuerpos. Estos diagramas son muy útiles para visualizar los términos de "momento" utilizados en la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento angular, cuando se ha decidido que los momentos angulares tienen que calcularse con respecto a un punto diferente del centro de masa G del cuerpo.

Conservación de la cantidad de movimiento.

- Aplique la cantidad de movimiento lineal o angular en las direcciones apropiadas.

Cinemática.

- Si el movimiento parece ser complicado, los diagramas cinemáticos (de velocidad) pueden ser útiles para obtener las relaciones cinemáticas necesarias.

EJEMPLO 19.6

La rueda de 10 kg que se muestra en la figura 19-9*a* tiene un momento de inercia $I_G = 0.156 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Suponga que la rueda no se deslice o rebota, determine la velocidad mínima $\mathbf{v}_G$ que debe tener para apenas rodar sobre la obstrucción en A.

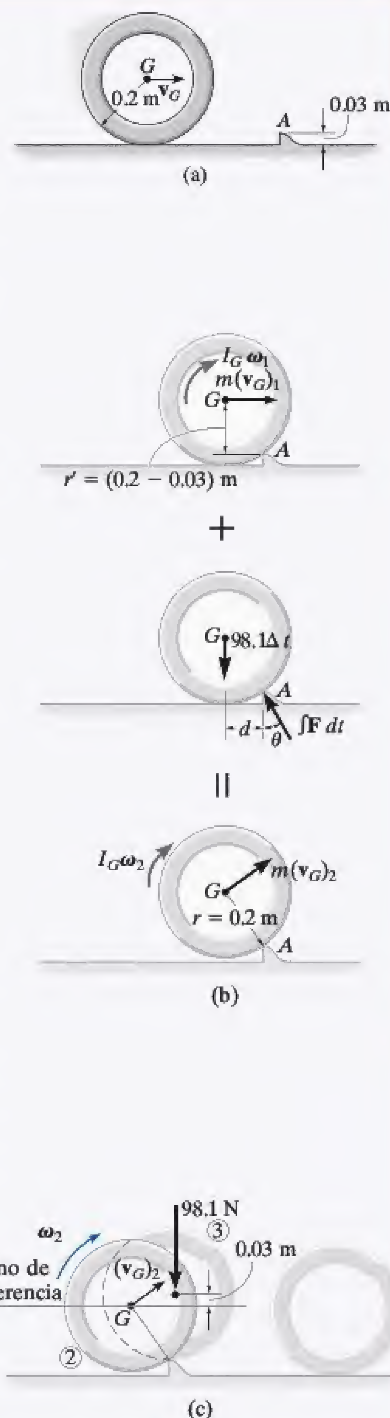


Fig. 19-9

SOLUCIÓN

Diagramas de impulso y cantidad de movimiento. Como no hay deslizamiento ni rebote, la rueda en esencia *gira* alrededor del punto A durante el contacto. Esta condición se muestra en la figura 19-9*b*, la cual indica, respectivamente, la cantidad de movimiento de la rueda *justo antes del impacto*, los impulsos impartidos a la rueda *durante el impacto* y la cantidad de movimiento de la rueda *justo después del impacto*. Sólo dos impulsos (fuerzas) actúan en la rueda. Por comparación, la fuerza en A es mucho mayor que la del peso, y como el tiempo del impacto es muy corto, el peso puede considerarse como no impulsor. La magnitud y la dirección θ de la fuerza impulsora $\mathbf{F}$ en A se desconocen. Para eliminar esta fuerza del análisis, observe que la cantidad de movimiento angular con respecto a A en esencia *se conserva* puesto que $(98.1\Delta t)d \approx 0$.

Conservación de la cantidad de movimiento angular. Con referencia a la figura 19-9*b*,

$$(\circlearrowright +) \qquad (H_A)_1 = (H_A)_2$$

$$r'm(v_G)_1 + I_G\omega_1 = rm(v_G)_2 + I_G\omega_2$$

$$(0.2 \text{ m} - 0.03 \text{ m})(10 \text{ kg})(v_G)_1 + (0.156 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(\omega_1) =$$

$$(0.2 \text{ m})(10 \text{ kg})(v_G)_2 + (0.156 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(\omega_2)$$

Cinemática. Como no hay deslizamiento, en general $\omega = v_G/r = v_G/0.2 \text{ m} = 5v_G$. Al sustituir esta expresión en la ecuación anterior y simplificar, obtenemos

$$(v_G)_2 = 0.8921(v_G)_1 \qquad (1)$$

Conservación de la energía.* Para que ruede sobre la obstrucción, la rueda debe pasar a la posición 3 que se muestra en la figura 19-9*c*. Por consiguiente, si $(v_G)_2$ [o $(v_G)_1$] tiene que ser mínima, es necesario que la energía cinética de la rueda en la posición 2 sea igual a la energía potencial en la posición 3. Si colocamos el plano de referencia a través del centro de gravedad, como se muestra en la figura, y aplicamos la ecuación de la conservación de la energía, tenemos

$$\{T_2\} + \{V_2\} = \{T_3\} + \{V_3\}$$

$$\left\{\tfrac{1}{2}(10 \text{ kg})(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}(0.156 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)\omega_2^2\right\} + \{0\} =$$

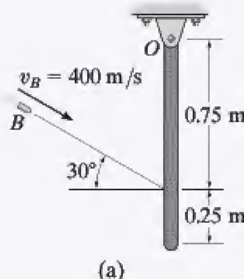
$$\{0\} + \{(98.1 \text{ N})(0.03 \text{ m})\}$$

Al sustituir $\omega_2 = 5(v_G)_2$ y la ecuación 1 en esta ecuación y resolver,

$$(v_G)_1 = 0.729 \text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

*Este principio *no es aplicable durante el impacto*, puesto que se *pierde* energía durante la colisión. Sin embargo, justo después del impacto, como en la figura 19-9*c*, sí puede utilizarse.

EJEMPLO 19.7

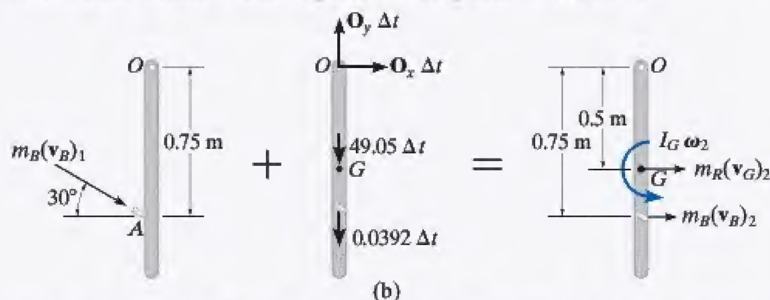


(a)

La barra delgada de 5 kg que se muestra en la figura 19-10*a* está sujeta por medio de un pasador en O e inicialmente está en reposo. Si se dispara una bala de 4 g hacia la barra con una velocidad de 400 m/s, como se muestra en la figura, determine la velocidad angular de la barra justo después de que la bala se incrusta en ella.

SOLUCIÓN

Diagramas de impulso y cantidad de movimiento. El impulso que la bala ejerce en la barra puede eliminarse del análisis y la velocidad angular de la barra justo después del impacto puede determinarse considerando la bala y la barra como un solo sistema. Para aclarar los principios implicados, los diagramas de impulso y cantidad de movimiento se muestran en la figura 19-10*b*. Los diagramas de cantidad de movimiento se trazan *justo antes y justo después del impacto*. Durante el impacto, la bala y la barra ejercen *impulsos internos iguales pero opuestos* en A. Como se muestra en el diagrama de impulso, los impulsos que son externos al sistema se deben a las reacciones en O y a los pesos de la bala y la barra. Como el tiempo del impacto, Δt, es muy corto, la barra se mueve sólo una pequeña cantidad, y por tanto los "momentos" de los impulsos creados por el peso con respecto al punto O en esencia son cero. Por consiguiente la cantidad de movimiento angular con respecto a este punto se conserva.



(b)

Conservación de la cantidad de movimiento angular. Según la figura 19-10*b*, tenemos

$$(\circlearrowleft +) \qquad \Sigma(H_O)_1 = \Sigma(H_O)_2$$

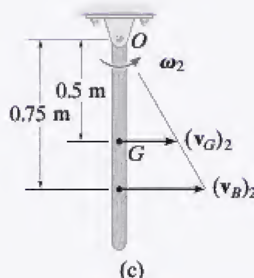
$$m_B(v_B)_1\cos 30°(0.75\text{ m}) = m_B(v_B)_2(0.75\text{ m}) + m_R(v_G)_2(0.5\text{ m}) + I_G\omega_2$$

$$(0.004\text{ kg})(400\cos 30°\text{ m/s})(0.75\text{ m}) =$$

$$(0.004\text{ kg})(v_B)_2(0.75\text{ m}) + (5\text{ kg})(v_G)_2(0.5\text{ m}) + \left[\tfrac{1}{12}(5\text{ kg})(1\text{ m})^2\right]\omega_2$$

o

$$1.039 = 0.003(v_B)_2 + 2.50(v_G)_2 + 0.4167\omega_2 \qquad (1)$$



(c)

Fig. 19-10

Cinemática. Como la barra está sujeta por medio de un pasador en O, de acuerdo con la figura 19-10*c* tenemos

$$(v_G)_2 = (0.5\text{ m})\omega_2 \qquad (v_B)_2 = (0.75\text{ m})\omega_2$$

Si sustituimos en la ecuación 1 y resolvemos, obtenemos

$$\omega_2 = 0.623\text{ rad/s}\circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

19

*19.4 Impacto excéntrico

Los conceptos que implican el impacto central y oblicuo de partículas se presentaron en la sección 15.4. Ahora ampliaremos este tratamiento y analizaremos el impacto excéntrico de dos cuerpos. El *impacto excéntrico* ocurre cuando la línea que conecta los *centros de masa* de los dos cuerpos *no* coincide con la línea de impacto.* Este tipo de impacto suele ocurrir cuando uno o los dos cuerpos están limitados a girar alrededor de un eje fijo. Considere, por ejemplo, la colisión en C entre los cuerpos A y B, que se muestra en la figura 19-11*a*. Se supone que justo antes de la colisión B gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj a una velocidad angular $(\boldsymbol{\omega}_B)_1$ y que la velocidad del punto de contacto C localizado en A es $(\mathbf{u}_A)_1$. Los diagramas cinemáticos de ambos cuerpos justo antes de la colisión se muestran en la figura 19-11*b*. Siempre que los cuerpos sean uniformes, las fuerzas impulsoras que ejercen entre ellos están dirigidas a lo largo de la línea de impacto. Por consiguiente, el componente de la velocidad del punto C en el cuerpo B, el cual está dirigido a lo largo de la línea de impacto, es $(v_B)_1 = (\omega_B)_1 r$, figura 19-11*b*. Asimismo, en el cuerpo A el componente de la velocidad $(\mathbf{u}_A)_1$ a lo largo de la línea de impacto es $(\mathbf{v}_A)_1$. Para que la colisión ocurra $(v_A)_1 > (v_B)_1$.

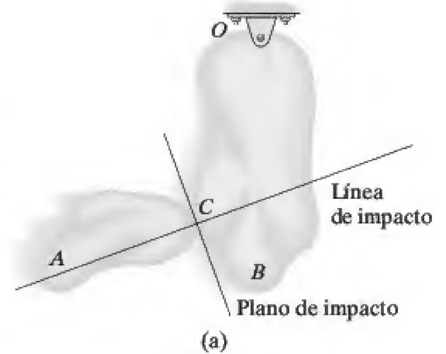


Fig. 19-11

Durante el impacto se ejerce una fuerza impulsora igual pero opuesta **P** entre los cuerpos, la cual los *deforma* en el punto de contacto. El impulso resultante se muestra en los diagramas de impulso de ambos cuerpos, figura 19-11*c*. Observe que la fuerza impulsora en el punto C del cuerpo que gira crea reacciones impulsoras en el pasador en O. En estos diagramas se supone que el impacto crea fuerzas que son mucho más grandes que los pesos no impulsores de los cuerpos, los cuales no se muestran. Cuando la deformación en el punto C es máxima, C en ambos cuerpos se mueve con una velocidad común **v** a lo largo de la línea de impacto, figura 19-11*d*. Ocurre entonces un periodo de *restitución* durante el cual los cuerpos tienden a recuperar sus formas originales. La fase de restitución crea una fuerza impulsora igual pero opuesta **R** que actúa entre los cuerpos como se muestra en el diagrama de impulso, figura 19-11*e*. Después de la restitución los cuerpos se apartan de modo que el punto C en el cuerpo B tiene una velocidad $(\mathbf{v}_B)_2$ y el punto C en el cuerpo A tiene una velocidad $(\mathbf{u}_A)_2$, figura 19-11*f*, donde $(v_B)_2 > (v_A)_2$.

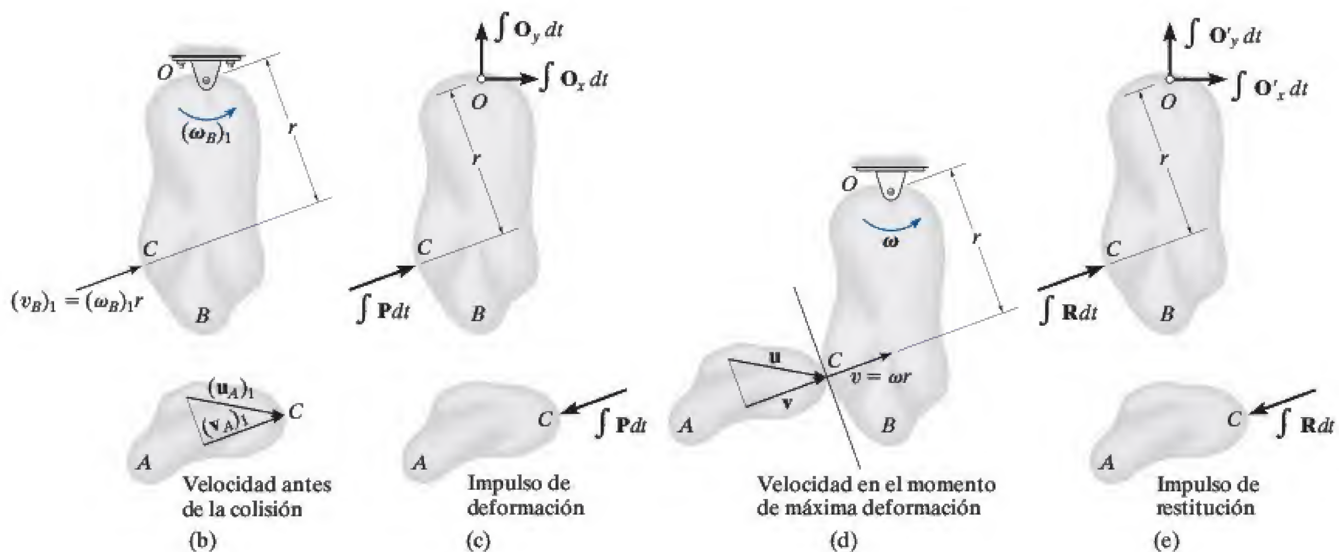
En general, un problema que implica el impacto de dos cuerpos requiere determinar las *dos incógnitas* $(v_A)_2$ y $(v_B)_2$; suponemos que $(v_A)_1$ y $(v_B)_1$ son conocidas (o que pueden determinarse con cinemática, métodos de energía, ecuaciones de movimiento, etcétera). Para resolver problemas como ésos deben escribirse dos ecuaciones. Por lo general, la *primera ecuación* implica la aplicación de *la conservación de la cantidad de movimiento angular a los dos cuerpos*. En el caso de los dos cuerpos A y B, podemos formular que la cantidad de movimiento angular se conserva con respecto al punto O puesto que los impulsos en C son internos al sistema y los impulsos en O crean un momento cero (o impulso angular cero) con respecto a O. La *segunda ecuación* se obtiene por la definición del *coeficiente de restitución*, e, el cual es la relación del impulso de restitución al impulso de deformación.



He aquí un ejemplo de impacto excéntrico que ocurre entre esta bola de boliche y el pino.

*Cuando estas líneas coinciden, ocurre el impacto central y el problema puede analizarse como se vio en la sección 15.4.

19



Sin embargo, es importante tener en cuenta que *este análisis tiene sólo una aplicación muy limitada en ingeniería, porque se encontró que los valores de e en este caso son muy sensibles al material, la geometría y la velocidad de cada uno de los cuerpos que chocan.* Para establecer una forma útil de la ecuación del coeficiente de restitución primero debemos aplicar el principio de impulso y cantidad de movimiento angular con respecto al punto O a los cuerpos B y A por separado. Al combinar los resultados, obtenemos entonces la ecuación necesaria. Procediendo de esta manera, el principio de impulso y cantidad de movimiento aplicado al cuerpo B desde el instante justo antes de la colisión hasta el instante de máxima deformación, figuras 19-11b, 19-11c y 19-11d, se vuelve

$$(\circlearrowleft+) \qquad I_O(\omega_B)_1 + r\int P\,dt = I_O\omega \qquad (19\text{-}18)$$

Donde I_O es el momento de inercia del cuerpo B con respecto al punto O. Asimismo, al aplicar el principio de impulso y cantidad de movimiento angular desde el instante de máxima deformación hasta el instante justo después del impacto, figuras 19-11d, 19-11e y 19-11f, obtenemos

$$(\circlearrowleft+) \qquad I_O\omega + r\int R\,dt = I_O(\omega_B)_2 \qquad (19\text{-}19)$$

Si resolvemos las ecuaciones 19-18 y 19-19 para $\int P\,dt$ y $\int R\,dt$, respectivamente, y formulamos e, tenemos

$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} = \frac{r(\omega_B)_2 - r\omega}{r\omega - r(\omega_B)_1} = \frac{(v_B)_2 - v}{v - (v_B)_1}$$

O
$(\omega_B)_2$
r
C
$(v_B)_2 = (\omega_B)_2 r$
B
$(u_A)_2$
$(v_A)_2$
C
A

Velocidad después de la colisión

(f)

Fig. 19-11 (cont.)

19

Del mismo modo, podemos escribir una ecuación que relaciona las magnitudes de las velocidades $(v_A)_1$ y $(v_A)_2$ del cuerpo A. El resultado es

$$e = \frac{v - (v_A)_2}{(v_A)_1 - v}$$

Al combinar las dos ecuaciones anteriores y eliminar la velocidad común v se obtiene el resultado deseado, es decir,

$$(+\nearrow) \qquad e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1} \qquad (19\text{-}20)$$

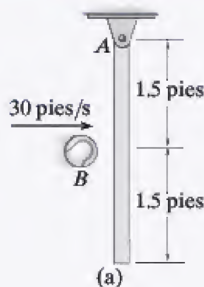
Esta ecuación es idéntica a la ecuación 15-11, la cual se derivó para el impacto central entre dos partículas. Establece que el coeficiente de restitución es igual a la relación de la velocidad relativa de *separación* de los puntos de contacto (C) *justo después del impacto* a la velocidad relativa a la cual los puntos *se aproximan* entre sí *justo* antes del impacto. Al derivar esta ecuación supusimos que los puntos de contacto de ambos cuerpos se movieron hacia arriba y a la derecha *tanto antes como después* del impacto. Si el movimiento de cualquiera de los puntos en contacto ocurre hacia abajo y a la izquierda, la velocidad de este punto deberá considerarse como una cantidad negativa en la ecuación 19-20.





Muchas columnas de señales de carretera se diseñan para que se rompan durante un impacto en sus apoyos y colapsen con facilidad en sus articulaciones. Esto se muestra por medio de las conexiones ranuradas en su base y las rupturas a la mitad de la columna.

EJEMPLO 19.8

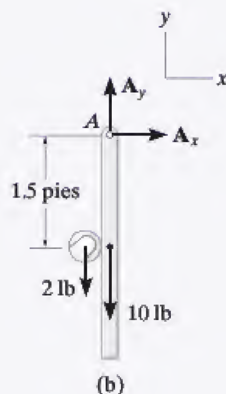


(a)

La barra de 10 lb está colgada del pasador en A, figura 19-12*a*. Si se lanza una bola B de 2 lb contra la barra y choca con su centro a una velocidad de 30 pies/s, determine la velocidad angular de la barra justo después del impacto. El coeficiente de restitución es $e = 0.4$.

SOLUCIÓN

Conservación de la cantidad de movimiento angular. Considere la bola y la barra como un sistema, figura 19-12*b*. La cantidad de movimiento angular se conserva con respecto al punto A puesto que la fuerza impulsora entre la barra y la bola es *interna*. Además, los *pesos* de la bola y la barra son *no impulsores*. Si observamos las direcciones de las velocidades de la bola y la barra justo después del impacto, como se muestra en el diagrama cinemático, figura 19-12*c*, requerimos



(b)

$$(\circlearrowleft +) \qquad (H_A)_1 = (H_A)_2$$

$$m_B(v_B)_1(1.5 \text{ pies}) = m_B(v_B)_2(1.5 \text{ pies}) + m_R(v_G)_2(1.5 \text{ pies}) + I_G\omega_2$$

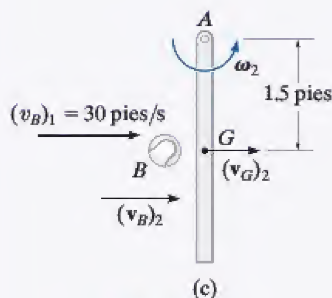
$$\left(\frac{2 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(30 \text{ pies/s})(1.5 \text{ pies}) = \left(\frac{2 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(v_B)_2(1.5 \text{ pies}) +$$

$$\left(\frac{10 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(v_G)_2(1.5 \text{ pies}) + \left[\frac{1}{12}\left(\frac{10 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(3 \text{ pies})^2\right]\omega_2$$

Como $(v_G)_2 = 1.5\omega_2$ entonces

$$2.795 = 0.09317(v_B)_2 + 0.9317\omega_2 \qquad (1)$$

Coeficiente de restitución. Con referencia a la figura 19-12*c*, tenemos



(c)

Fig. 19-12

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad e = \frac{(v_G)_2 - (v_B)_2}{(v_B)_1 - (v_G)_1} \qquad 0.4 = \frac{(1.5 \text{ pies})\omega_2 - (v_B)_2}{30 \text{ pies/s} - 0}$$

$$12.0 = 1.5\omega_2 - (v_B)_2$$

Al resolver,

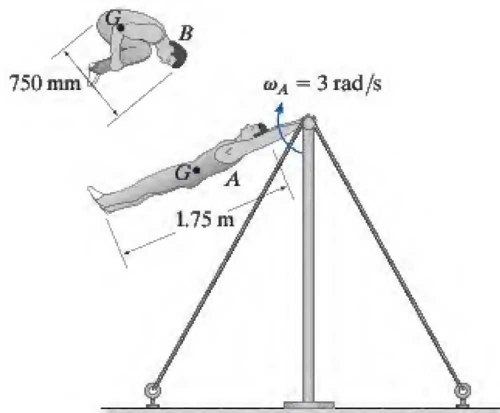
$$(v_B)_2 = -6.52 \text{ pies/s} = 6.52 \text{ pies/s} \leftarrow$$

$$\omega_2 = 3.65 \text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

19

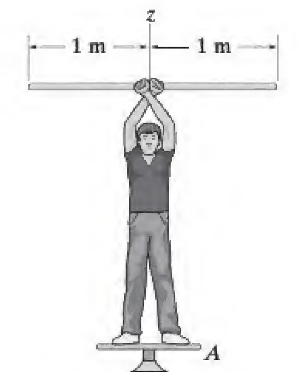
PROBLEMAS

•**19-33.** El gimnasta de 75 kg se suelta de la barra horizontal en una posición totalmente estirada A, y gira a una velocidad angular de $\omega_A = 3$ rad/s. Estime su velocidad angular cuando asuma una posición apretada B. Considere al gimnasta en las posiciones A y B como una barra delgada uniforme y un disco uniforme, respectivamente.



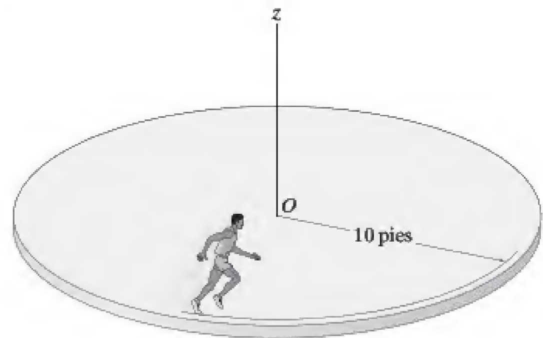
Prob. 19-33

19-34. Un hombre de 75 kg se para en la tornamesa A y hace girar una barra delgada de 6 kg sobre su cabeza. Si la velocidad angular de la barra es $\omega_r = 5$ rad/s medida con respecto al hombre y se ve que la tornamesa está girando en la dirección opuesta con una velocidad angular de $\omega_t = 3$ rad/s, determine el radio de giro del hombre con respecto al eje z. Considere la tornamesa como un disco delgado de 300 mm de radio y 5 kg de masa.



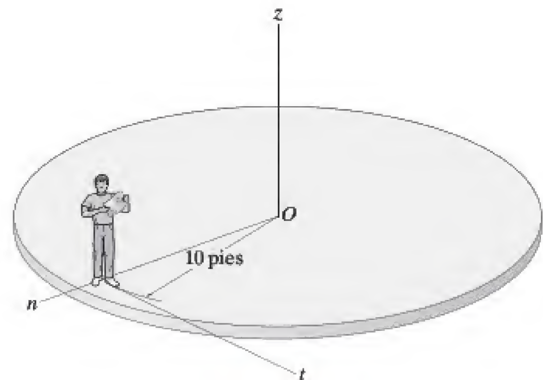
Prob. 19-34

19-35. Una plataforma circular horizontal pesa 300 lb y su radio de giro es de $k_z = 8$ pies con respecto al eje z que pasa por su centro O. La plataforma gira libremente alrededor del eje z e inicialmente está en reposo. Un hombre que pesa 150 lb comienza a correr a lo largo del borde en una trayectoria circular de 10 pies de radio. Si mantiene una rapidez de 4 pies/s con respecto a la plataforma, determine la velocidad angular de la plataforma. Ignore la fricción.



Prob. 19-35

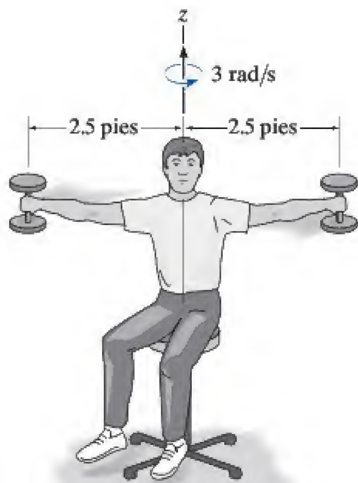
***19-36.** Una plataforma circular horizontal pesa 300 lb y su radio de giro es $k_z = 8$ pies con respecto al eje z que pasa por su centro O. La plataforma gira libremente alrededor del eje z e inicialmente está en reposo. Un hombre que pesa 150 lb lanza un bloque de 15 lb desde el borde de la plataforma con una velocidad horizontal de 5 pies/s, *medida con respecto a la plataforma*. Determine la velocidad angular de la plataforma si el bloque se lanza (a) tangente a la plataforma, a lo largo del eje $+t$ y (b) hacia fuera a lo largo de una línea radial, o eje $+n$. Ignore la estatura del hombre.



Prob. 19-36

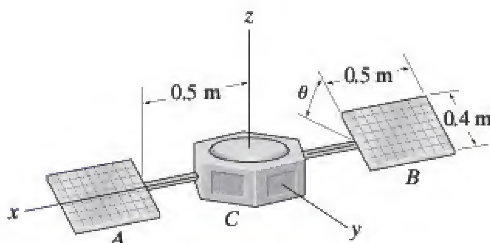
19

•**19-37.** El hombre se sienta en la silla giratoria y sostiene dos pesas de 5 lb con sus brazos extendidos. Si se pone a girar a 3 rad/s en esta posición, determine su velocidad angular cuando las pesas son atraídas y se mantienen a 0.3 pie del eje de rotación. Suponga que él pesa 160 lb y que tiene un radio de $k_z = 0.55$ pie con respecto al eje z. Ignore la masa de sus brazos y el tamaño de las pesas en el cálculo.



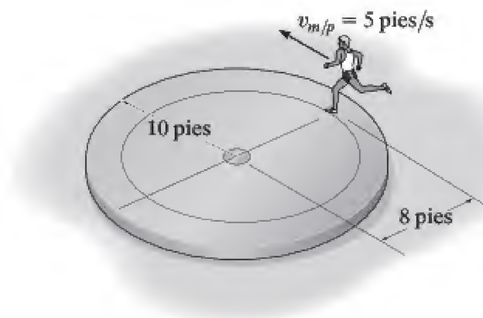
Prob. 19-37

19-38. El cuerpo C del satélite tiene una masa de 200 kg y un radio de giro con respecto al eje z de $k_z = 0.2$ m. Si el satélite gira alrededor del eje z con una velocidad angular de 5 rev/s, cuando los paneles solares A y B están en una posición de $\theta = 0°$, determine la velocidad angular del satélite cuando los paneles solares giran a una posición de $\theta = 90°$. Considere que cada panel solar es una placa delgada de 30 kg de masa. Ignore la masa de las barras.



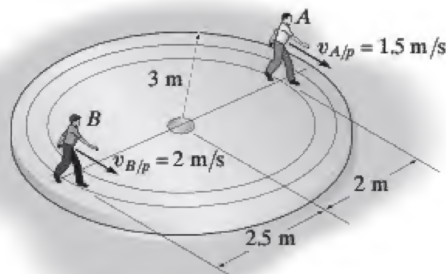
Prob. 19-38

19-39. Un hombre de 150 lb salta de la plataforma con una velocidad de $v_{m/p} = 5$ pies/s, con respecto a la plataforma. Determine la velocidad angular de la plataforma. Inicialmente el hombre y la plataforma están en reposo. La plataforma pesa 300 lb y puede ser tratada como un disco uniforme.



Prob. 19-39

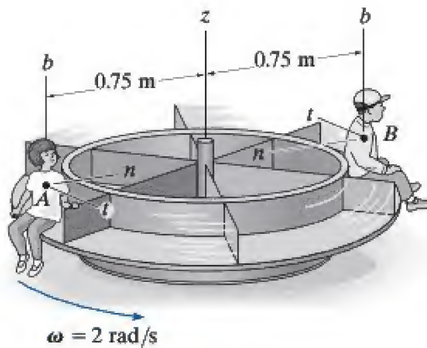
***19-40.** La plataforma de 150 kg puede ser considerada como un disco. Dos hombres, A y B, de 60 kg y 75 kg de masa, respectivamente, se paran en la plataforma cuando está en reposo. Si comienzan a caminar alrededor de las trayectorias circulares con velocidades de $v_{A/p} = 1.5$ m/s y $v_{B/P} = 2$ m/s, medidas con respecto a la plataforma, determine la velocidad angular de ésta.



Prob. 19-40

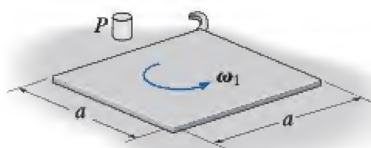
19

•**19-41.** Dos niños A y B, cada uno de 30 kg de masa, se sientan en el borde del carrusel que gira a $\omega = 2$ rad/s. Si se excluyen los niños, el carrusel tiene una masa de 180 kg y un radio de giro de $k_z = 0.6$ m. Determine la velocidad angular del carrusel si A salta hacia fuera horizontalmente en la dirección $-n$ con una rapidez de 2 m/s, medida con respecto al carrusel. ¿Cuál es la velocidad angular del carrusel si B luego salta horizontalmente en la dirección $-t$ con una rapidez de 2 m/s, medida con respecto al carrusel? Ignore la fricción y la estatura de cada niño.



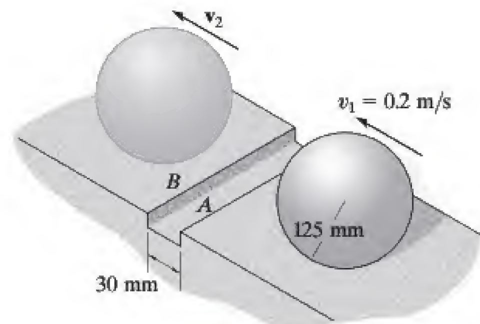
Prob. 19-41

19-42. Una placa cuadrada delgada de masa m gira sobre la superficie lisa a una velocidad angular ω_1. Determine su nueva velocidad angular justo después de que el gancho en su esquina choca con la clavija P y la placa comienza a girar con respecto a P sin rebotar.



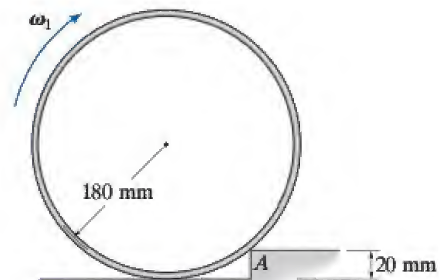
Prob. 19-42

19-43. Una bola de 8 kg de masa que tiene una velocidad inicial de $v_1 = 0.2$ m/s rueda sobre una depresión de 30 mm de largo. Suponga que la bola rueda sobre los bordes de contacto, primero A, y luego B, sin deslizarse, y determine su velocidad final $\mathbf{v}_2$ cuando llega al otro lado.



Prob. 19-43

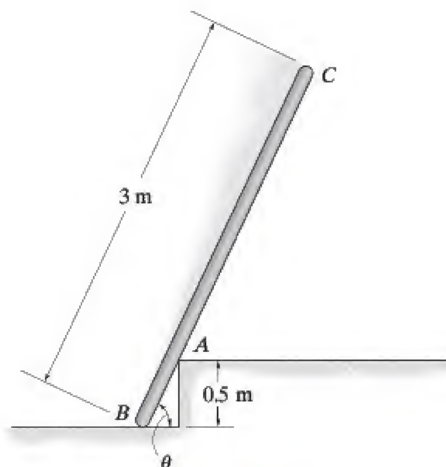
***19-44.** El aro delgado de 15 kg golpea con un escalón de 20 mm de alto. Determine la velocidad angular mínima ω_1 que el aro puede tener de modo que apenas ruede sobre el escalón en A sin deslizarse.



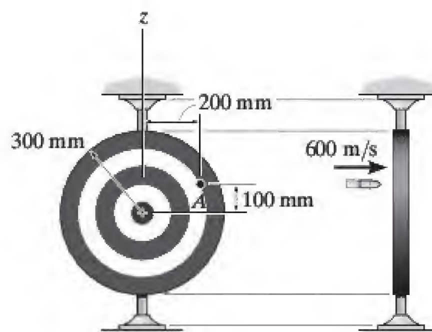
Prob. 19-44

•**19-45.** El poste uniforme tiene una masa de 15 kg y se cae del reposo cuando $\theta = 90°$. Choca con el borde en A cuando $\theta = 60°$. Si el poste comienza entonces a girar con respecto a este punto después del contacto, determine su velocidad angular justo después del impacto. Suponga que el poste no se desliza en B al caer hasta que choca con A.

19-47. El blanco es un disco circular delgado de 5 kg que puede girar libremente alrededor del eje z. Una bala de 25 g, que viaja a 600 m/s impacta el blanco en A y se incrusta en él. Determine la velocidad angular del blanco después del impacto. En principio está en reposo.



Prob. 19-45

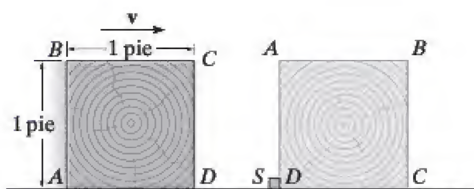


Prob. 19-47

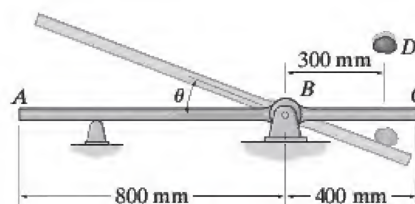
19

19-46. El bloque de 10 lb se desliza sobre una superficie lisa cuando la esquina D golpea el bloque S. Determine la velocidad mínima **v** que el bloque deberá tener para que se vuelque sobre su costado y quede en la posición que se muestra. Ignore el tamaño de S. *Sugerencia:* durante el impacto considere que el peso del bloque es no impulsor.

*__19-48.__ Una masa de plastilina D de 2 kg choca con un tablón uniforme ABC de 10 kg con una velocidad de 10 m/s. Si la plastilina permanece adherida al tablón, determine el ángulo máximo θ de oscilación antes de que el tablón se detenga momentáneamente. Ignore el tamaño de la plastilina.

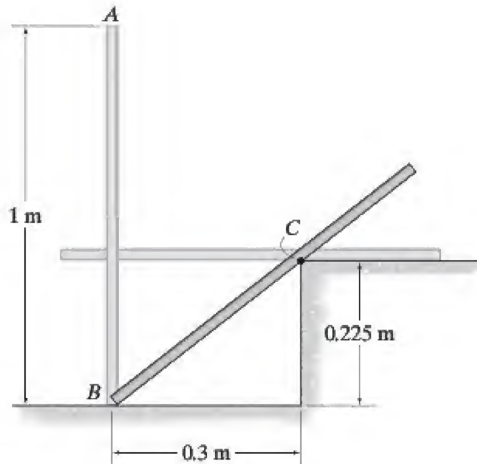


Prob. 19-46



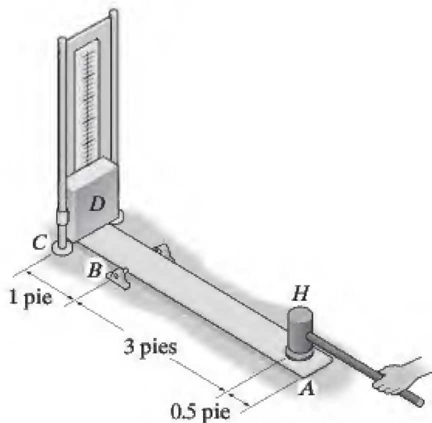
Prob. 19-48

•19-49. Una barra delgada uniforme AB de 6 kg recibe una leve perturbación horizontal cuando está en posición vertical y gira con respecto a B sin deslizarse. Posteriormente, choca con el escalón en C. El impacto es perfectamente plástico de modo que la barra gira con respecto a C sin deslizarse después del impacto. Determine su velocidad angular cuando está en la posición horizontal que se muestra.



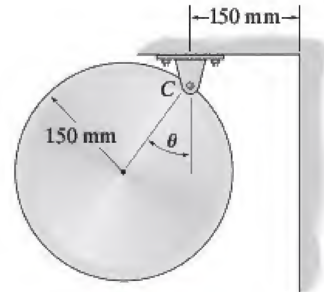
Prob. 19-49

19-50. El tablón rígido de 30 lb es golpeado por la cabeza del martillo H de 15 lb. Justo antes del impacto, el martillo se sujeta holgadamente y tiene una velocidad vertical de 75 pies/s. Si el coeficiente de restitución entre la cabeza del martillo y el tablón es $e = 0.5$, determine la altura máxima alcanzada por el bloque D de 50 lb. El bloque puede deslizarse libremente a lo largo de las dos barras guía verticales. El tablón inicialmente está en una posición horizontal.



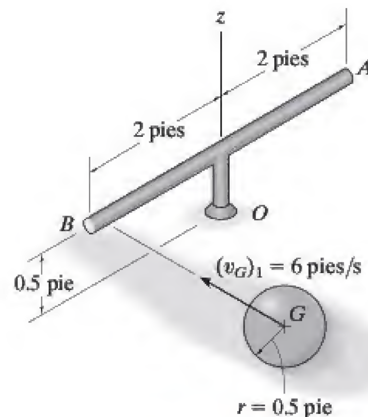
Prob. 19-50

19-51. El disco tiene una masa de 15 kg. Si se suelta desde el reposo cuando $\theta = 30°$, determine el ángulo máximo θ de rebote después de que choca con la pared. El coeficiente de restitución entre el disco y la pared es $e = 0.6$. Cuando $\theta = 0°$, el disco apenas toca la pared. Ignore la fricción en el pasador C.



Prob. 19-51

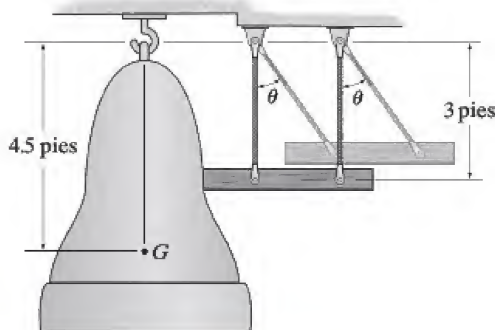
*19-52. El centro de masa de la bola de 3 lb tiene una velocidad de $(v_G)_1 = 6$ pies/s cuando choca con el extremo de la barra delgada uniforme de 5 lb, la cual está en reposo. Determine la velocidad angular de la barra con respecto al eje z después del impacto si $e = 0.8$.



Prob. 19-52

19

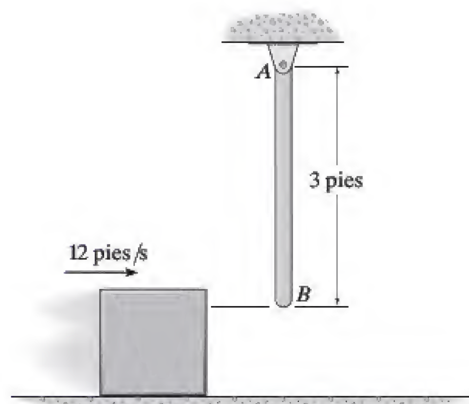
•**19-53.** La campana de 300 lb está en reposo en la posición vertical antes de ser golpeada por una viga de madera de 75 lb colgada de dos cuerdas de igual longitud. Si la viga se suelta del reposo a $\theta = 45°$, determine la velocidad angular de la campana y la velocidad de la viga inmediatamente después del impacto. El coeficiente de restitución entre la campana y la viga es $e = 0.6$. El centro de gravedad de la campana se encuentra en el punto G y su radio de giro con respecto a G es $k_G = 1.5$ pies.



Prob. 19-53

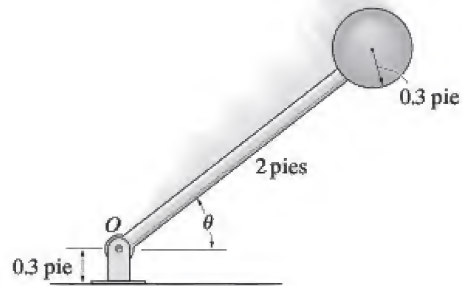
19-54. La barra AB de 4 lb cuelga en posición vertical. Un bloque de 2 lb, que se desliza sobre una superficie horizontal lisa con una velocidad de 12 pies/s, choca con la barra en su extremo B. Determine la velocidad del bloque inmediatamente después de la colisión. El coeficiente de restitución entre el bloque y la barra en B es $e = 0.8$.

19



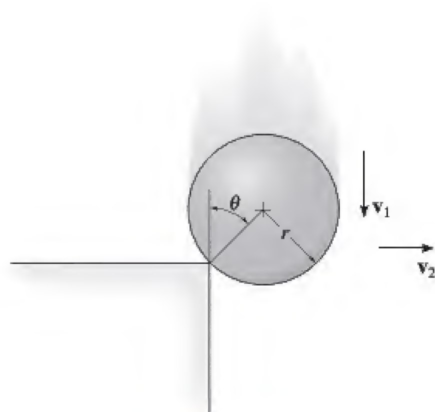
Prob. 19-54

19-55. El péndulo consta de una esfera de 10 lb y una barra de 4 lb. Si se suelta desde el reposo cuando $\theta = 90°$, determine el ángulo θ del rebote después de que la esfera choca con el suelo. Considere $e = 0.8$.



Prob. 19-55

*__19-56.__ La bola sólida de masa m se deja caer con una velocidad $\mathbf{v}_1$ sobre el borde del escalón. Si rebota horizontalmente del escalón con una velocidad $\mathbf{v}_2$, determine el ángulo θ al cual ocurre el contacto. Suponga que no hay deslizamiento cuando la bola choca con el escalón. El coeficiente de restitución es e.



Prob. 19-56

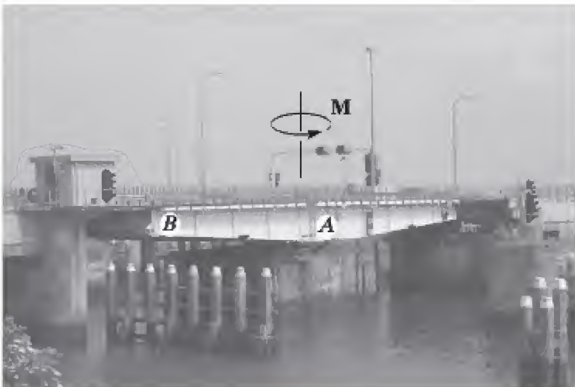
PROBLEMAS CONCEPTUALES

P19-1. La aplanadora de tierra avanza a una velocidad constante al suministrar potencia a las ruedas traseras. Use datos numéricos apropiados para las ruedas, el rodillo y el cuerpo y calcule la cantidad de movimiento angular de este sistema con respecto al punto A en el suelo, el punto B en el eje trasero y el punto G, el centro de gravedad del sistema.



P19-1

P19-2. El puente levadizo se abre y cierra con un giro de 90° por medio de un motor localizado debajo del centro de la plataforma en A que aplica un par de torsión $\mathbf{M}$ al puente. Si éste estuviera sostenido por su extremo B, ¿abriría con el mismo par el puente en el mismo tiempo, o abriría más lento o más rápido? Explique su respuesta por medio de valores numéricos y un análisis del impulso y cantidad de movimiento. También, ¿cuáles son los beneficios de que el puente tenga un peralte variable como se muestra?



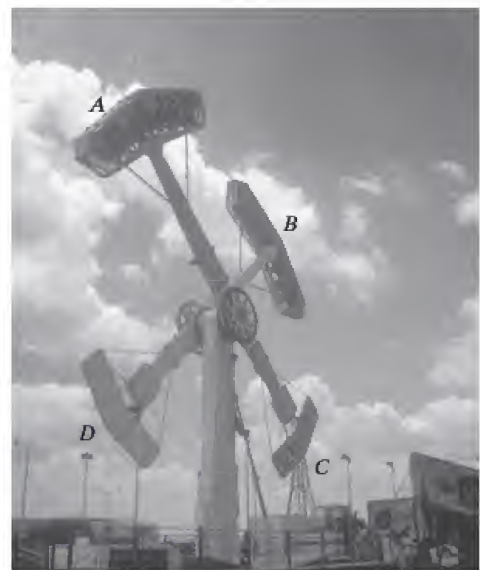
P19-2

P19-3. ¿Por qué es necesario que las aspas del rotor de cola B del helicóptero giren perpendiculares a las aspas del rotor principal A? Explique su respuesta por medio de valores numéricos y un análisis del impulso y cantidad de movimiento.



P19-3

P19-4. El juego mecánico de un parque de diversiones se compone de dos góndolas A y B y dos contrapesos C y D que oscilan en direcciones opuestas. Con dimensiones y masa realistas, calcule la cantidad de movimiento angular de este sistema en cualquier posición angular de las góndolas. Explique por medio de un análisis por qué es una buena idea diseñar este sistema con contrapesos con cada góndola.



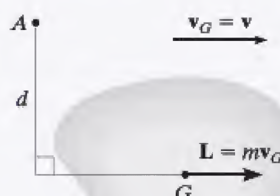
P19-4

REPASO DEL CAPÍTULO

Cantidad de movimiento lineal y angular

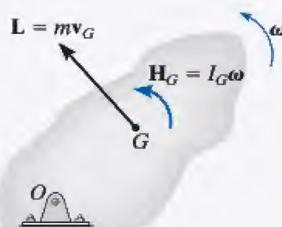
La cantidad de movimiento lineal y angular de un cuerpo rígido puede ser referida a su centro de masa G.

Si se tiene que determinar la cantidad de movimiento angular con respecto a un eje diferente del que pasa por el centro de masa, entonces la cantidad de movimiento angular se determina por la suma del vector $\mathbf{H}_G$ y el momento del vector $\mathbf{L}$ con respecto a este eje.



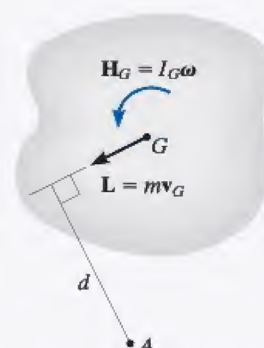
Traslación

$$L = mv_G$$
$$H_G = 0$$
$$H_A = (mv_G)d$$



Rotación respecto de un eje fijo

$$L = mv_G$$
$$H_G = I_G\omega$$
$$H_O = I_O\omega$$



Movimiento plano general

$$L = mv_G$$
$$H_G = I_G\omega$$
$$H_A = I_G\omega + (mv_G)d$$

Principio de impulso y cantidad de movimiento

Los principios de impulso y cantidad de movimiento lineal y angular se utilizan para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo. Antes de aplicar estas ecuaciones, es importante establecer el sistema de coordenadas inercial x, y, z. También se deberá trazar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo con todas las fuerzas y momentos de par que producen impulsos en el cuerpo.

$$m(v_{Gx})_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt = m(v_{Gx})_2$$

$$m(v_{Gy})_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m(v_{Gy})_2$$

$$I_G\omega_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_G\,dt = I_G\omega_2$$

19

Conservación de la cantidad de movimiento Siempre que la suma de los impulsos lineales que actúan en un sistema de cuerpos rígidos conectados es cero en una dirección particular, entonces la cantidad de movimiento lineal del sistema se conserva en esta dirección. La conservación de la cantidad de movimiento angular ocurre si los impulsos pasan a través de un eje o son paralelos a él. También se conserva la cantidad de movimiento si las fuerzas externas son pequeñas y crean fuerzas no impulsoras en el sistema. Un diagrama de cuerpo libre deberá acompañar cualquier aplicación para clasificar las fuerzas como impulsoras o no impulsoras y para determinar un eje con respecto al cual la cantidad de movimiento angular puede conservarse.	$\left(\sum \begin{array}{c}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento lineal}\\ \text{del sistema}\end{array}\right)_1 = \left(\sum \begin{array}{c}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento lineal}\\ \text{del sistema}\end{array}\right)_2$ $\left(\sum \begin{array}{c}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento angular}\\ \text{del sistema}\end{array}\right)_{O1} = \left(\sum \begin{array}{c}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento angular}\\ \text{del sistema}\end{array}\right)_{O2}$
Impacto excéntrico Si la línea de impacto no coincide con la línea que conecta los centros de masa de dos cuerpos que chocan, entonces ocurrirá un impacto excéntrico. Si se ha de determinar el movimiento de los cuerpos justo después del impacto, entonces es necesario considerar una ecuación de conservación de cantidad de movimiento para el sistema y utilizar la ecuación del coeficiente de restitución.	$e = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$

REPASO

2 Cinemática y cinética plana de un cuerpo rígido

Habiendo presentado los diversos temas de cinemática y cinética plana en los capítulos 16 a 19, ahora resumiremos estos principios y daremos la oportunidad de aplicarlos a la solución de varios tipos de problemas.

Cinemática. Aquí nos interesa estudiar la geometría del movimiento, sin hacer caso de las fuerzas que lo provocan. Antes de resolver un problema de cinemática plana, *primero* es necesario *clasificar el movimiento* como de traslación rectilínea o curvilínea, de rotación alrededor de un eje fijo o como movimiento plano general. En particular, los problemas que implican movimiento plano general se resuelven con referencia a un eje fijo (análisis de movimiento absoluto) o por marcos de referencia trasladantes o rotatorios (análisis de movimiento relativo). La opción en general depende del tiempo de restricciones y de la geometría del problema. En todos los casos, la aplicación de las ecuaciones necesarias se aclara con el trazado de un diagrama cinemático. Recuerde que la *velocidad* de un punto siempre es *tangente* a la trayectoria de su movimiento y la *aceleración* puede tener *componentes* en las direcciones *n-t* cuando la trayectoria es *curva*.

Traslación. Cuando el cuerpo se mueve con traslación rectilínea o curvilínea, *todos* sus puntos tienen el *mismo movimiento*.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A$$

Rotación respecto de un eje fijo. Movimiento angular.
Aceleración angular variable. Siempre que se dé una relación matemática entre *cualquiera de dos* de las *cuatro* variables, θ, ω, α y t, entonces puede determinarse una *tercera* variable al resolver una de las siguientes ecuaciones, las cuales se refieren a las tres variables.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad \alpha\, d\theta = \omega\, d\omega$$

Aceleración angular constante. Las siguientes ecuaciones son aplicables cuando es *absolutamente cierto* que la aceleración angular es constante.

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2 \qquad \omega = \omega_0 + \alpha_c t \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

Movimiento del punto *P*. Con $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ determinadas, el movimiento del punto P puede especificarse con las siguientes ecuaciones vectoriales o escalares.

$$v = \omega r \qquad\qquad \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$
$$a_t = \alpha r \quad a_n = \omega^2 r \qquad \mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r}$$

Movimiento plano general–análisis de movimiento relativo. Recuerde que cuando se colocan *ejes trasladantes* en el "punto base" A, el *movimiento relativo* del punto B con respecto a A es simplemente *movimiento circular de B con respecto a A*. Las siguientes ecuaciones son aplicables a los dos puntos A y B localizados en el *mismo* cuerpo rígido.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$$

Con frecuencia se utilizan *ejes rotatorios y trasladantes* para analizar el movimiento de cuerpos rígidos conectados entre sí por collarines o bloques corredizos.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

Cinética. Para analizar las fuerzas que provocan el movimiento debemos utilizar los principios de cinética. Cuando se aplican las ecuaciones necesarias, es importante establecer primero el sistema de coordenadas inercial y definir las direcciones positivas de los ejes. Las *direcciones* deberán ser las *mismas* que las seleccionadas cuando se escribe cualquiera de las ecuaciones de cinemática si llega a ser necesaria una *solución simultánea*.

Ecuaciones de movimiento. Estas ecuaciones se utilizan para determinar los movimientos acelerados o las fuerzas que provocan el movimiento. Si se utilizan para determinar la posición, velocidad o el tiempo del movimiento, entonces se tendrá que considerar la cinemática para completar la solución. Antes de aplicar las ecuaciones de movimiento, *siempre trace un diagrama de cuerpo libre* para identificar

todas las fuerzas que actúan en el cuerpo. Además, establezca las direcciones de la aceleración del centro de masa y la aceleración angular del cuerpo. (También puede trazarse un diagrama cinético para representar $m\mathbf{a}_G$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$ gráficamente. Este diagrama es en particular conveniente para descomponer $m\mathbf{a}_G$ en componentes y para identificar los términos en la suma de momentos $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$.)

Las tres ecuaciones de movimiento son

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma M_G = I_G\alpha \quad \text{o} \quad \Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$$

En particular, si el cuerpo está en movimiento *giratorio respecto de un eje fijo*, los momentos también pueden sumarse con respecto al punto O en el eje, en cuyo caso

$$\Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O = I_O\alpha$$

Trabajo y energía. *La ecuación de trabajo y energía se utiliza para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y desplazamiento.* Antes de aplicar esta ecuación, *siempre trace un diagrama de cuerpo libre* del cuerpo para identificar las fuerzas que realizan trabajo. Recuerde que la energía cinética del cuerpo se debe al movimiento de traslación del centro de masa, $\mathbf{v}_G$, y al movimiento de rotación del cuerpo, $\boldsymbol{\omega}$.

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

donde

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega^2$$
$$U_F = \int F\cos\theta\,ds \qquad \text{(fuerza variable)}$$
$$U_{F_c} = F_c\cos\theta(s_2 - s_1) \qquad \text{(fuerza constante)}$$
$$U_W = -W\,\Delta y \qquad \text{(peso)}$$
$$U_s = -(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2) \qquad \text{(resorte)}$$
$$U_M = M\theta \qquad \text{(momento de par constante)}$$

Si las fuerzas que actúan en el cuerpo son *fuerzas conservadoras*, entonces aplicamos la *ecuación de la conservación de la energía*. Esta ecuación es más fácil de utilizar que la ecuación de trabajo y energía, puesto que se aplica sólo a *dos puntos* en la trayectoria y *no* requieren calcular el trabajo realizado por una fuerza a medida que el cuerpo se mueve a lo largo de la trayectoria.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

donde $V = V_g + V_e$ y

$$V_g = Wy \qquad \text{(energía potencial gravitacional)}$$
$$V_e = \tfrac{1}{2}ks^2 \qquad \text{(energía potencial elástica)}$$

Impulso y cantidad de movimiento. *Los principios de impulso y cantidad de movimiento lineal y angular se utilizan para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo.* Antes de aplicar las ecuaciones, *trace un diagrama de cuerpo libre* para identificar todas las fuerzas que crean impulsos lineales y angulares en el cuerpo. Además, establezca las direcciones de la velocidad del centro de masa y la velocidad angular del cuerpo justo antes y justo después de que se aplican los impulsos. (Como un procedimiento alternativo, los diagramas de impulso y cantidad de movimiento pueden acompañar la solución para describir gráficamente los términos de las ecuaciones. Estos diagramas son particularmente ventajosos cuando se calculan los impulsos angulares y los momentos angulares con respecto a un punto diferente del centro de masa del cuerpo).

$$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma \int \mathbf{F}\, dt = m(\mathbf{v}_G)_2$$

$$(\mathbf{H}_G)_1 + \Sigma \int \mathbf{M}_G\, dt = (\mathbf{H}_G)_2$$

o

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2$$

Conservación de cantidad de movimiento. Si en el cuerpo actúan fuerzas no impulsoras en una dirección particular, o si los movimientos de varios cuerpos intervienen en el problema, entonces considere aplicar la conservación de cantidad de movimiento lineal o angular en la solución. La investigación del diagrama de cuerpo libre (o el diagrama de impulso) ayudará a determinar las direcciones a lo largo de las cuales las fuerzas impulsoras son cero, o los ejes con respecto a los cuales las fuerzas impulsoras crean un impulso angular cero. En estos casos,

$$m(\mathbf{v}_G)_1 = m(\mathbf{v}_G)_2$$

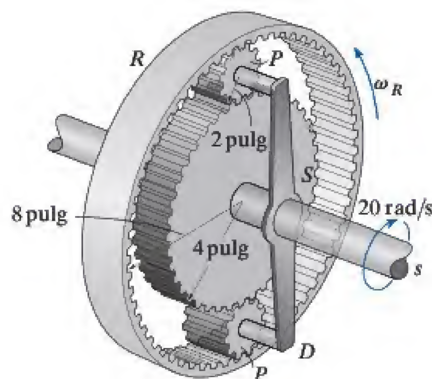
$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$$

Los problemas que siguen implican la aplicación de todos los conceptos anteriores. Se presentan en *orden aleatorio* para adquirir práctica en la identificación de varios tipos de problemas y desarrollar las habilidades necesarias para su solución.

PROBLEMAS DE REPASO

R2-1. La transmisión de un automóvil se compone del sistema de engranes planetarios que se ilustra. Si la corona R se mantiene fija de modo que $\omega_R = 0$, y la flecha s y el engrane sol S, giran a 20 rad/s, determine la velocidad angular de cada engrane satélite P y la velocidad angular del soporte de conexión D, el cual gira libremente alrededor de la flecha central s.

R2-2. La transmisión de un automóvil se compone del sistema de engranes planetarios que se ilustra. Si la corona R gira a $\omega_R = 2$ rad/s y la flecha s y el engrane sol S, giran a 20 rad/s, determine la velocidad angular de cada engrane del planeta satélite P y la velocidad angular del soporte de conexión D, el cual gira libremente alrededor de la flecha central s.

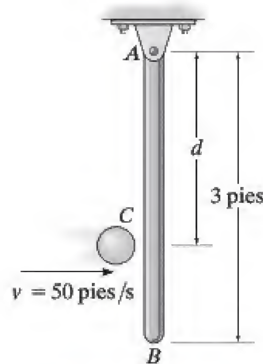


Probs. R2-1/2

R2-3. La barra esbelta AB de 6 lb se suelta del reposo cuando está en *posición horizontal* de modo que comienza a girar en el sentido de las manecillas del reloj. Se lanza una bola de 1 lb contra la barra con una velocidad v = 50 pies/s. La bola choca con la barra en C en el instante en que la barra está en la posición vertical como se muestra. Determine la velocidad angular de la barra justo después del impacto. Considere $e = 0.7$ y $d = 2$ pies.

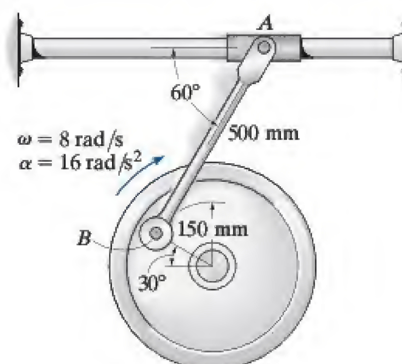
***R2-4.** La barra esbelta AB de 6 lb originalmente está en reposo, colgada en posición vertical. Se lanza una bola de 1 lb contra la barra con una velocidad v = 50 pies/s y choca con la barra en C. Determine la velocidad angular de la barra justo después del impacto. Considere $e = 0.7$ y $d = 2$ pies.

R2-5. La barra esbelta de 6 lb originalmente está en reposo, colgada en posición vertical. Determine la distancia d donde una bola de 1 lb, que viaja a v = 50 pies/s, deberá chocar con la barra de modo que no cree un impulso horizontal en A. ¿Cuál es la velocidad angular de la barra justo después del impacto? Considere $e = 0.5$.



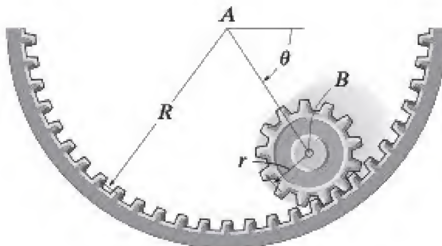
Probs. R2-3/4/5

R2-6. En un instante dado, la rueda gira con los movimientos angulares que se muestran. Determine la aceleración del collarín en A en este instante.



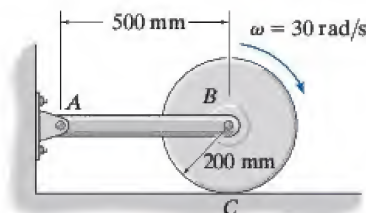
Prob. R2-6

R2-7. El pequeño engrane de masa m puede ser tratado como un disco uniforme. Si se suelta del reposo cuando $\theta = 0°$ y rueda a lo largo de la cremallera circular fija, determine la velocidad angular de la línea radial AB cuando $\theta = 90°$.



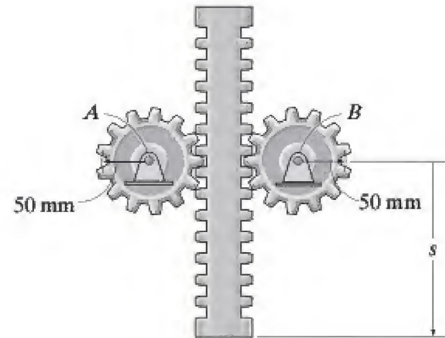
Prob. R2-7

*R2-8.** El cilindro de 50 kg tiene una velocidad angular de 30 rad/s cuando se pone en contacto con la superficie C. Si el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.2$, determine cuánto tiempo se requerirá para que el cilindro se detenga. ¿Qué fuerza se desarrolla en el brazo AB durante este tiempo? El eje del cilindro está conectado a *dos* brazos simétricos (sólo se muestra el brazo AB). Para el cálculo, ignore el peso de los brazos.



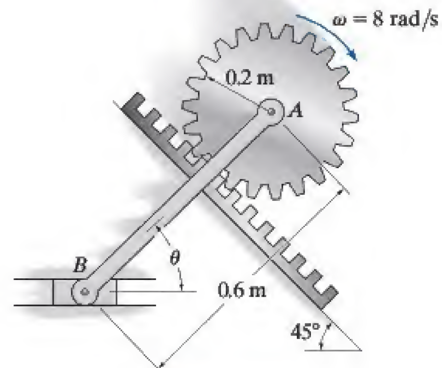
Prob. R2-8

R2-9. La cremallera tiene una masa de 6 kg y cada un de los engranes tiene una masa de 4 kg y un radio de giro $k = 30$ mm con respecto a su centro. Si la cremallera originalmente se mueve hacia abajo a 2 m/s, cuando $s = 0$, determine la rapidez de la cremallera cuando $s = 600$ mm. Los engranes giran libremente alrededor de sus centros, A y B.



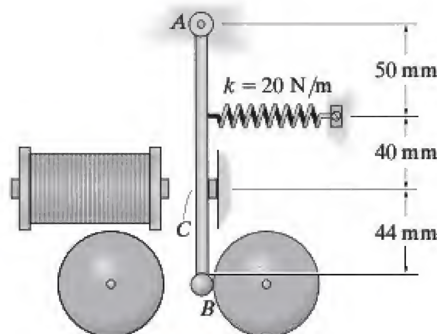
Prob. R2-9

R2-10. El engrane tiene una masa de 2 kg y un radio de giro $k_A = 0.15$ m. El brazo de conexión AB (barra delgada) y el bloque corredizo B tienen una masa de 4 kg y 1 kg, respectivamente. Si el engrane tiene una velocidad angular $\omega = 8$ rad/s cuando $\theta = 45°$, determine su velocidad angular cuando $\theta = 0°$.



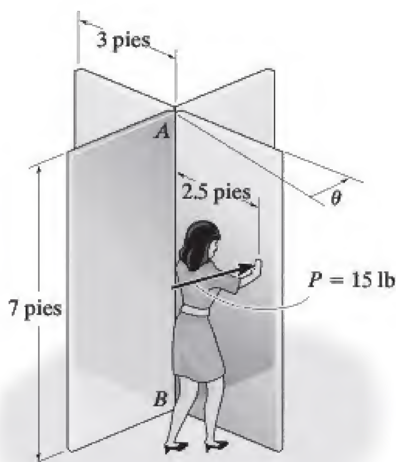
Prob. R2-10

***R2-11.** La operación de un timbre requiere el uso de un electroimán, que atrae el badajo de hierro AB sujeto por medio de un pasador en A y se compone de una barra de 0.2 kg a la cual está adherida una bola de acero de 0.04 kg de 6 mm de radio. Si la fuerza de atracción del imán en C es de 0.5 N cuando el interruptor está activado, determine la aceleración inicial del badajo. En principio, el resorte está alargado 20 mm.



Prob. R2-11

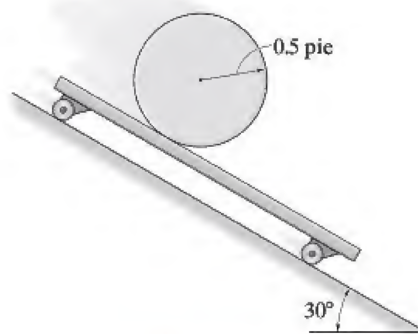
***R2-12.** La puerta giratoria se compone de cuatro puertas fijas a un eje AB. Se supone que cada puerta es una placa delgada de 50 lb. La fricción en el eje crea un momento de 2 lb · pie el cual se opone a la rotación de las puertas. Si una mujer pasa a través de una puerta empujando con una fuerza $P = 15$ lb perpendicular al plano de la puerta como se muestra, determine la velocidad angular de la puerta después de que ha girado 90°. En principio, las puertas están en reposo.



Prob. R2-12

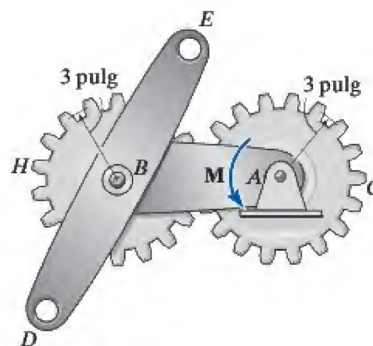
R2-13. El cilindro de 10 lb descansa sobre la plataforma rodante de 20 lb. Si el sistema se suelta del reposo, determine la velocidad angular del cilindro en 2 s. El cilindro no se desliza sobre la plataforma. Ignore la masa de las ruedas de la plataforma.

R2-14. Resuelva el problema R2-13 si los coeficientes de fricción estática y cinética entre el cilindro y la plataforma rodante son $\mu_s = 0.3$ y $\mu = 0.2$, respectivamente.



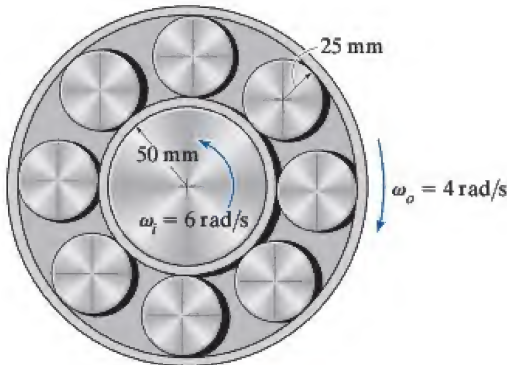
Probs. R2-13/14

R2-15. Cada uno de los engranes H y C tiene un peso de 0.4 lb y un radio de giro con respecto a su centro de masa de $(k_H)_B = (k_C)_A = 2$ pulg. El eslabón AB tiene un peso de 0.2 lb y un radio de giro de $(k_{AB})_A = 3$ pulg, mientras que el eslabón DE tiene un peso de 0.15 lb y un radio de giro de $(k_{DE})_B = 4.5$ pulg. Si se aplica *a* un momento de par $M = 3$ lb · pie al eslabón AB y el ensamble originalmente está en reposo, determine la velocidad angular del eslabón DE cuando el eslabón AB ha girado 360°. Se impide que el engrane C gire y el movimiento ocurre en el plano horizontal. Además, el engrane H y el eslabón DE giran juntos respecto del mismo eje B.



Prob. R2-15

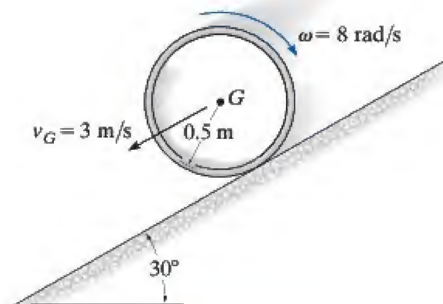
***R2-16.** La masa interna del cojinete de rodillos gira a una velocidad angular de $\omega_i = 6$ rad/s, mientras que la masa externa gira en la dirección opuesta a $\omega_o = 4$ rad/s. Determine la velocidad angular de cada uno de los rodillos si ruedan sobre las masas sin deslizarse.



Prob. R2-16

R2-17. El aro (anillo delgado) tiene una masa de 5 kg y se suelta hacia abajo del plano inclinado de modo que rueda a la inversa a $\omega = 8$ rad/s y la velocidad de su centro es $v_G = 3$ m/s como se muestra. Si el coeficiente de fricción cinética entre el aro y el plano es $\mu_k = 0.6$, determine la distancia que el aro rueda antes de que deje de deslizarse.

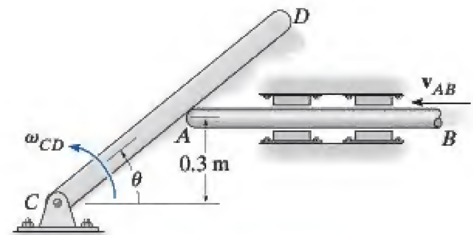
R2-18. El aro (anillo delgado) tiene una masa de 5 kg y se suelta hacia abajo del plano inclinado de modo que rueda a la inversa a $\omega = 8$ rad/s y la velocidad de su centro es $v_G = 3$ m/s como se muestra. Si el coeficiente de fricción cinética entre el aro y el plano es $\mu_k = 0.6$, determine la velocidad angular del aro 1 s después de que se suelta.



Probs. R2-17/18

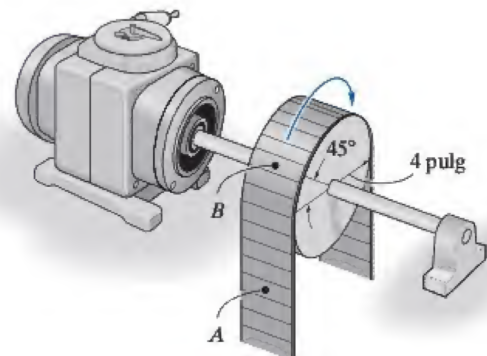
R2-19. Determine la velocidad angular de la barra CD cuando $\theta = 30°$. La barra AB se mueve a la izquierda a una velocidad constante de $v_{AB} = 5$ m/s.

***R2-20.** Determine la aceleración angular de la barra CD cuando $\theta = 30°$. La barra AB tiene una velocidad cero, es decir, $v_{AB} = 0$ y una aceleración de $a_{AB} = 2$ m/s^2 a la derecha cuando $\theta = 30°$.



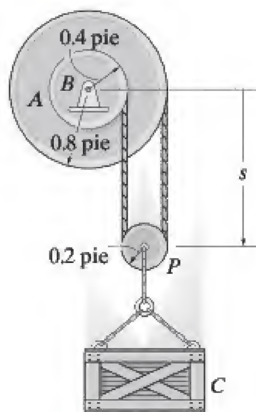
Probs. R2-19/20

R2-21. Si la velocidad angular del tambor se incrementa de manera uniforme de 6 rad/s cuando $t = 0$ a 12 rad/s cuando $t = 5$ s, determine las magnitudes de la velocidad y aceleración de los puntos A y B sobre la banda cuando $t = 1$ s. En este instante los puntos están localizados como se muestra.



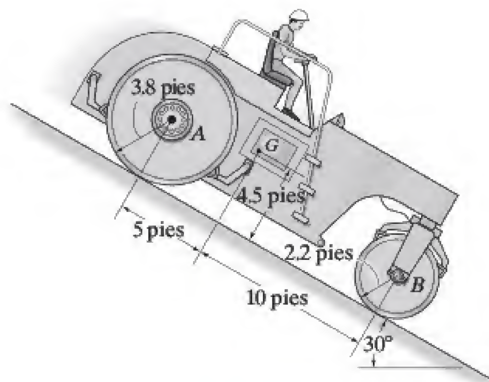
Prob. R2-21

R2-22. La polea A y el tambor B conectado tienen un peso de 20 lb y un radio de giro de $k_B = 0.6$ pie. Si la polea P "rueda" hacia abajo sobre la cuerda sin deslizarse, determine la rapidez del embalaje C de 20 lb cuando $s = 10$ pies. En principio, el embalaje se suelta del reposo cuando $s = 5$ pies. Para el cálculo, ignore la masa de la polea P y la cuerda.



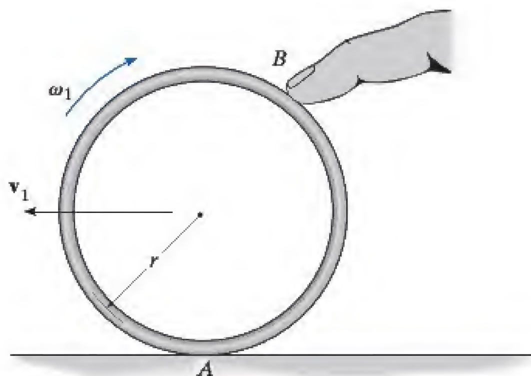
Prob. R2-22

***R2-24.** La aplanadora viaja cuesta abajo a $v_1 = 5$ pies/s cuando se desembraga el motor. Determine la rapidez de la aplanadora cuando ha recorrido 20 pies cuesta abajo. El cuerpo de la aplanadora, excluidos los rodillos tiene un peso de 8000 lb y un centro de gravedad en G. Cada uno de los dos rodillos traseros pesa 400 lb y tiene un radio de giro de $k_A = 3.3$ pies. El rodillo delantero pesa 800 lb y su radio de giro es $k_B = 1.8$ pies. Los rodillos no se deslizan cuando giran.



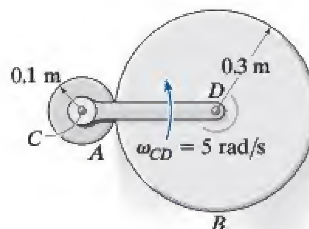
Prob. R2-24

R2-23. Al hacer presión con el dedo en B, a un aro delgado de masa m se le imparte una velocidad inicial v_1 y una rotación a la inversa ω_1 cuando se retira el dedo. Si el coeficiente de fricción cinética entre la mesa y el aro es μ, determine la distancia que el aro avanza antes de que deje de girar a la inversa.



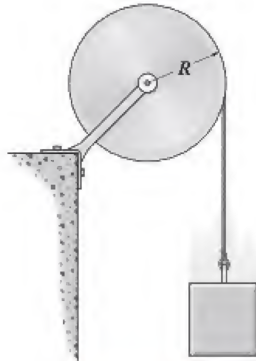
Prob. R2-23

R2-25. El cilindro B rueda sobre el cilindro fijo A sin deslizarse. Si la barra CD gira con una velocidad angular $\omega_{CD} = 5$ rad/s, determine la velocidad angular del cilindro B. El punto C es un punto fijo.



Prob. R2-25

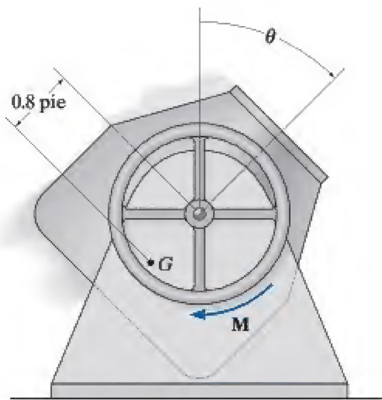
R2-26. El disco tiene una masa M y un radio R. Si un bloque de masa m se ata a la cuerda, determine la aceleración angular del disco cuando el bloque se suelta del reposo. Asimismo, ¿cuál es la distancia que el bloque cae del reposo en el tiempo t?



Prob. R2-26

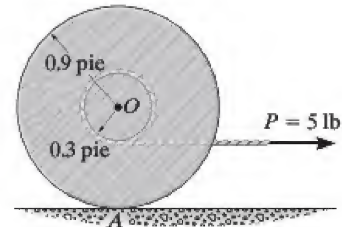
R2-27. La tina de la mezcladora tiene un peso de 70 lb y un radio de giro $k_G = 1.3$ pies con respecto a su centro de gravedad G. Si se aplica un par de torsión constante $M = 60$ lb · pie a la rueda de vaciado, determine la velocidad angular de la tina cuando ha girado $\theta = 90°$. Originalmente, la tina está en reposo cuando $\theta = 0°$. Ignore la masa de la rueda.

***R2-28.** Resuelva el problema R2-27 si el par de torsión aplicado es $M = (50\theta)$ lb · pie, donde θ está en radianes.



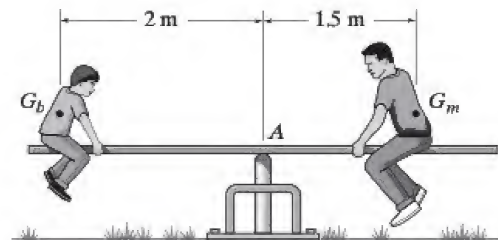
Probs. R2-27/28

R2-29. El carrete pesa 30 lb y su radio de giro es $k_O = 0.45$ pie. Se enrolla una cuerda alrededor de la masa interna del carrete y su extremo se somete a una fuerza horizontal $P = 5$ lb. Determine la velocidad angular del carrete en 4 s a partir del reposo. Suponga que el carrete rueda sin deslizarse.



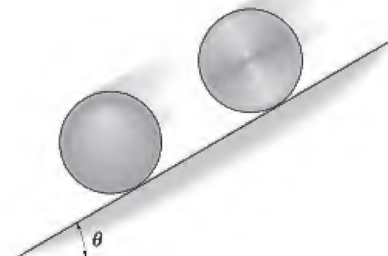
Prob. R2-29

R2-30. El hombre de 75 kg y el muchacho de 40 kg se sientan en el sube y baja horizontal cuya masa se omite. En el instante que el hombre levanta sus pies del suelo, determine sus aceleraciones si cada uno se sienta en posición vertical, es decir, no giran. Los centros de masa del hombre y el muchacho están en G_m y G_b, respectivamente.



Prob. R2-30

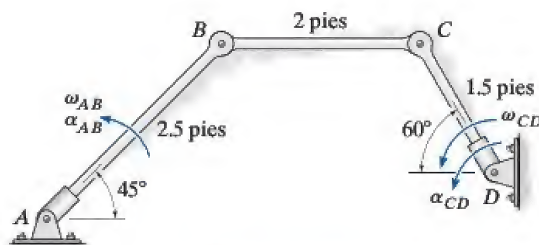
R2-31. Una esfera y un cilindro se sueltan del reposo sobre la rampa cuando $t = 0$. Si cada uno tiene una masa m y un radio r, determine sus velocidades angulares en el instante t. Suponga que no hay deslizamiento.



Prob. R2-31

***R2-32.** En un instante dado, el eslabón AB tiene una aceleración angular $\alpha_{AB} = 12\ \text{rad/s}^2$ y una velocidad angular $\omega_{AB} = 4$ rad/s. Determine la velocidad y la aceleración angulares del eslabón CD en este instante.

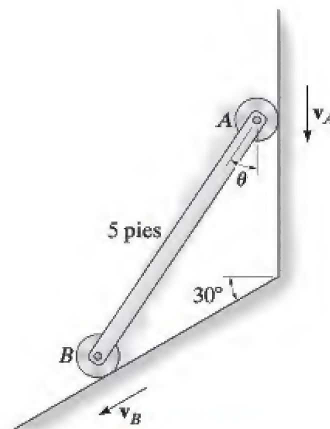
R2-33. En un instante dado, el eslabón CD tiene una aceleración angular $\alpha_{CD} = 5\ \text{rad/s}^2$ y una velocidad angular $\omega_{CD} = 2$ rad/s. Determine la velocidad y la aceleración angulares del eslabón AB en este instante.



Probs. R2-32/33

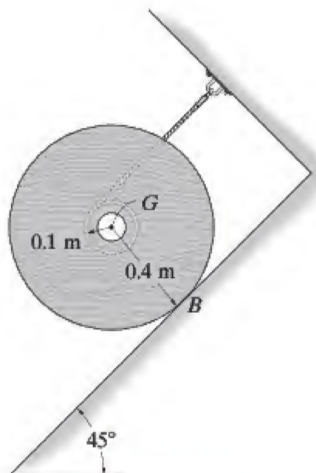
R2-35. La barra sólo puede moverse a lo largo de los planos vertical e inclinado. Si la velocidad del rodillo A es $v_A = 6$ pies/s cuando $\theta = 45°$, determine la velocidad angular de la barra y la velocidad de B en este instante.

***R2-36.** La barra sólo puede moverse a lo largo de los planos vertical e inclinado. Si el rodillo A tiene una velocidad constante de $v_A = 6$ pies/s, determine la aceleración angular de la barra y la aceleración de B cuando $\theta = 45°$.



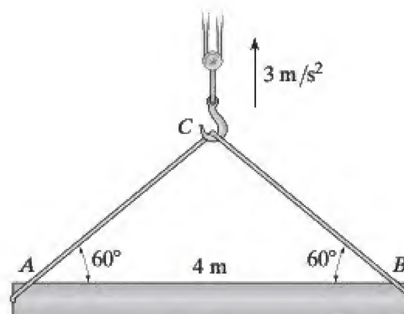
Probs. R2-35/36

R2-34. El carrete y el alambre enrollado alrededor de su núcleo tienen una masa de 50 kg y un radio de giro centroidal de $k_G = 235$ mm. Si el coeficiente de fricción cinética en la superficie es $\mu_k = 0.15$, determine la aceleración angular del carrete después de soltarlo del reposo.



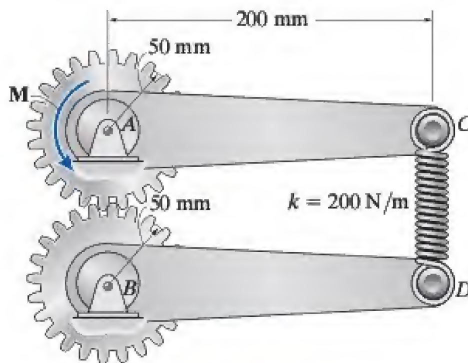
Prob. R2-34

R2-37. La viga uniforme AB tiene una masa de 8 Mg. Determine la fuerza axial interna, la fuerza cortante y el momento de flexión en el centro de la viga si una grúa le imprime una aceleración hacia arriba de $3\ \text{m/s}^2$.



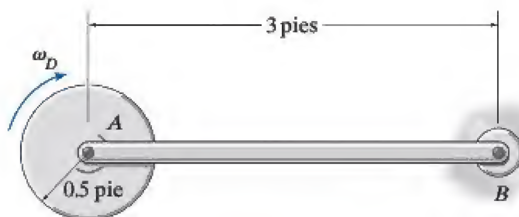
Prob. R2-37

R2-38. Cada uno de los engranes tiene una masa de 2 kg y un radio de giro con respecto a sus centros de masa A y B de $k_g = 40$ mm. Cada eslabón tiene una masa de 2 kg y un radio de giro con respecto a sus extremos A y B de $k_l = 50$ mm. Si originalmente el resorte no está alargado cuando se aplica el momento de par $M = 20$ N · m al eslabón AC, determine las velocidades angulares de los eslabones en el instante en que el eslabón AC gira $\theta = 45°$. Cada engrane y eslabón están conectados entre sí y giran en el plano horizontal con respecto a los pasadores fijos A y B.



Prob. R2-38

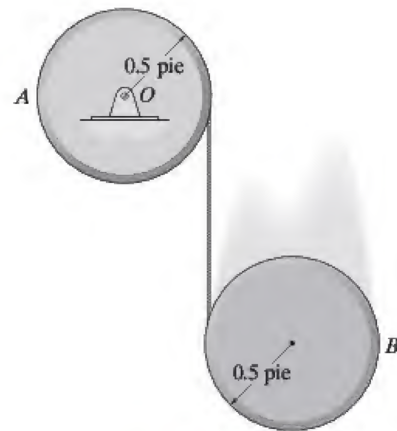
R2-39. La barra de 5 lb AB soporta el disco de 3 lb por su extremo A. Si al disco se le imprime una velocidad angular $\omega_D = 8$ rad/s mientras la barra se mantiene estacionaria y luego se suelta, determine su velocidad angular después de que el disco ha dejado de girar con respecto a la barra debido a la resistencia de fricción en el cojinete A. El movimiento se desarrolla en el *plano horizontal*. Ignore la fricción en el cojinete fijo B.



Prob. R2-39

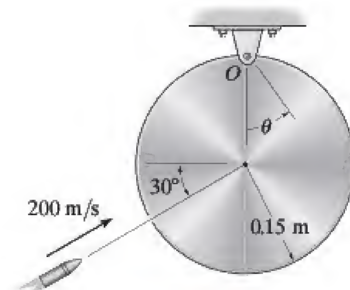
***R2-40.** Se enrolla una cuerda alrededor del borde de cada disco de 10 lb. Si el disco B se suelta del reposo, determine la velocidad angular del disco A en 2 s. Ignore la masa de la cuerda.

R2-41. Se enrolla una cuerda alrededor del borde de cada disco de 10 lb. Si el disco B se suelta del reposo, determine cuánto tiempo t se requiere antes de que A alcance una velocidad angular $\omega_A = 5$ rad/s.



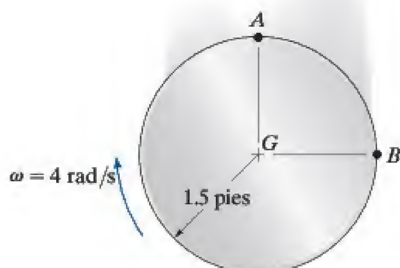
Probs. R2-40/41

R2-42. El disco de 15 kg está sujeto en O por medio de un pasador e inicialmente está en reposo. Si se dispara una bala de 10 g contra el disco con una velocidad de 200 m/s, como se muestra, determine el ángulo máximo θ al cual oscila el disco. La bala se incrusta en el disco.



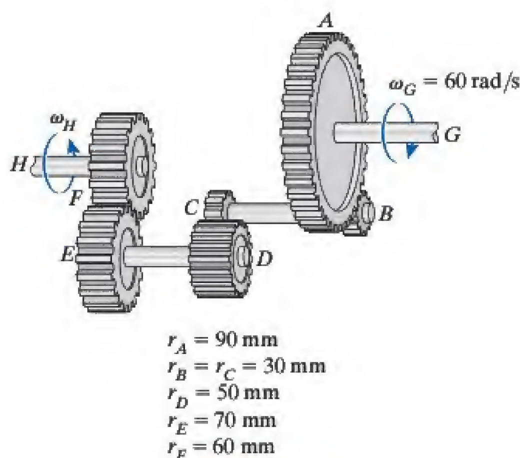
Prob. R2-42

R2-43. El disco gira a una velocidad constante de 4 rad/s cuando cae libremente de modo que su centro de gravedad G tiene una aceleración de 32.2 pies/s^2. Determine las aceleraciones de los puntos A y B en el borde del disco en el instante que se muestra.



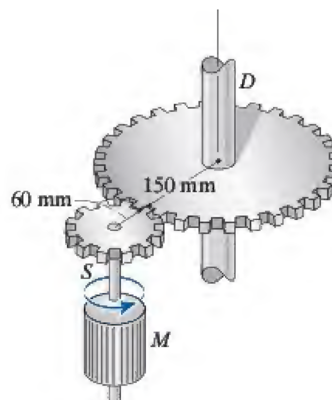
Prob. R2-43

***R2-44.** El funcionamiento de "reversa" de una transmisión automotriz de tres velocidades se ilustra esquemáticamente en la figura. Si la flecha G gira con una velocidad angular de $\omega_G = 60$ rad/s, determine la velocidad angular de la flecha motriz H. Cada uno de los engranes gira respecto de un eje fijo. Observe que los engranes A y B, C y D, E y F están acoplados. El radio de cada uno de estos engranes se reporta en la figura.



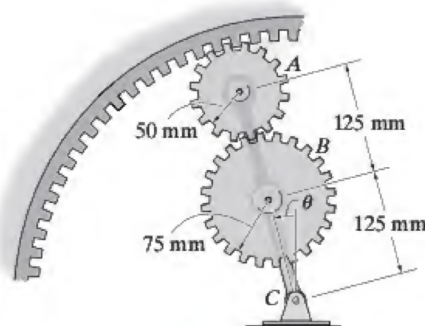
Prob. R2-44

R2-45. Se muestra el engranaje interno de un barreno utilizado para perforar pozos petroleros. Con una aceleración angular constante, el motor M hace girar la flecha S a 100 rev/min en $t = 2$ s, a partir del reposo. Determine la aceleración angular de la conexión del tubo de perforación D y el número de revoluciones que realiza el arranque de 2 s.



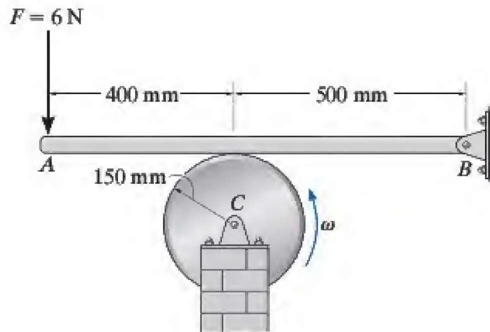
Prob. R2-45

R2-46. El engrane A tiene una masa de 0.5 kg y un radio de giro de $k_A = 40$ mm y el engrane B tiene una masa de 0.8 kg y un radio de giro de $k_B = 55$ mm. El eslabón está sujeto en C por medio de pasador y su masa es de 0.35 kg. Si el eslabón puede ser tratado como una barra delgada, determine su velocidad angular después de que el ensamble se suelta del reposo cuando $\theta = 0°$ y cae a $\theta = 90°$.



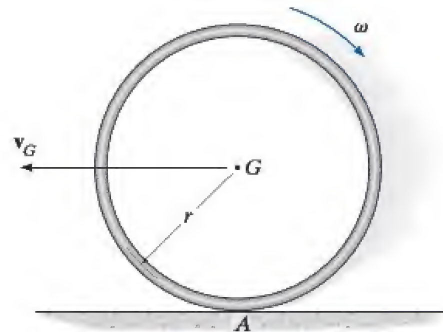
Prob. R2-46

R2-47. El cilindro de 15 kg gira con una velocidad angular de $\omega = 40$ rad/s. Si se aplica una fuerza $F = 6$ N a la barra AB, como se muestra, determine el tiempo requerido para detener la rotación. El coeficiente de fricción cinética entre AB y el cilindro es $\mu_k = 0.4$. Ignore el espesor de la barra.



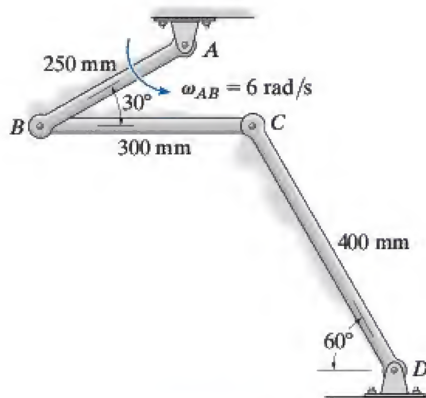
Prob. R2-47

R2-49. Si el aro delgado tiene un peso W y un radio r y se lanza sobre una *superficie áspera* con una velocidad $\mathbf{v}_G$ paralela a la superficie, determine la rotación inversa $\boldsymbol{\omega}$ que se le debe impartir para que deje de girar en el mismo instante en que su velocidad hacia delante es cero. No es necesario conocer el coeficiente de fricción cinética en A para el cálculo.



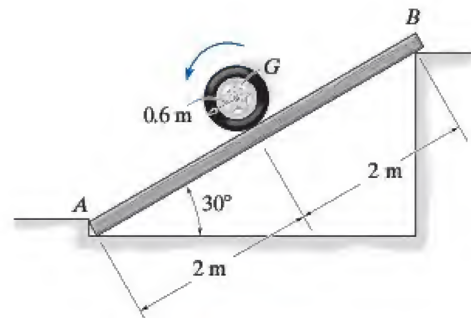
Prob. R2-49

***R2-48.** Si el eslabón AB gira a $\omega_{AB} = 6$ rad/s, determine las velocidades angulares de los eslabones BC y CD en el instante que se muestra.

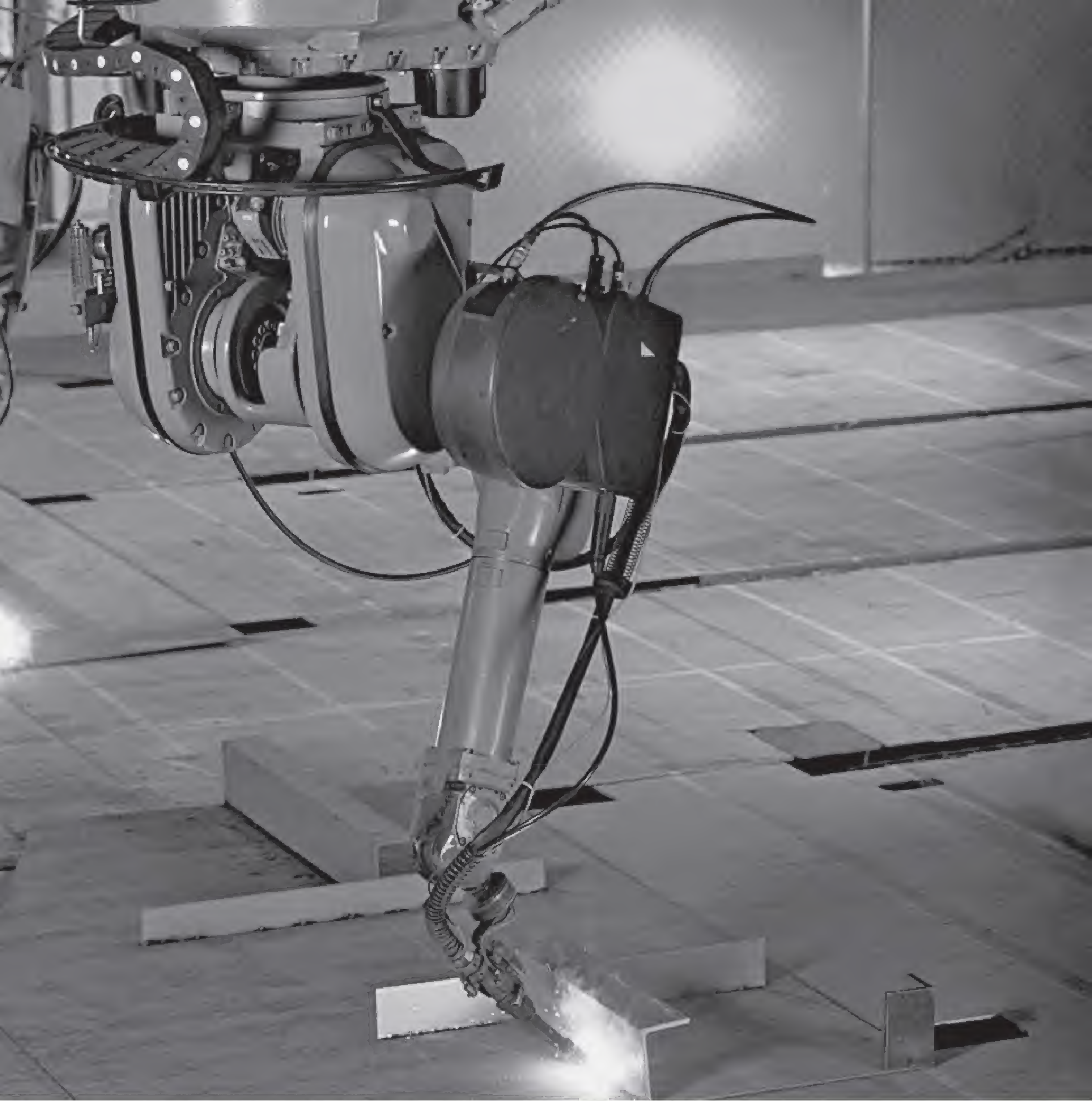


Prob. R2-48

R2-50. La rueda tiene una masa de 50 kg y un radio de giro de $k_G = 0.4$ m. Si rueda sin deslizarse hacia abajo del tablón inclinado, determine los componentes horizontal y vertical de la reacción en A y la reacción normal en el apoyo B en el momento en que la rueda está a la mitad del tablón. Éste tiene un espesor insignificante y una masa de 20 kg.



Prob. R2-50



El movimiento tridimensional de este robot industrial debe especificarse con precisión.

Cinemática tridimensional de un cuerpo rígido

20

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Analizar la cinemática de un cuerpo sometido a rotación alrededor de un eje o punto fijo y movimiento plano general.
- Analizar el movimiento relativo de un cuerpo rígido mediante ejes trasladantes y rotatorios.

20.1 Rotación alrededor de un eje fijo

Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje o punto fijo, la distancia r del punto de una partícula localizada en el cuerpo es la *misma* para *cualquier posición* del cuerpo. Por tanto, la trayectoria del movimiento de la partícula queda en la *superficie de una esfera* de radio r con su centro en el punto fijo. Como el movimiento a lo largo de esta trayectoria ocurre sólo con una serie de rotaciones realizadas durante un intervalo finito, primero nos familiarizaremos con algunas de las propiedades de los desplazamientos rotacionales.



La pluma puede girar hacia arriba y hacia abajo y como está articulada en un punto del eje vertical alrededor del cual gira, se ve sometida a rotación alrededor de un punto fijo.

Teorema de Euler. El teorema de Euler establece que dos rotaciones "componentes" alrededor de ejes diferentes que pasan por un punto equivalen a una sola rotación resultante alrededor de un eje que pasa por el punto. Si se aplican más de dos rotaciones, pueden combinarse en pares y cada par puede reducirse y combinarse aún más en una rotación.

Rotaciones finitas. Si las rotaciones componentes utilizadas en el teorema de Euler son *finitas*, es importante mantener el *orden* en el que se aplican. Para demostrar esto, considere las dos rotaciones finitas $\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2$ aplicadas al bloque en la figura 20-1*a*. Cada rotación tiene una magnitud de 90° y una dirección definida por la regla de la mano derecha, como se indica con la flecha. La posición final del bloque se muestra a la derecha. Cuando estas dos rotaciones se aplican en el orden $\boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1$, como se muestra en la figura 20-1*b*, la posición final del bloque *no* es la misma que la de la figura 20-1*a*. Como las *rotaciones finitas* no obedecen la ley conmutativa de la adición ($\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2 \neq \boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1$), *no pueden clasificarse como vectores.* Si se hubieran utilizado rotaciones más pequeñas, aunque finitas, para ilustrar este punto, por ejemplo 10° en lugar de 90°, la *posición final* del bloque después de cada combinación de rotaciones también sería diferente; no obstante, en este caso, la diferencia es sólo una cantidad mínima.

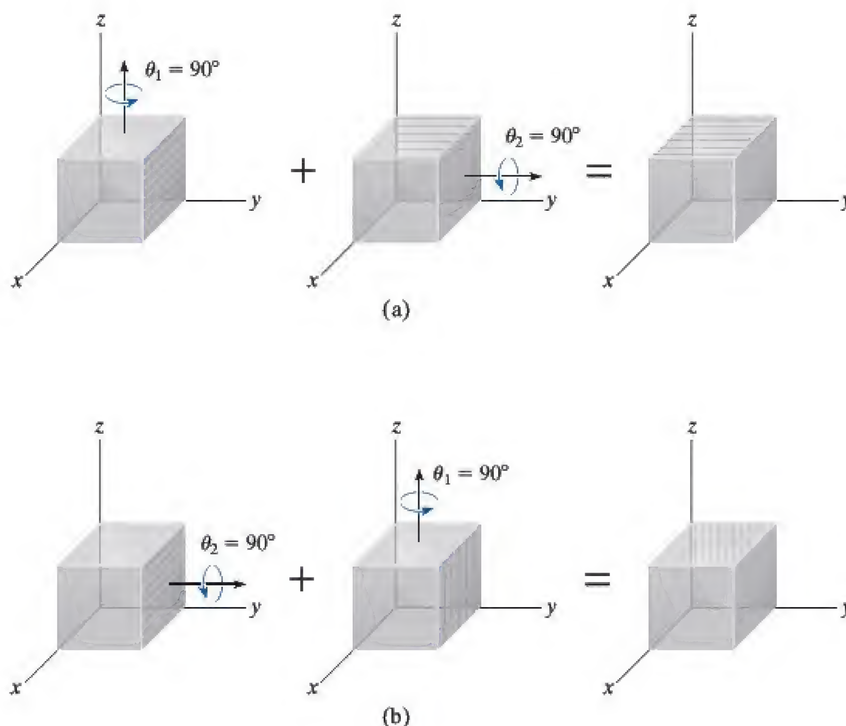
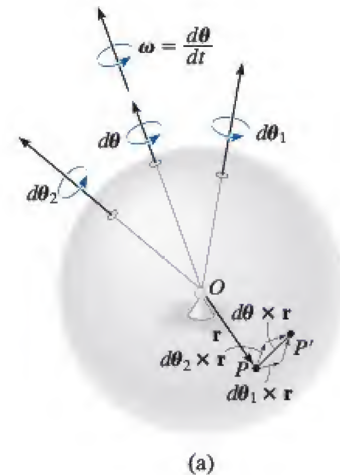


Fig. 20-1

Rotaciones infinitesimales. Cuando se definen los movimientos angulares de un cuerpo sometido a movimiento tridimensional, sólo se considerarán las rotaciones que son *infinitesimalmente pequeñas. Tales rotaciones pueden clasificarse como vectores, puesto que pueden sumarse de manera vectorial de cualquier modo.* Para demostrar esto, por simplicidad consideremos que el cuerpo rígido es una esfera a la que se le permite girar alrededor de su punto central fijo O, figura 20-2*a*. Si aplicamos dos rotaciones infinitesimales, $d\boldsymbol{\theta}_1 + d\boldsymbol{\theta}_2$ al cuerpo, se ve que el punto P se mueve a lo largo de la trayectoria $d\boldsymbol{\theta}_1 \times \mathbf{r} + d\boldsymbol{\theta}_2 \times \mathbf{r}$ y termina en P'. Si hubieran ocurrido dos rotaciones sucesivas en el orden $d\boldsymbol{\theta}_2 + d\boldsymbol{\theta}_1$, en ese caso los desplazamientos resultantes de P habrían sido $d\boldsymbol{\theta}_2 \times \mathbf{r} + d\boldsymbol{\theta}_1 \times \mathbf{r}$. Como el producto vectorial obedece la ley distributiva, al comparar $(d\boldsymbol{\theta}_1 + d\boldsymbol{\theta}_2) \times \mathbf{r} = (d\boldsymbol{\theta}_2 + d\boldsymbol{\theta}_1) \times \mathbf{r}$. Aquí las rotaciones infinitesimales $d\boldsymbol{\theta}$ son vectores, puesto que estas cantidades tienen tanto magnitud como dirección por lo que el orden de la adición (vectorial) no es importante, esto es, $d\boldsymbol{\theta}_1 + d\boldsymbol{\theta}_2 = d\boldsymbol{\theta}_2 + d\boldsymbol{\theta}_1$. Por consiguiente, como se muestra en la figura 20-2*a*, las dos rotaciones "componentes" $d\boldsymbol{\theta}_1$ y $d\boldsymbol{\theta}_2$ equivalen a una sola rotación resultante $d\boldsymbol{\theta} = d\boldsymbol{\theta}_1 + d\boldsymbol{\theta}_2$, una consecuencia del teorema de Euler.

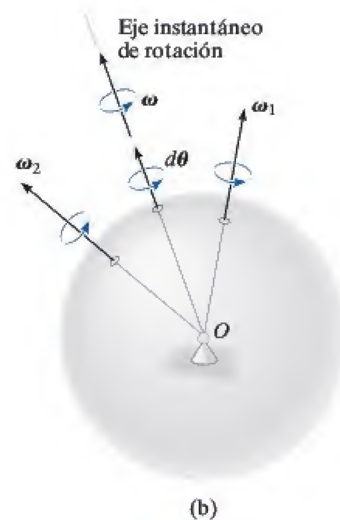


(a)

Velocidad angular. Si el cuerpo se somete a una rotación angular $d\boldsymbol{\theta}$ alrededor de un punto fijo, la velocidad angular del cuerpo se define por medio de la derivada con respecto al tiempo,

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{20-1}$$

La línea que especifica la dirección de $\boldsymbol{\omega}$, la cual es colineal con $d\boldsymbol{\theta}$ se conoce como *eje de rotación instantáneo*, figura 20-2*b*. En general, este eje cambia de dirección durante cada instante. Como $d\boldsymbol{\theta}$ es una cantidad vectorial, $\boldsymbol{\omega}$ también lo es, y se desprende de la adición vectorial que si el cuerpo se somete a dos componentes de movimientos angulares $\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\boldsymbol{\theta}}_1$ y $\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\boldsymbol{\theta}}_2$, la velocidad angular resultante es $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$.



(b)

Fig. 20-2

Aceleración angular. La aceleración angular del cuerpo se determina con la derivada con respecto al tiempo de su velocidad angular, es decir,

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \tag{20-2}$$

Para movimiento con respecto a un punto fijo, $\boldsymbol{\alpha}$ debe responder del cambio *tanto* de magnitud *como* de dirección de $\boldsymbol{\omega}$, así que, en general, la dirección de $\boldsymbol{\alpha}$ no es a lo largo del eje instantáneo de rotación, figura 20-3.

A medida que cambia la dirección del eje instantáneo de rotación (o la línea de acción de $\boldsymbol{\omega}$) en el espacio, el lugar geométrico del eje genera un *cono espacial* fijo, figura 20-4. Si el cambio de dirección de este eje se considera con respecto al cuerpo que gira, el lugar geométrico del eje genera un *cono corporal*.

En un instante dado, estos conos se encuentran a lo largo del eje instantáneo de rotación, y cuando el cuerpo está en movimiento, el cono

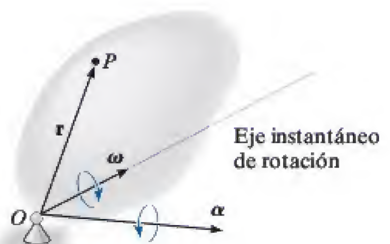


Fig. 20-3

20

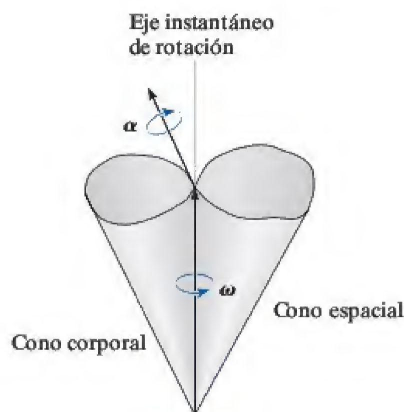
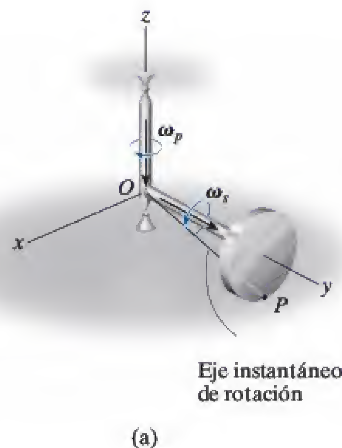


Fig. 20-4

corporal parece que rueda sobre la superficie interna o sobre la superficie externa del cono espacial fijo. Dado que la cabeza del vector $\boldsymbol{\omega}$ describe las trayectorias definidas por los extremos abiertos de los conos, entonces $\boldsymbol{\alpha}$ debe actuar tangente a estas trayectorias en cualquier instante dado, puesto que el cambio con respecto al tiempo de $\boldsymbol{\omega}$ es igual a $\boldsymbol{\alpha}$, figura 20-4.

Para ilustrar este concepto, considere el disco mostrado en la figura 20-5*a* que gira alrededor de la barra en $\boldsymbol{\omega}_s$, mientras que la barra y el disco experimentan precesión con respecto al eje vertical a $\boldsymbol{\omega}_p$. La velocidad angular resultante del disco es por consiguiente $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p$. Como tanto el punto O como el punto de contacto P tienen velocidad cero, entonces tanto $\boldsymbol{\omega}$ como el eje instantáneo de rotación ocurren a lo largo de OP. Por consiguiente, a medida que gira el disco, este eje parece moverse a lo largo de la superficie del cono espacial fijo que se muestra en la figura 20-5*b*. Si el eje se observa desde el disco rotatorio, entonces parece que el eje se mueve sobre la superficie del cono corporal. En cualquier instante, estos dos conos se encuentran a lo largo del eje OP. Si $\boldsymbol{\omega}$ tiene una magnitud constante, entonces $\boldsymbol{\alpha}$ indica sólo el cambio de la dirección de $\boldsymbol{\omega}$, la cual es tangente a los conos en la punta de $\boldsymbol{\omega}$ como se muestra en la figura 20-5*b*.



(a)

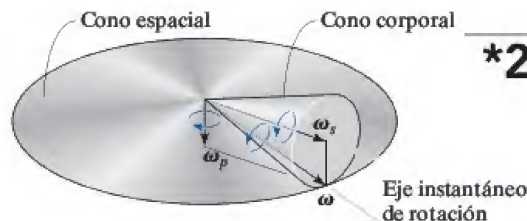
Velocidad. Con $\boldsymbol{\omega}$ especificada, la velocidad de cualquier punto en un cuerpo que gira alrededor de un punto fijo se determina con los mismos métodos utilizados para un cuerpo que gira alrededor de un eje o punto fijo. Por consiguiente, de acuerdo con el producto vectorial,

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{20-3}$$

Donde $\mathbf{r}$ define la posición del punto medida con respecto al punto fijo O, figura 20-3.

Aceleración. Si en un instante dado $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ son conocidas, la aceleración de un punto se obtiene con la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 20-3, la cual resulta

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{20-4}$$



(b)
Fig. 20-5

20

*20.2 Derivada con respecto al tiempo de un vector medido con respecto a un sistema fijo o a un sistema trasladante-rotatorio

En muchos tipos de problemas que implican el movimiento de un cuerpo con respecto a un punto fijo, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ se especifica en función de sus componentes. Entonces, si tiene que determinar la aceleración $\boldsymbol{\alpha}$ del mismo cuerpo, con frecuencia es más fácil calcular la derivada con respecto al tiempo de $\boldsymbol{\omega}$ mediante un sistema de coordenadas que tenga una *rotación* definida por uno o más de los componentes de $\boldsymbol{\omega}$. Por ejemplo, en el caso del disco de la figura 20-5*a*, donde $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p$, a los ejes x, y, z se les puede impartir una velocidad angular de $\boldsymbol{\omega}_p$. Por eso, y para otros usos más adelante, ahora se derivará una ecuación, la

cual relaciona la derivada con respecto al tiempo de cualquier vector **A** definido con respecto a una referencia trasladante-rotatoria a su derivada con respecto al tiempo definida con respecto a una referencia fija.

Considere que los ejes x, y, z del marco de referencia móvil giran a una velocidad angular $\mathbf{\Omega}$, medida con respecto a los ejes fijos X, Y, Z, figura 20-6*a*. En el siguiente planteamiento, será conveniente expresar el vector **A** en función de sus componentes **i**, **j**, **k**, las cuales definen las direcciones de los ejes móviles. Por consiguiente,

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

En general, la derivada con respecto al tiempo de **A** debe tener en cuenta el cambio tanto de magnitud como de dirección. Sin embargo, si esta derivada se considera *con respecto al marco de referencia móvil*, sólo debe tenerse en cuenta el cambio de las magnitudes de las componentes de **A**, puesto que las direcciones de las componentes no cambian con respecto a la referencia móvil. Por consiguiente,

$$(\dot{\mathbf{A}})_{xyz} = \dot{A}_x\mathbf{i} + \dot{A}_y\mathbf{j} + \dot{A}_z\mathbf{k} \qquad (20\text{-}5)$$

Cuando la derivada con respecto al tiempo de **A** se considera *con respecto al marco de referencia fijo*, las *direcciones* de **i**, **j** y **k** cambian sólo debido a la rotación $\mathbf{\Omega}$ de los ejes y debido a su traslación. De ahí que, en general,

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{A}_x\mathbf{i} + \dot{A}_y\mathbf{j} + \dot{A}_z\mathbf{k} + A_x\dot{\mathbf{i}} + A_y\dot{\mathbf{j}} + A_z\dot{\mathbf{k}}$$

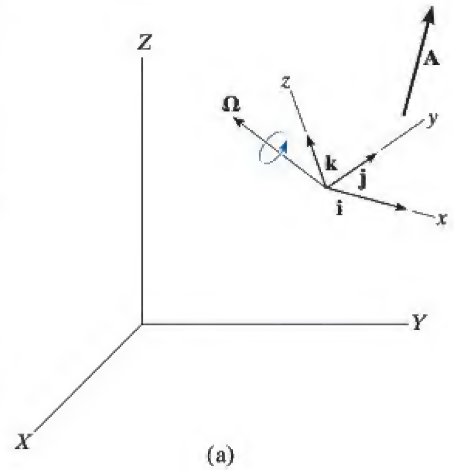
A continuación se considerarán las derivadas con respecto al tiempo de los vectores unitarios. Por ejemplo, $\dot{\mathbf{i}} = d\mathbf{i}/dt$ representa sólo el cambio de la *dirección* de **i** con respecto al tiempo, puesto que la magnitud de **i** siempre es 1 unidad. Como se muestra en la figura 20-6*b*, el cambio, $d\mathbf{i}$, es *tangente a la trayectoria* descrita por la punta de flecha de **i** a medida que **i** oscila debido a la rotación $\mathbf{\Omega}$. Si tenemos en cuenta tanto la magnitud como la dirección de $d\mathbf{i}$, podemos definir por consiguiente $\dot{\mathbf{i}}$ por medio del producto vectorial, $\dot{\mathbf{i}} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{i}$. En general, entonces

$$\dot{\mathbf{i}} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{i} \qquad \dot{\mathbf{j}} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{j} \qquad \dot{\mathbf{k}} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{k}$$

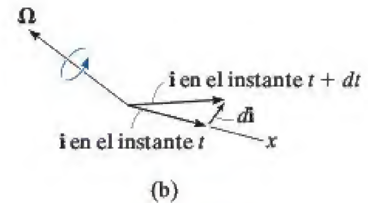
Estas formulaciones también se desarrollaron en la sección 16.8 en relación con el movimiento plano de los ejes. Al sustituir estos resultados en la ecuación anterior y utilizar la ecuación 20-5 obtenemos

$$\boxed{\dot{\mathbf{A}} = (\dot{\mathbf{A}})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{A}} \qquad (20\text{-}6)$$

Este resultado es importante, y se utilizará a lo largo de la sección 20.4 y en el capítulo 21. Establece que la derivada con respecto al tiempo de *cualquier vector* **A** observada desde el marco de referencia X, Y, Z fijo es igual al cambio con respecto al tiempo de **A** observado desde el marco de referencia trasladante-rotatorio x, y, z, ecuación 20-5, más $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{A}$, el cambio de **A** causado por la rotación del marco x, y, z. Por consiguiente, siempre deberá utilizarse la ecuación 20-6 siempre que $\mathbf{\Omega}$ cambie la dirección de **A** vista con respecto a la referencia X, Y, Z. Si no ocurre este cambio, es decir, $\mathbf{\Omega} = \mathbf{0}$, entonces $\dot{\mathbf{A}} = (\dot{\mathbf{A}})_{xyz}$ y por tanto el cambio con respecto al tiempo de **A** observado desde ambos sistemas de coordenadas será el *mismo*.



(a)



(b)

Fig. 20-6

20

EJEMPLO 20.1

El disco de la figura 20-7 gira alrededor de su eje a una velocidad angular constante $\omega_s = 3$ rad/s, mientras que la plataforma horizontal sobre la cual está montado el disco gira alrededor del eje vertical a una velocidad constante $\omega_p = 1$ rad/s. Determine la aceleración angular del disco y la velocidad y aceleración del punto A del disco cuando está en la posición mostrada.

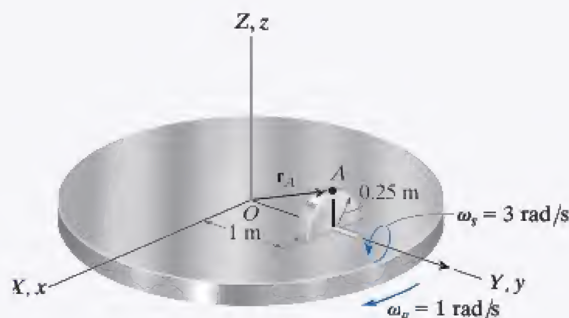


Fig. 20–7

SOLUCIÓN

El punto O representa un punto fijo de rotación para el disco si consideramos la extensión hipotética del disco hasta este punto. Para determinar la velocidad y aceleración del punto A, primero es necesario determinar la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del disco, ya que estos vectores se utilizan en las ecuaciones 20-3 y 20-4.

Velocidad angular. La velocidad angular medida con respecto a X, Y, Z, es simplemente la suma vectorial de sus dos movimientos componentes. Por tanto,

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p = \{3\mathbf{j} - 1\mathbf{k}\} \text{ rad/s}$$

Aceleración angular. Como la magnitud de $\boldsymbol{\omega}$ es constante, sólo un cambio de su dirección, visto desde la referencia fija, crea la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del disco. Una forma de obtener $\boldsymbol{\alpha}$ es calcular la derivada con respecto al tiempo de *cada uno de los dos componentes de* $\boldsymbol{\omega}$ con la ecuación 20-6. En el instante que se muestra en la figura 20-7, imagine que el marco de referencia fijo X, Y, Z y un marco x, y, z rotatorio coinciden. Si el marco rotatorio x, y, z se elige de modo que tenga una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p \{-1\mathbf{k}\}$ rad/s, entonces $\boldsymbol{\omega}_s$ *siempre* estará dirigida a lo largo del eje y (no del Y), y el cambio con respecto al tiempo de $\boldsymbol{\omega}_s$ *visto desde* x, y, z es *cero*, es decir, $(\dot{\boldsymbol{\omega}}_s)_{xyz} = \mathbf{0}$ (la magnitud y dirección de $\boldsymbol{\omega}_s$ es constante). Por tanto,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_s = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_s)_{xyz} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_s = \mathbf{0} + (-1\mathbf{k}) \times (3\mathbf{j}) = \{3\mathbf{i}\} \text{ rad/s}^2$$

Con la misma selección de rotación de ejes, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_P$, o incluso con $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$, la derivada con respecto al tiempo $(\dot{\boldsymbol{\omega}}_p)_{xyz} = \mathbf{0}$, como $\boldsymbol{\omega}_P$, tiene una magnitud y dirección constantes con respecto a x, y, z. Entonces,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_p = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_p)_{xyz} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_p = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

La aceleración angular del disco es por consiguiente

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_s + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p = \{3\mathbf{i}\} \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Velocidad y aceleración. Como $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ ya se determinaron, la velocidad y aceleración del punto A se determinan con las ecuaciones 20-3 y 20-4. Habida cuenta de que $\mathbf{r}_A = \{1\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k}\}$ m, figura 20-7, tenemos

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A = (3\mathbf{j} - 1\mathbf{k}) \times (1\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k}) = \{1.75\mathbf{i}\} \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_A &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A) \\ &= (3\mathbf{i}) \times (1\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k}) + (3\mathbf{j} - 1\mathbf{k}) \times [(3\mathbf{j} - 1\mathbf{k}) \times (1\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k})] \\ &= \{-2.50\mathbf{j} - 2.25\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}\end{aligned}$$

EJEMPLO 20.2

En el instante $\theta = 60°$, el giróscopo que se ilustra en la figura 20-8 tiene tres componentes de movimiento angular dirigidos como se muestra con magnitudes definidas como:

Rotación: $\omega_s = 10$ rad/s, que se incrementa a razón de 6 rad/s^2.

Nutación: $\omega_n = 3$ rad/s que se incrementa a razón de 2 rad/s^2.

Precesión: $\omega_p = 5$ rad/s, que se incrementa a razón de 4 rad/s^2.

Determine la velocidad y aceleración angulares del giróscopo.

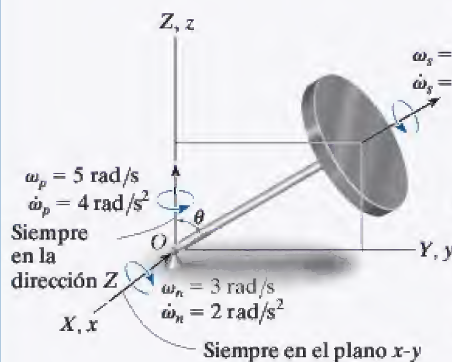


Fig. 20-8

SOLUCIÓN

Velocidad angular. El giróscopo hace movimiento de rotación respecto del punto fijo O. Si los marcos fijo y rotatorio coinciden en el instante mostrado, entonces la velocidad angular puede representarse en función de las componentes **i**, **j**, **k**, con referencia al marco x, y, z, es decir,

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega_n\mathbf{i} + \omega_s \operatorname{sen}\theta\mathbf{j} + (\omega_p + \omega_s\cos\theta)\mathbf{k}$$
$$= -3\mathbf{i} + 10\operatorname{sen}60°\mathbf{j} + (5 + 10\cos 60°)\mathbf{k}$$
$$= \{-3\mathbf{i} + 8.66\mathbf{j} + 10\mathbf{k}\}\ \text{rad/s} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Aceleración angular. Como en la solución del ejemplo 20.1, la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ se determinará en investigación por separado del cambio con respecto al tiempo de *cada uno de los componentes de la velocidad angular* observado desde el marco de referencia X, Y, Z fijo. Seleccionaremos una $\boldsymbol{\Omega}$ para la referencia x, y, z de modo que el componente de $\boldsymbol{\omega}$ considerado se vea como de *dirección constante* al observarlo desde x, y, z.

Un examen cuidadoso del movimiento del giróscopo revela que $\boldsymbol{\omega}_s$ tiene una *dirección constante* con respecto a x, y, z si estos ejes giran a $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_n + \boldsymbol{\omega}_p$. Por tanto,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_s = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_s)_{xyz} + (\boldsymbol{\omega}_n + \boldsymbol{\omega}_p) \times \boldsymbol{\omega}_s$$
$$= (6\operatorname{sen}60°\mathbf{j} + 6\cos 60°\mathbf{k}) + (-3\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) \times (10\operatorname{sen}60°\mathbf{j} + 10\cos 60°\mathbf{k})$$
$$= \{-43.30\mathbf{i} + 20.20\mathbf{j} - 22.98\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}^2$$

Como $\boldsymbol{\omega}_n$ *siempre* queda en el plano X-Y fijo, este vector tiene una *dirección constante* si el movimiento se ve desde los ejes x, y, z que tienen una rotación de $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p$ (no $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p$. Por tanto,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_n = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_n)_{xyz} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_n = -2\mathbf{i} + (5\mathbf{k}) \times (-3\mathbf{i}) = \{-2\mathbf{i} - 15\mathbf{j}\}\ \text{rad/s}^2$$

Por último, la componente $\boldsymbol{\omega}_P$ *siempre* está *dirigida* a lo largo del eje Z de modo que no es necesario pensar en el marco x, y, z como rotatorio, es decir, $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$. Al expresar los datos en función de los componentes **i**, **j**, **k**, tenemos por consiguiente

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_p = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_p)_{xyz} + \mathbf{0} \times \boldsymbol{\omega}_p = \{4\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}^2$$

Por tanto, la aceleración angular del giróscopo es

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_s + \dot{\boldsymbol{\omega}}_n + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p = \{-45.3\mathbf{i} + 5.20\mathbf{j} - 19.0\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}^2 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

20

20.3 Movimiento general

En la figura 20-9 se muestra un cuerpo sometido a movimiento general en tres dimensiones con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$. Si se sabe que el punto A tiene un movimiento de $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{a}_A$, el movimiento de cualquier otro punto B se determina por medio de un análisis de movimiento relativo. En esta sección se utilizará un *sistema de coordenadas trasladante* para definir el movimiento relativo, y en la siguiente sección se considerará una referencia que es tanto rotatoria como trasladante.

Si el origen del sistema de coordenadas trasladante x, y, z $(\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0})$ se encuentra en el "punto base" A, entonces, en el instante mostrado, el movimiento del cuerpo puede considerarse como la suma de una traslación instantánea del cuerpo que tiene un movimiento de $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{a}_A$, y una rotación respecto de un eje instantáneo que pasa por el punto A. Como el cuerpo es rígido, el movimiento del punto B medido por un observador localizado en A es por consiguiente el mismo que *la rotación del cuerpo respecto de un punto fijo*. Este movimiento relativo ocurre con respecto al eje instantáneo de rotación y se define como $\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$, ecuación 20-3 y $\mathbf{a}_{B/A} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$, ecuación 20-4. Para ejes trasladantes, los movimientos relativos se relacionan con los movimientos absolutos por medio de $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$ y $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$, ecuaciones 16-15 y 16-17, de modo que la velocidad y aceleración absolutas del punto B se determinan con las ecuaciones

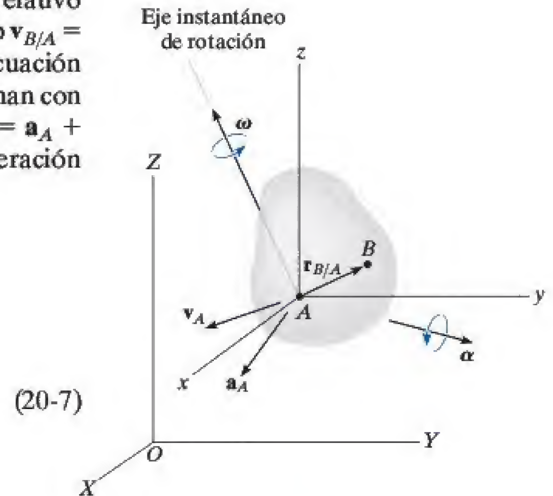


Fig. 20-9

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{20-7}$$

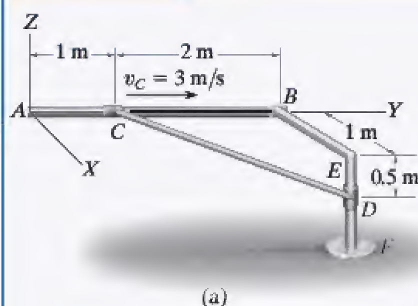
y

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \tag{20-8}$$

Estas dos ecuaciones son idénticas a las que describen el movimiento plano general de un cuerpo rígido, ecuaciones 16-16 y 16-18. Sin embargo, su aplicación se complica cuando el movimiento es tridimensional, porque $\boldsymbol{\alpha}$ ahora mide el cambio *tanto* de magnitud *como* de dirección de $\boldsymbol{\omega}$.

20

EJEMPLO 20.3



(a)

Si el collarín en C que se ilustra en la figura 20-10*a* se mueve hacia B a una rapidez de 3 m/s, determine la velocidad del collarín en D y la velocidad angular de la barra en el instante que se muestra. La barra está conectada a los collarines en sus extremos por medio de articulaciones de rótula esférica.

SOLUCIÓN

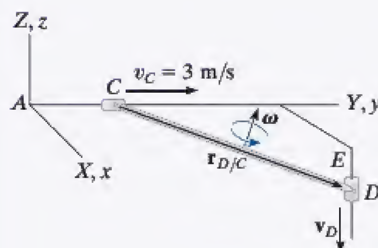
La barra CD está sometida a movimiento general. ¿Por qué? La velocidad del punto D en la barra puede relacionarse con la velocidad del punto C mediante la ecuación

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{D/C}$$

Se supone que los marcos de referencia fijo y trasladante coinciden en el instante considerado, figura 20-10*b*. Tenemos

$$\mathbf{v}_D = -v_D\mathbf{k} \qquad \mathbf{v}_C = \{3\mathbf{j}\}\ \text{m/s}$$

$$\mathbf{r}_{D/C} = \{1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 0.5\mathbf{k}\}\ \text{m} \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$$



(b)

Fig. 20-10

Al sustituir en la ecuación anterior tenemos

$$-v_D\mathbf{k} = 3\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 2 & -0.5 \end{vmatrix}$$

Expandir e igualar las respectivos componentes **i, j, k**, resulta

$$-0.5\omega_y - 2\omega_z = 0 \qquad (1)$$

$$0.5\omega_x + 1\omega_z + 3 = 0 \qquad (2)$$

$$2\omega_x - 1\omega_y + v_D = 0 \qquad (3)$$

Estas ecuaciones contienen cuatro incógnitas.* Puede escribirse una cuarta ecuación si se especifica la dirección de $\boldsymbol{\omega}$. En particular, cualquier componente de $\boldsymbol{\omega}$ que actúa a lo largo del eje de la barra no afecta el movimiento de los collarines. Esto se debe a que la barra *gira libremente* alrededor de su eje. Por consiguiente, si $\boldsymbol{\omega}$ se especifica como *perpendicular* al eje de la barra, entonces $\boldsymbol{\omega}$ debe tener una magnitud única para satisfacer las ecuaciones anteriores. La perpendicularidad está garantizada siempre que el producto escalar de $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{r}_{D/C}$ sea cero (vea la ecuación C-14 del apéndice C). Por consiguiente,

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{D/C} = (\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}) \cdot (1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 0.5\mathbf{k}) = 0$$

$$1\omega_x + 2\omega_y - 0.5\omega_z = 0 \qquad (4)$$

Al resolver las ecuaciones 1 a 4 simultáneamente, obtenemos

$$\omega_x = -4.86\ \text{rad/s} \quad \omega_y = 2.29\ \text{rad/s} \quad \omega_z = -0.571\ \text{rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

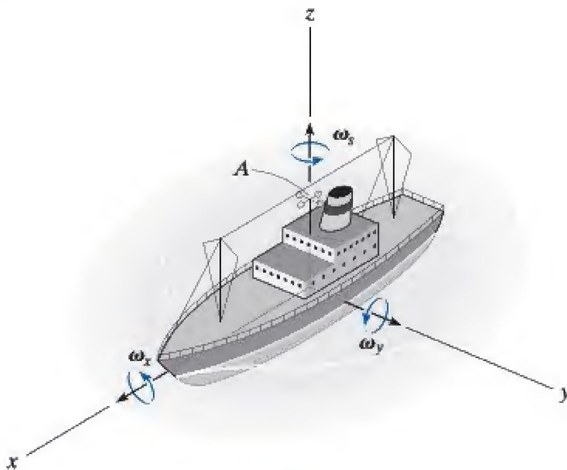
$$v_D = 12.0\ \text{m/s} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

*Aunque éste es el caso, puede obtenerse la magnitud de $\mathbf{v}_D$. Por ejemplo, resuelva las ecuaciones 1 y 2 para ω_y y ω_x en función de ω_z y sustituya en la ecuación 3. Se observará que ω_z se elimina, lo que permite una solución para v_D.

20

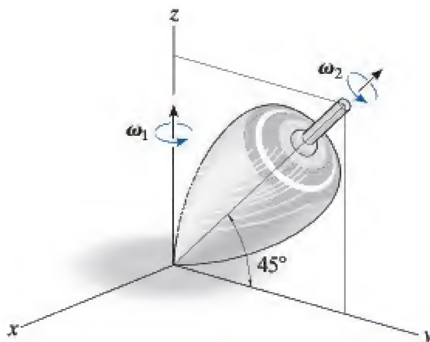
PROBLEMAS

•**20-1.** El anemómetro localizado en el punto A del barco oscila alrededor de su propio eje a razón de ω_s, mientras que el barco gira con respecto al eje x a razón de ω_x y con respecto al eje y a razón de ω_y. Determine la velocidad y aceleración angulares del anemómetro en el instante en que el barco está nivelado como se muestra. Suponga que las magnitudes de todos los componentes de velocidad angular son constantes y que el movimiento de rodamiento provocado por el mar es independiente en las direcciones x y y.



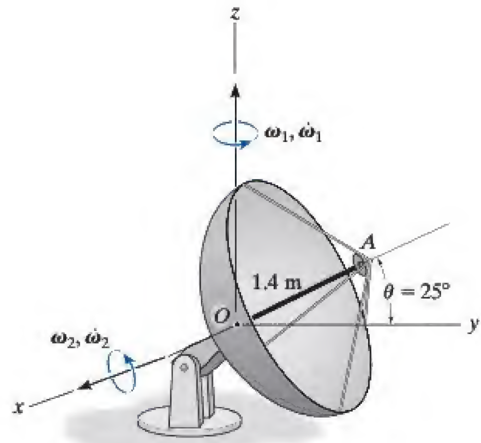
Prob. 20-1

20-2. El movimiento del trompo es tal que en el instante que se muestra gira alrededor del eje z a $\omega_1 = 0.6$ rad/s, mientras que gira alrededor de su propio eje a $\omega_2 = 8$ rad/s. Determine la velocidad y aceleración angulares del trompo en este instante. Exprese el resultado como un vector cartesiano.



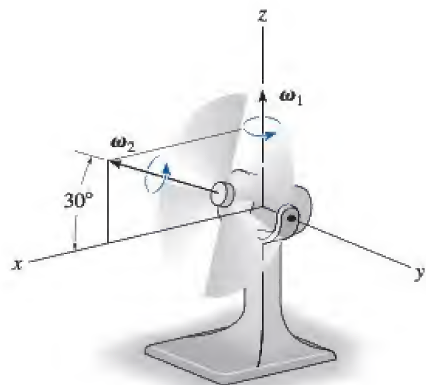
Prob. 20-2

20-3. En un instante dado, la antena parabólica tiene un movimiento angular $\omega_1 = 6$ rad/s y $\dot{\omega}_1 = 3$ rad/s^2 alrededor del eje z. En este mismo instante $\theta = 25°$, el movimiento angular con respecto al eje x es $\omega_2 = 2$ rad/s y $\dot{\omega}_2 = 1.5$ rad/s^2. Determine la velocidad y aceleración de la bocina de señales A en este instante.



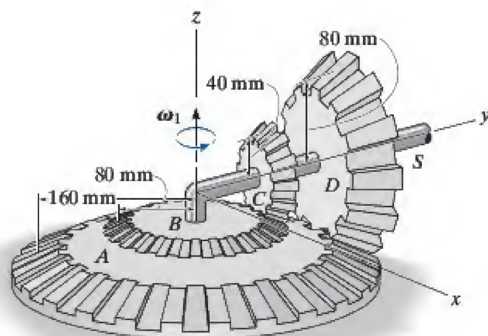
Prob. 20-3

***20-4.** El ventilador está montado en un apoyo giratorio de modo que en el instante mostrado está girando respecto del eje z a $\omega_1 = 0.8$ rad/s, que se incrementa a 12 rad/s^2. El aspa gira a $\omega_2 = 16$ rad/s, la cual se reduce a 2 rad/s^2. Determine la velocidad y aceleración angulares del aspa en este instante.



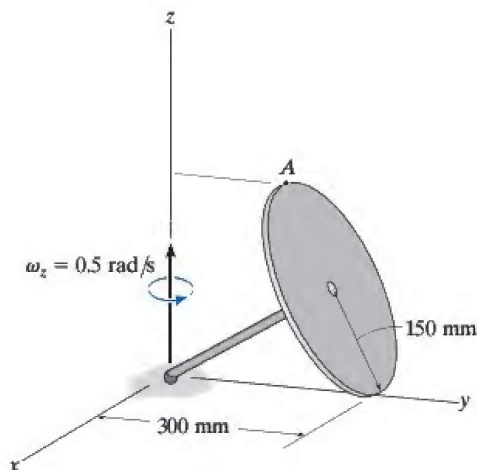
Prob. 20-4

•**20-5.** Los engranes A y B están fijos mientras que los engranes C y D giran libremente alrededor del eje S. Si éste gira alrededor del eje z a una velocidad constante de $\omega_1 = 4$ rad/s, determine la velocidad y aceleración angulares del engrane C.



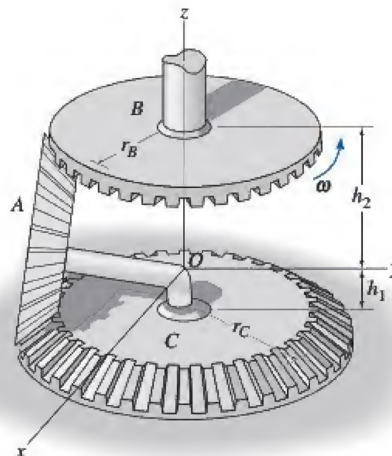
Prob. 20-5

20-6. El disco gira respecto del eje z a $\omega_z = 0.5$ rad/s sin deslizarse sobre el plano horizontal. Si en este mismo instante ω_z se incrementa a $\dot{\omega}_z = 0.3$ rad/s^2, determine la velocidad y aceleración del punto A en el disco.



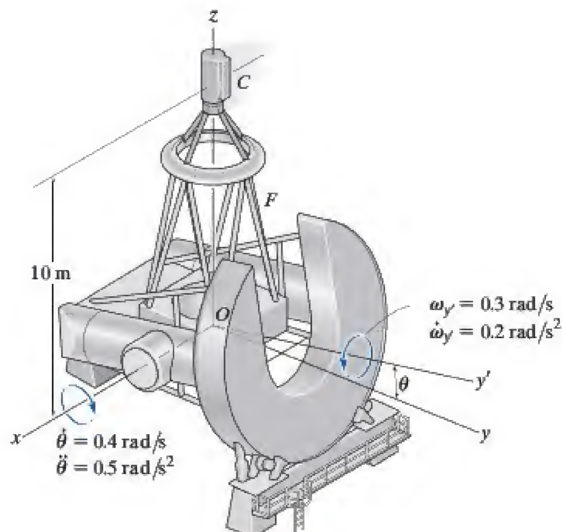
Prob. 20-6

20-7. Si el engrane superior B gira a una velocidad constante de $\boldsymbol{\omega}$, determine la velocidad angular del engrane A, el cual gira libremente alrededor del eje y rueda sobre el engrane fijo inferior C.



Prob. 20-7

***20-8.** El telescopio está montado en el bastidor F que permite dirigirlo a cualquier punto del cielo. Cuando $\theta = 30°$, el bastidor tiene una aceleración angular de $\alpha_{y'} = 0.2$ rad/s^2 y una velocidad angular de $\omega_{y'} = 0.3$ rad/s respecto del eje y', y $\ddot{\theta} = 0.5$ rad/s^2 mientras que $\dot{\theta} = 0.4$ rad/s. Determine la velocidad y aceleración de la cápsula de observación C en este instante.

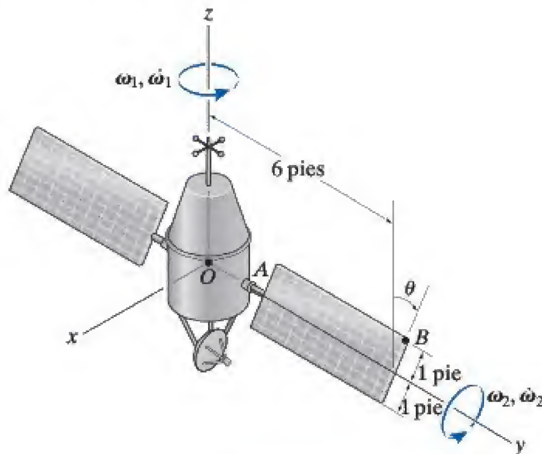


Prob. 20-8

20

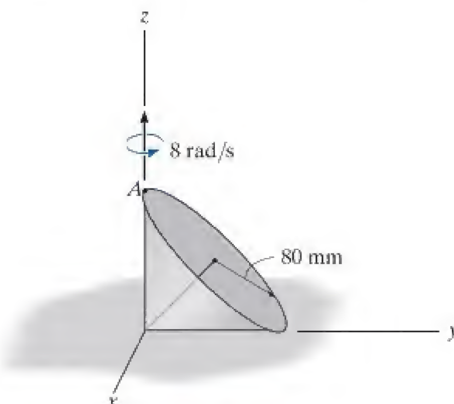
•**20-9.** Cuando $\theta = 90°$, el cuerpo del satélite gira con una velocidad angular de $\omega_1 = 15$ rad/s y una aceleración angular de $\dot{\omega}_1 = 3$ rad/s^2. Al mismo tiempo, los paneles solares giran con una velocidad angular de $\omega_2 = 6$ rad/s y una aceleración angular de $\dot{\omega}_2 = 1.5$ rad/s^2. Determine la velocidad y aceleración del punto B en el panel solar en este instante.

20-10. Cuando $\theta = 90°$, el cuerpo del satélite viaja en la dirección x con una velocidad de $\mathbf{v}_O = \{500\mathbf{i}\}$ m/s y una aceleración de $\mathbf{a}_O = \{50\mathbf{i}\}$ m/s^2. Simultáneamente, el cuerpo también gira con una velocidad angular de $\omega_1 = 15$ rad/s y una aceleración angular de $\dot{\omega}_1 = 3$ rad/s^2. Al mismo tiempo, los paneles solares giran con una velocidad angular de $\omega_2 = 6$ rad/s y una aceleración angular de $\dot{\omega}_2 = 1.5$ rad/s^2. Determine la velocidad y aceleración del punto B en el panel solar.



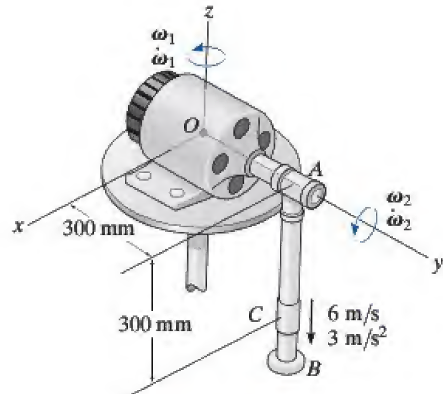
Probs. 20-9/10

20-11. El cono rueda en círculos y gira alrededor del eje z a una velocidad constante $\omega_z = 8$ rad/s. Determine la velocidad y aceleración angulares del cono si rueda sin deslizarse. Además, ¿cuáles son la velocidad y aceleración del punto A?



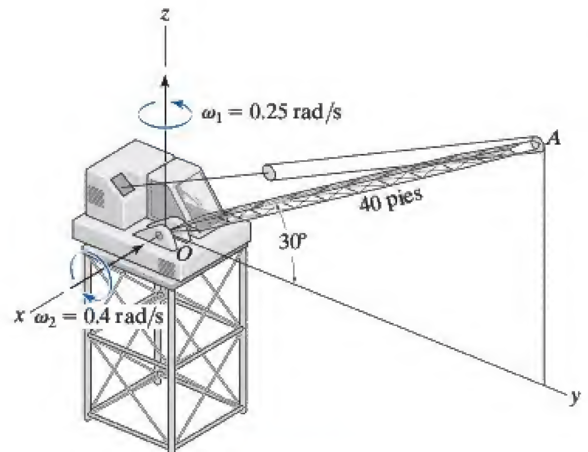
Prob. 20-11

***20-12.** En el instante que se muestra, el motor gira alrededor del eje z con una velocidad angular de $\omega_1 = 3$ rad/s y aceleración angular de $\dot{\omega}_1 = 1.5$ rad/s^2. Simultáneamente, la flecha OA gira con una velocidad angular de $\omega_2 = 6$ rad/s y aceleración angular de $\dot{\omega}_2 = 3$ rad/s^2 y el collarín C se desliza a lo largo de la barra AB con una velocidad y aceleración de 6 m/s y 3 m/s^2. Determine la velocidad y aceleración del collarín C en este instante.



Prob. 20-12

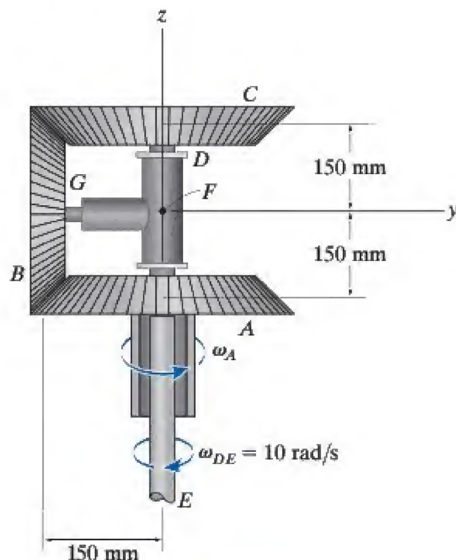
•**20-13.** En el instante que se muestra, la grúa gira respecto del eje z con una velocidad angular $\omega_1 = 0.25$ rad/s, la cual se incrementa a 0.6 rad/s^2. La pluma OA baja con una velocidad angular $\omega_2 = 0.4$ rad/s, la cual se incrementa a 0.8 rad/s^2. Determine la velocidad y aceleración del punto A localizado en el extremo de la pluma en este instante.



Prob. 20-13

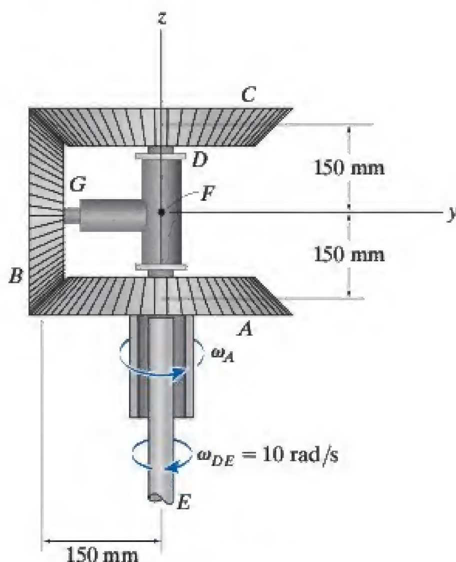
20

20-14. La flecha DE impulsa al engrane C, mientras que el engrane B gira libremente respecto de su propio eje GF, el cual precesa libremente respecto de la flecha DE a una velocidad angular constante de $\omega_{DE} = 10$ rad/s. Si el engrane A se mantiene fijo ($\omega_A = 0$), determine la velocidad angular del engrane B.



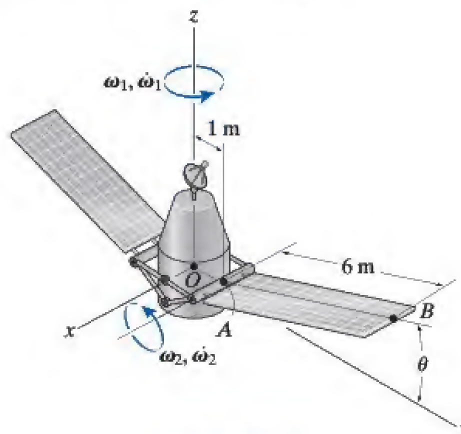
Prob. 20-14

20-15. La flecha DE impulsa al engrane C, mientras que el engrane B gira libremente respecto de su eje GF, el cual precesa libremente alrededor de la flecha DE. Si el engrane A es propulsado a una velocidad angular constante de $\omega_A = 5$ rad/s y la flecha DE gira a una velocidad angular constante de $\omega_{DE} = 10$ rad/s, determine la velocidad angular del engrane B.



Prob. 20-15

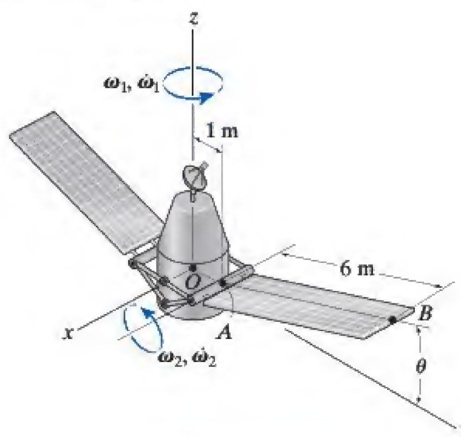
***20-16.** Cuando $\theta = 0°$, el cuerpo del satélite gira a una velocidad angular de $\omega_1 = 20$ rad/s y su aceleración angular es $\dot{\omega}_1 = 5$ rad/s^2. Simultáneamente, los paneles solares giran a una velocidad angular de $\omega_2 = 5$ rad/s y aceleración angular de $\dot{\omega}_2 = 3$ rad/s^2. Determine la velocidad y aceleración del punto B localizado en el extremo de uno de los paneles solares en este instante.



Prob. 20-16

•**20-17.** Cuando $\theta = 30°$, el cuerpo del satélite gira a una velocidad angular de $\omega_1 = 20$ rad/s y su aceleración angular es $\dot{\omega}_1 = 5$ rad/s^2. Simultáneamente, los paneles solares giran a una velocidad angular constante de $\omega_2 = 5$ rad/s. Determine la velocidad y aceleración del punto B localizado en el extremo de uno de los paneles solares en este instante.

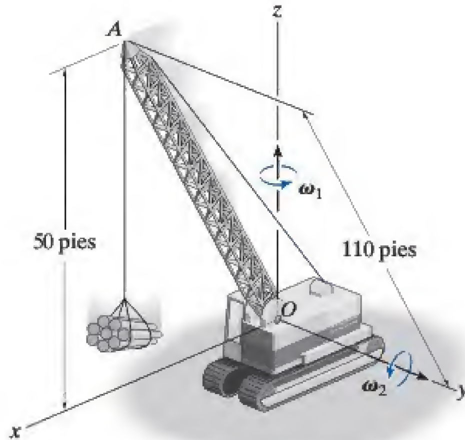
20-18. Cuando $\theta = 30°$, el cuerpo del satélite gira a una velocidad angular de $\omega_1 = 20$ rad/s y su aceleración angular es $\dot{\omega}_1 = 5$ rad/s^2. En el mismo instante, el satélite viaja en la dirección x a una velocidad de $\mathbf{v}_O = \{5000\mathbf{i}\}$ m/s, y su aceleración es $\mathbf{a}_O = \{500\mathbf{i}\}$ m/s^2. Simultáneamente, los paneles solares giran a una rapidez angular constante de $\omega_2 = 5$ rad/s. Determine la velocidad y aceleración del punto B localizado en el extremo de uno de los paneles solares en este instante.



Probs. 20-17/18

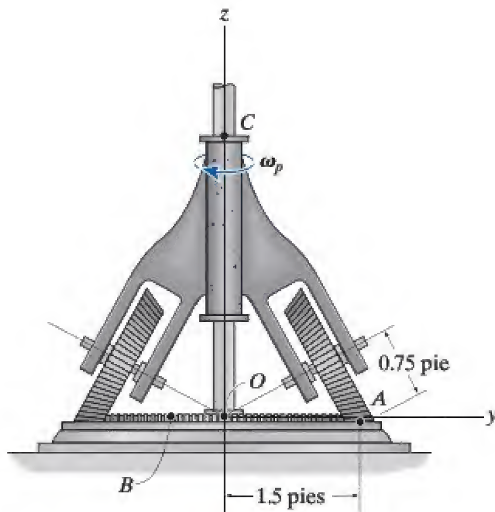
20

20-19. La pluma OA de la grúa gira alrededor del eje z a una velocidad angular constante de $\omega_1 = 0.15$ rad/s, mientras que baja a una velocidad angular constante de $\omega_2 = 0.2$ rad/s. Determine la velocidad y aceleración del punto A localizado en el extremo de la pluma en el instante que se muestra.



Prob. 20-19

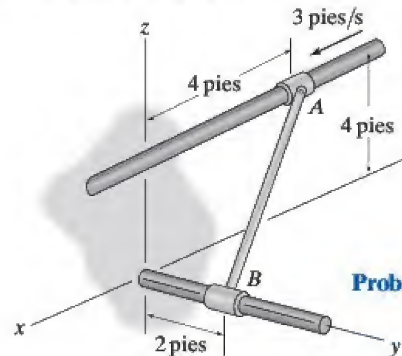
***20-20.** Si el armazón gira a una velocidad angular constante de $\omega_P = \{-10\mathbf{k}\}$ rad/s y el engrane horizontal B gira a una velocidad angular constante de $\omega_B = \{5\mathbf{k}\}$ rad/s, determine la velocidad y aceleración angulares del engrane cónico A.



Prob. 20-20

•**20-21.** La barra AB está conectada a los collarines en sus extremos por medio de articulaciones de rótula esférica. Si la velocidad del collarín A es $v_A = 3$ pies/s, determine la velocidad angular de la barra y la velocidad del collarín B en el instante mostrado. Suponga que la dirección de la velocidad angular de la barra es perpendicular a la barra.

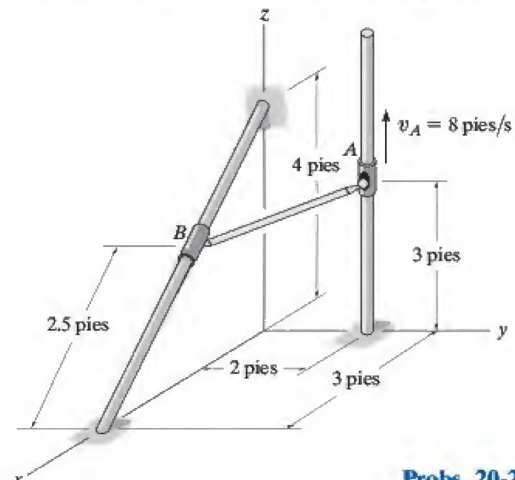
20-22. La barra AB está conectada a los collarines en sus extremos por medio de articulaciones de rótula esférica. Si la aceleración del collarín A es $\mathbf{a}_A = \{8\mathbf{i}\}$ pies/s^2 y su velocidad $\mathbf{v}_A = \{3\mathbf{i}\}$ pies/s, determine la aceleración angular de la barra y la aceleración del collarín B en el instante que se muestra. Suponga que la aceleración angular de la barra es perpendicular a la barra.



Probs. 20-21/22

20-23. La barra AB está conectada a los collarines en sus extremos por medio de articulaciones de rótula esférica. Si el collarín A sube con una velocidad de $\mathbf{v}_A = \{8\mathbf{k}\}$ pies/s, determine la velocidad angular de la barra y la rapidez del collarín B en el instante que se muestra. Suponga que la dirección de la velocidad angular de la barra es perpendicular a ella.

***20-24.** La barra AB está conectada a los collarines en sus extremos por medio de articulaciones de rótula esférica. Si el collarín A sube con una aceleración de $\mathbf{a}_A = \{4\mathbf{k}\}$ pies/s^2, determine la aceleración angular de la barra AB y la magnitud de la aceleración del collarín B. Suponga que la dirección de la aceleración angular de la barra es perpendicular a ella.

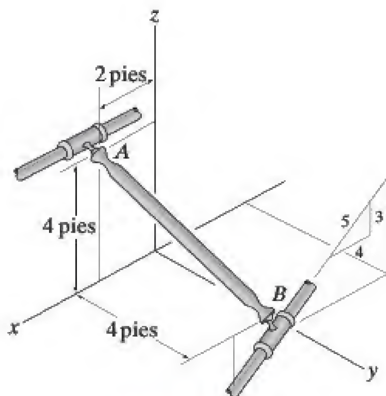


Probs. 20-23/24

20

•**20-25.** Si el collarín A se mueve a una velocidad constante de $\mathbf{v}_A = \{10\mathbf{i}\}$ pies/s, determine la velocidad del collarín B cuando la barra AB está en la posición que se muestra. Suponga que la velocidad angular de AB es perpendicular a la barra.

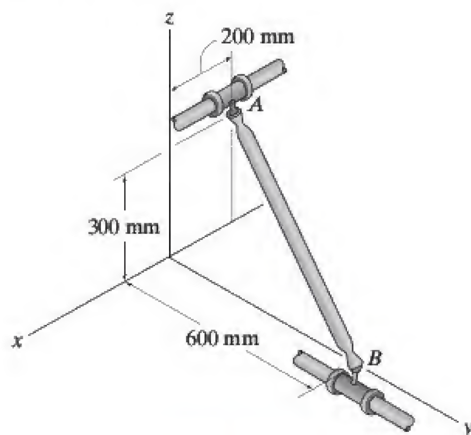
20-26. Cuando la barra AB está en la posición mostrada, el collarín A se mueve a una velocidad $\mathbf{v}_A = \{10\mathbf{i}\}$ pies/s y aceleración de $\mathbf{a}_A = \{2\mathbf{i}\}$ pies/s^2. Determine la aceleración del collarín B en este instante. Suponga que la velocidad y la aceleración angulares de AB son perpendiculares a la barra.



Probs. 20-25/26

20-27. Si el collarín A se mueve a una velocidad constante de $\mathbf{v}_A = \{3\mathbf{i}\}$ m/s determine la velocidad del collarín B cuando la barra AB está en la posición mostrada. Suponga que la velocidad angular de AB es perpendicular a la barra.

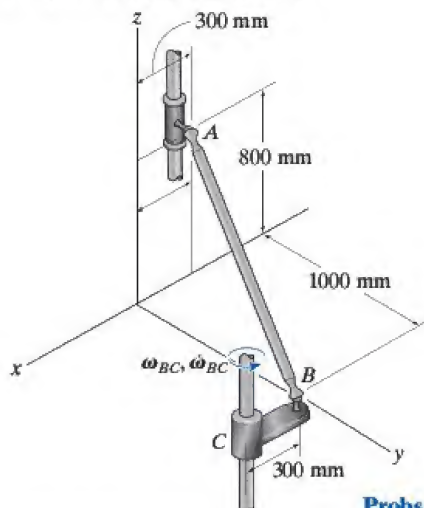
***20-28.** Cuando la barra AB está en la posición que se muestra, el collarín se mueve a una velocidad de $\mathbf{v}_A = \{3\mathbf{i}\}$ m/s y aceleración de $\mathbf{a}_A = \{0.5\mathbf{i}\}$ m/s^2. Determine la aceleración del collarín B en este instante. Suponga que la velocidad y aceleración angulares de AB son perpendiculares a la barra.



Probs. 20-27/28

•**20-29.** Si la palanca BC gira con una velocidad angular constante de $\omega_{BC} = 6$ rad/s, determine la velocidad del collarín A. Suponga que la velocidad angular de AB es perpendicular a la barra.

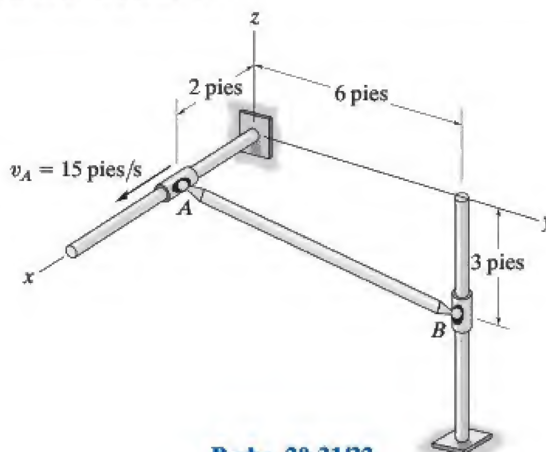
20-30. Si la palanca BC gira con una velocidad angular de $\omega_{BC} = 6$ rad/s y una aceleración angular de $\dot{\omega}_{BC} = 1.5$ rad/s^2, determine la aceleración del collarín A en este instante. Suponga que la velocidad y aceleración angulares de AB son perpendiculares a la barra.



Probs. 20-29/30

20-31. La barra AB está conectada a los collarines en sus extremos por medio de articulaciones de rótula esférica. Si el collarín A tiene una velocidad $v_A = 15$ pies/s en el instante que se muestra, determine la velocidad del collarín B. Suponga que la velocidad angular es perpendicular a la barra.

***20-32.** La barra AB está conectada a los collarines en sus extremos por medio de articulaciones de rótula esférica. Si el collarín A tiene una velocidad de $\mathbf{v}_A = \{15\mathbf{i}\}$ pies/s y una aceleración de $\mathbf{a}_A = \{2\mathbf{i}\}$ pies/s^2 en el instante que se muestra, determine la aceleración del collarín B. Suponga que la velocidad y aceleración angulares son perpendiculares a la barra.

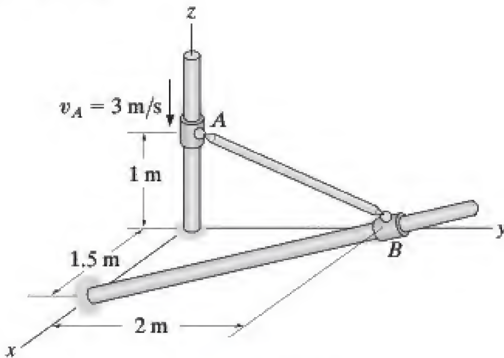


Probs. 20-31/32

20

•**20-33.** La barra AB está conectada a los collarines en sus extremos por medio de articulaciones de rótula esférica. Si el collarín A tiene una velocidad $v_A = 3$ m/s, determine la rapidez del collarín B en el instante que se muestra. Suponga que la velocidad angular es perpendicular a la barra.

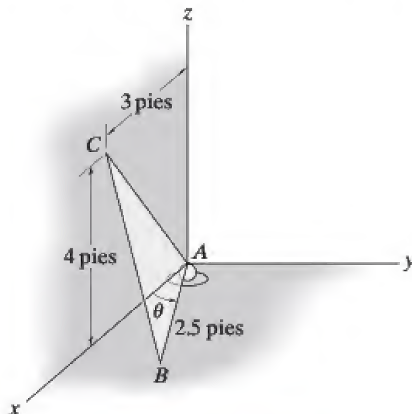
20-34. Si el collarín A del problema 20-33 tiene una aceleración de $\mathbf{a}_A = \{-2\mathbf{k}\}$ m/s^2 en el instante en que su velocidad es $\mathbf{v}_A = \{-3\mathbf{k}\}$ m/s, determine la magnitud de la aceleración del collarín B en este instante. Suponga que la velocidad y aceleración angulares son perpendiculares a la barra.



Probs. 20-33/34

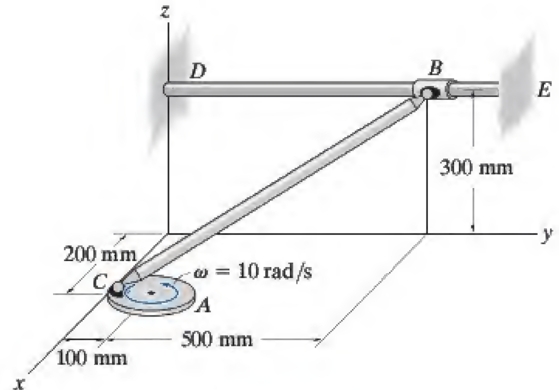
20-35. La placa triangular ABC está soportada en A por una articulación de rótula esférica y en C por el plano x-z. El lado AB queda en el plano x-y. Cuando $\theta = 60°$, $\dot{\theta} = 2$ rad/s y el punto C tiene las coordenadas que se muestran. Determine la velocidad angular de la placa y la velocidad del punto C en este instante.

***20-36.** La placa triangular ABC está sostenida en A por una articulación de rótula esférica y en C por el plano x-z. El lado AB queda en el plano x-y. Cuando $\theta = 60°$, $\dot{\theta} = 2$ rad/s $\ddot{\theta} = 3$ rad/s^2 y el punto C tiene las coordenadas mostradas. Determine la aceleración angular de la placa y la aceleración del punto C en este instante.



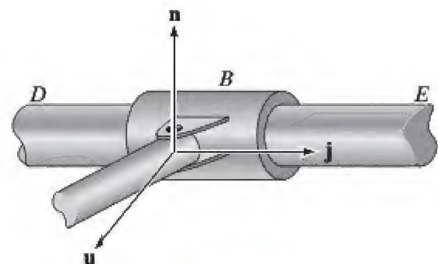
Probs. 20-35/36

•**20-37.** El disco A gira a una velocidad angular constante de 10 rad/s. Si la barra BC está unida al disco y a un collar por medio de articulaciones de rótula esférica, determine la velocidad del collarín B en el instante que se muestra. Además, ¿cuál es la velocidad angular de la barra $\boldsymbol{\omega}_{BC}$ si su dirección es perpendicular a su eje?



Prob. 20-37

20-38. Resuelva el problema 20-37 si la conexión en B consiste en un pasador como se muestra en la figura siguiente, en lugar de una articulación de rótula esférica. *Sugerencia:* la restricción permite la rotación de la barra tanto en torno a la barra DE (dirección $\mathbf{j}$) como respecto del eje del pasador (dirección $\mathbf{n}$). Como no hay componente rotacional en la dirección $\mathbf{u}$, es decir, perpendicular a $\mathbf{n}$ y $\mathbf{j}$ donde $\mathbf{u} = \mathbf{j} \times \mathbf{n}$, se puede obtener una ecuación adicional para la solución a partir de $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u} = 0$. El vector $\mathbf{n}$ está en la misma dirección que $\mathbf{r}_{B/C} \times \mathbf{r}_{D/C}$.



Prob. 20-38

*20.4 Análisis de movimiento relativo por medio de ejes trasladantes y rotatorios

La manera más general de analizar el movimiento tridimensional de un cuerpo rígido requiere el uso de ejes x, y, z que se trasladen y giren con respecto a un segundo marco X, Y, Z. Este análisis también permite determinar los movimientos de dos puntos A y B localizados en miembros distintos de un mecanismo y el movimiento relativo de una partícula con respecto a otra cuando una o ambas partículas se mueven a lo largo de *trayectorias curvas*.

Como se muestra en la figura 20-11, las ubicaciones de los puntos A y B se especifican con respecto al marco de referencia X, Y, Z por medio de vectores de posición $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$. El punto base A representa el origen del sistema de coordenadas x, y, z, el cual se traslada y gira con respecto a X, Y, Z. En el instante considerado, la velocidad y aceleración del punto A son $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{a}_A$ y la velocidad y aceleración angulares de los ejes x, y, z son $\mathbf{\Omega}$ y $\dot{\mathbf{\Omega}} = d\mathbf{\Omega}/dt$. Todos estos vectores se *miden* con respecto al marco de referencia X, Y, Z, aunque pueden expresarse en forma de componentes cartesianos a lo largo de cualquier sistema de ejes.

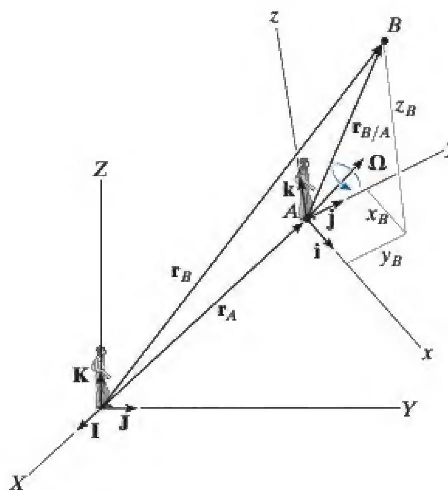


Fig. 20-11

20

Posición. Si la posición de "B con respecto a A" se especifica por medio del *vector de posición relativa* $\mathbf{r}_{B/A}$, figura 20-11, entonces, por adición vectorial,

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \tag{20-9}$$

donde

$\mathbf{r}_B$ = posición de B.

$\mathbf{r}_A$ = posición del origen A.

$\mathbf{r}_{B/A}$ = posición de "B con respecto a A".

Velocidad. La velocidad del punto B medida con respecto a X, Y, Z se puede determinar al considerar las derivadas con respecto al tiempo de la ecuación 20-9.

$$\dot{\mathbf{r}}_B = \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{r}}_{B/A}$$

Los primeros dos términos representan $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_A$. El último término debe evaluarse mediante la aplicación de la ecuación 20-6, puesto que $\mathbf{r}_{B/A}$ se mide con respecto a una referencia rotatoria. De modo que,

$$\dot{\mathbf{r}}_{B/A} = (\dot{\mathbf{r}}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{20-10}$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} \tag{20-11}$$

donde

$\mathbf{v}_B$ = velocidad de B.

$\mathbf{v}_A$ = velocidad del origen A del marco de referencia x, y, z.

$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = velocidad de "B con respecto a A" medida por un observador situado en el marco de referencia rotatorio x, y, z.

$\boldsymbol{\Omega}$ = velocidad angular del marco de referencia x, y, z.

$\mathbf{r}_{B/A}$ = posición de "B con respecto a A".

Aceleración. La aceleración del punto B medida con respecto a X, Y, Z se determina por la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 20-11.

$$\dot{\mathbf{v}}_B = \dot{\mathbf{v}}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}_{B/A} + \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

Las derivadas con respecto al tiempo definidas en el primero y segundo términos representan $\mathbf{a}_B$ y $\mathbf{a}_A$, respectivamente. El cuarto término se evalúa con la ecuación 20-10 y el último término se evalúa con la ecuación 20-6, la cual resulta

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} = (\dot{\mathbf{v}}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} = (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

En este caso $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$ es la aceleración de B con respecto a A medida con respecto a x, y, z. Si sustituimos este resultado y la ecuación 20-10 en la ecuación anterior y simplificamos, tenemos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} \tag{20-12}$$

donde

$\mathbf{a}_B$ = aceleración de B.

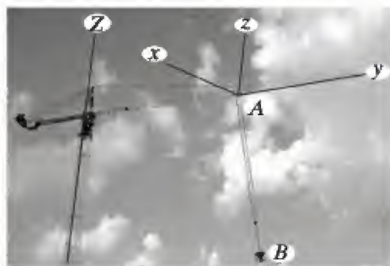
$\mathbf{a}_B$ = aceleración del origen A del marco de referencia x, y, z.

$(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$, $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = aceleración y velocidad relativa de "B con respecto a A" medidas por un observador situado en el marco de referencia rotatorio x, y, z.

$\dot{\mathbf{\Omega}}$, $\mathbf{\Omega}$ = aceleración y velocidad angulares del marco de referencia x, y, z.

$\mathbf{r}_{B/A}$ = posición de "B con respecto a A".

Las ecuaciones 20-11 y 20-12 son idénticas a las que se utilizaron en la sección 16.8 para analizar el movimiento plano relativo.* En ese caso, sin embargo, se simplificó puesto que $\mathbf{\Omega}$ y $\dot{\mathbf{\Omega}}$ tienen una *dirección constante*, la cual siempre es perpendicular al plano del movimiento. Para movimiento tridimensional, $\dot{\mathbf{\Omega}}$ se calcula con la ecuación 20-6, puesto que $\dot{\mathbf{\Omega}}$ depende del cambio *tanto* de magnitud *como* de dirección de $\mathbf{\Omega}$.



El movimiento espacial complicado de la cubeta de concreto B ocurre debido a la rotación de la pluma alrededor del eje Z, el movimiento del carro A a lo largo de la pluma, y la extensión y oscilación del cable AB. Puede establecerse un sistema de coordenadas x, y, z trasladante-rotatorio en el carro, y entonces puede aplicarse un análisis de movimiento relativo para estudiar este movimiento.

*Remítase a la sección 16.8 para una interpretación de los términos.

Procedimiento para el análisis

El movimiento tridimensional de partículas o cuerpos rígidos puede analizarse con las ecuaciones 20-11 y 20-12 mediante el siguiente procedimiento.

Ejes de coordenadas.

- Seleccione la ubicación y orientación de los ejes de coordenadas X, Y, Z, y x, y, z. Con mucha frecuencia las soluciones son fáciles de obtener si en el instante considerado:

  (1) los orígenes *coinciden*.

  (2) los ejes son colineales.

  (3) los ejes son paralelos.

- Si varios componentes de velocidad angular intervienen en un problema, los cálculos se reducirán si los ejes x, y, z se seleccionan de tal modo que sólo un componente de velocidad angular se observe con respecto a este marco ($\mathbf{\Omega}_{xyz}$), y éste gira a $\mathbf{\Omega}$ definida por los demás componentes de velocidad angular.

Ecuaciones de cinemática.

- Una vez que se define el origen de la referencia móvil, A, y el punto móvil B se especifica, deberán escribirse entonces las ecuaciones 20-11 y 20-12 en forma simbólica como

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

- Si parece que $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{\Omega}$ *cambian de dirección* cuando se les observa desde la referencia X, Y, Z fija, entonces utilice un sistema de ejes de referencia primos x', y', z' que tenga una rotación $\mathbf{\Omega}' = \mathbf{\Omega}$. Se utiliza entonces la ecuación 20-6 para determinar $\dot{\mathbf{\Omega}}$ y el movimiento $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{a}_A$ del origen de los ejes x, y, z móviles.

- Si parece que $(\mathbf{r}_{B/A})_{xyz}$ y $\mathbf{\Omega}_{xyz}$ cambian de dirección observados desde x, y, z, entonces utilice un sistema de eje de referencia biprimos x'', y'', z'' con $\mathbf{\Omega}'' = \mathbf{\Omega}_{xyz}$ y aplique la ecuación 20-6 para determinar $\dot{\mathbf{\Omega}}_{xyz}$ y el movimiento relativo $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$.

- Una vez que se obtienen las formas finales de $\dot{\mathbf{\Omega}}$, $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{a}_A$, $\dot{\mathbf{\Omega}}_{xyz}$, $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$, se sustituyen los datos numéricos del problema y se evalúan los términos cinemáticos. Los componentes de todos estos vectores se seleccionan a lo largo de los ejes X, Y, Z, o de los ejes x, y, z. La selección es arbitraria siempre que se utilice un sistema de vectores unitarios consistente.

20

EJEMPLO 20.4

Un motor y la barra AB conectada tienen los movimientos angulares que se muestran en la figura 20-12. Un collarín C insertado en la barra se encuentra a 0.25 m de A y desciende a lo largo de la barra a una velocidad de 3 m/s y una aceleración de 2 m/s^2. Determine la velocidad y aceleración de C en este instante.

SOLUCIÓN

Ejes de coordenadas. El origen de la referencia X, Y, Z fija se elige en el centro de la plataforma y el origen del marco x, y, z móvil en el punto A, figura 20-12. Como el collarín se somete a dos componentes de movimiento angular $\boldsymbol{\omega}_P$ y $\boldsymbol{\omega}_M$, su velocidad angular será $\boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_M$ en x, y, z. Por consiguiente, los ejes x, y, z se anexarán a la plataforma de modo que $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_P$.

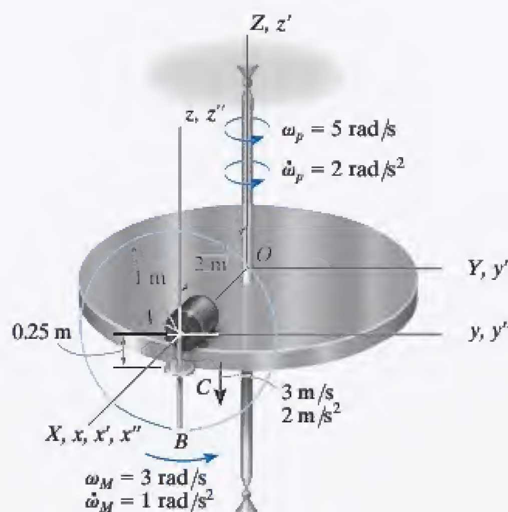


Fig. 20-12

Ecuaciones cinemáticas. Las ecuaciones 20-11 y 20-12 aplicadas a los puntos C y A se vuelven

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/A} + (\mathbf{v}_{C/A})_{xyz}$$
$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/A} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/A}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/A})_{xyz}$$

Movimiento de A. Aquí $\mathbf{r}_A$ cambia de dirección con respecto a X, Y, Z. Para determinar las derivadas con respecto al tiempo de $\mathbf{r}_A$ utilizaremos un sistema de ejes x', y', z' coincidentes con los ejes X, Y, Z que giran a $\mathbf{\Omega}' = \boldsymbol{\omega}_p$. Por tanto,

$$\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p = \{5\mathbf{k}\} \text{ rad/s } (\mathbf{\Omega} \text{ no cambia de dirección respecto a } X, Y, Z)$$
$$\dot{\mathbf{\Omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_p = \{2\mathbf{k}\} \text{ rad/s}^2$$
$$\mathbf{r}_A = \{2\mathbf{i}\} \text{ m}$$
$$\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_A = (\dot{\mathbf{r}}_A)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r}_A = \mathbf{0} + 5\mathbf{k} \times 2\mathbf{i} = \{10\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$
$$\mathbf{a}_A = \ddot{\mathbf{r}}_A = [(\ddot{\mathbf{r}}_A)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times (\dot{\mathbf{r}}_A)_{x'y'z'}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p \times \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\omega}_p \times \dot{\mathbf{r}}_A$$
$$= [\mathbf{0} + \mathbf{0}] + 2\mathbf{k} \times 2\mathbf{i} + 5\mathbf{k} \times 10\mathbf{j} = \{-50\mathbf{i} + 4\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$$

Movimiento de C con respecto a A. Aquí $(\mathbf{r}_{C/A})_{xyz}$ cambia de dirección con respecto a x, y, z. Para determinar las derivadas con respecto al tiempo de $(\mathbf{r}_{C/A})_{xyz}$ utilice un sistema de ejes x'', y'', z'' que giren a $\mathbf{\Omega}'' = \mathbf{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_M$. Por tanto,

$$\mathbf{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_M = \{3\mathbf{i}\} \text{ rad/s } (\mathbf{\Omega}_{xyz} \text{ no cambia de dirección respecto a } x, y, z)$$
$$\dot{\mathbf{\Omega}}_{xyz} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_M = \{1\mathbf{i}\} \text{ rad/s}^2$$
$$(\mathbf{r}_{C/A})_{xyz} = \{-0.25\mathbf{k}\} \text{ m}$$
$$(\mathbf{v}_{C/A})_{xyz} = (\dot{\mathbf{r}}_{C/A})_{xyz} = (\dot{\mathbf{r}}_{C/A})_{x''y''z''} + \boldsymbol{\omega}_M \times (\mathbf{r}_{C/A})_{xyz}$$
$$= -3\mathbf{k} + [3\mathbf{i} \times (-0.25\mathbf{k})] = \{0.75\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\} \text{ m/s}$$
$$(\mathbf{a}_{C/A})_{xyz} = (\ddot{\mathbf{r}}_{C/A})_{xyz} = [(\ddot{\mathbf{r}}_{C/A})_{x''y''z''} + \boldsymbol{\omega}_M \times (\dot{\mathbf{r}}_{C/A})_{x''y''z''}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_M \times (\mathbf{r}_{C/A})_{xyz} + \boldsymbol{\omega}_M \times (\dot{\mathbf{r}}_{C/A})_{xyz}$$
$$= [-2\mathbf{k} + 3\mathbf{i} \times (-3\mathbf{k})] + (1\mathbf{i}) \times (-0.25\mathbf{k}) + (3\mathbf{i}) \times (0.75\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$$
$$= \{18.25\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2$$

Movimiento de C.

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/A} + (\mathbf{v}_{C/A})_{xyz}$$
$$= 10\mathbf{j} + [5\mathbf{k} \times (-0.25\mathbf{k})] + (0.75\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$$
$$= \{10.75\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\} \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$
$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/A} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/A}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/A})_{xyz}$$
$$= (-50\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) + [2\mathbf{k} \times (-0.25\mathbf{k})] + 5\mathbf{k} \times [5\mathbf{k} \times (-0.25\mathbf{k})]$$
$$+ 2[5\mathbf{k} \times (0.75\mathbf{j} - 3\mathbf{k})] + (18.25\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k})$$
$$= \{-57.5\mathbf{i} + 22.25\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 20.5

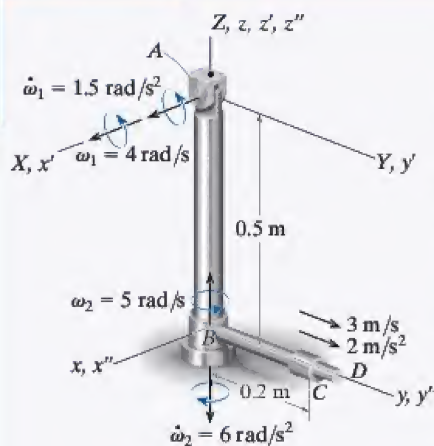


Fig 20-13

El péndulo de la figura 20-13 se compone de dos barras; AB está soportada en A por medio de un pasador y oscila sólo en el plano Y-Z, mientras que un cojinete en B permite que la barra BD gire en torno a la barra AB. En un instante dado, las barras tienen los movimientos angulares que se muestran. Incluso, un collarín C, localizado a 0.2 m de B tiene una velocidad de 3 m/s y una aceleración de 2 m/s^2 a lo largo de la barra. Determine la velocidad y aceleración del collarín en este instante.

SOLUCIÓN I

Ejes de coordenadas. El origen del marco X, Y, Z fijo se colocará en A. El movimiento de collarín se observa convenientemente desde B, por lo que el origen del marco x, y, z se localiza en este punto. Seleccionaremos $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1$ y $\mathbf{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_2$.

Ecuaciones cinemáticas.

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B} + (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/B} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/B})_{xyz}$$

Movimiento de *B*. Para determinar las derivadas con respecto al tiempo de $\mathbf{r}_B$ sean los ejes x', y', z' que giren con $\mathbf{\Omega}' = \boldsymbol{\omega}_1$. Entonces

$$\mathbf{\Omega}' = \boldsymbol{\omega}_1 = \{4\mathbf{i}\} \text{ rad/s} \qquad \dot{\mathbf{\Omega}}' = \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \{1.5\mathbf{i}\} \text{ rad/s}^2$$

$$\mathbf{r}_B = \{-0.5\mathbf{k}\} \text{ m}$$

$$\mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_B = (\dot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_B = \mathbf{0} + 4\mathbf{i} \times (-0.5\mathbf{k}) = \{2\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$

$$\mathbf{a}_B = \ddot{\mathbf{r}}_B = [(\ddot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\dot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \mathbf{r}_B + \boldsymbol{\omega}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_B$$

$$= [\mathbf{0} + \mathbf{0}] + 1.5\mathbf{i} \times (-0.5\mathbf{k}) + 4\mathbf{i} \times 2\mathbf{j} = \{0.75\mathbf{j} + 8\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2$$

Movimiento de *C* con respecto a *B*. Para determinar las derivadas con respecto al tiempo de $(\mathbf{r}_{C/B})_{xyz}$, sean los ejes x'', y'', z'' que giren con $\mathbf{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_2$. Entonces

$$\mathbf{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_2 = \{5\mathbf{k}\} \text{ rad/s} \qquad \dot{\mathbf{\Omega}}_{xyz} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \{-6\mathbf{k}\} \text{ rad/s}^2$$

$$(\mathbf{r}_{C/B})_{xyz} = \{0.2\mathbf{j}\} \text{ m}$$

$$(\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} = (\dot{\mathbf{r}}_{C/B})_{xyz} = (\dot{\mathbf{r}}_{C/B})_{x''y''z''} + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{r}_{C/B})_{xyz} = 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \times 0.2\mathbf{j} = \{-1\mathbf{i} + 3\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$

$$(\mathbf{a}_{C/B})_{xyz} = (\ddot{\mathbf{r}}_{C/B})_{xyz} = [(\ddot{\mathbf{r}}_{C/B})_{x''y''z''} + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\dot{\mathbf{r}}_{C/B})_{x''y''z''}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times (\mathbf{r}_{C/B})_{xyz} + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\dot{\mathbf{r}}_{C/B})_{xyz}$$

$$= (2\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \times 3\mathbf{j}) + (-6\mathbf{k} \times 0.2\mathbf{j}) + [5\mathbf{k} \times (-1\mathbf{i} + 3\mathbf{j})]$$

$$= \{-28.8\mathbf{i} - 3\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$$

Movimiento de *C*.

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B} + (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} = 2\mathbf{j} + 4\mathbf{i} \times 0.2\mathbf{j} + (-1\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

$$= \{-1\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 0.8\mathbf{k}\} \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/B} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/B})_{xyz}$$

$$= (0.75\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) + (1.5\mathbf{i} \times 0.2\mathbf{j}) + [4\mathbf{i} \times (4\mathbf{i} \times 0.2\mathbf{j})]$$

$$+ 2[4\mathbf{i} \times (-1\mathbf{i} + 3\mathbf{j})] + (-28.8\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$$

$$= \{-28.8\mathbf{i} - 5.45\mathbf{j} + 32.3\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

20

SOLUCIÓN II

Ejes de coordenadas. Aquí consideraremos que los ejes x, y, z giran a

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = \{4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}$$

Entonces $\boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \mathbf{0}$.

Movimiento de *B*. Por las restricciones del problema $\boldsymbol{\omega}_1$ no cambia de dirección con respecto a X, Y, Z; sin embargo, la dirección de $\boldsymbol{\omega}_2$ se cambia por $\boldsymbol{\omega}_1$. Por tanto, para obtener $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ considere que los ejes x', y', z' coinciden con los ejes X, Y, Z en A de modo que $\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\omega}_1$. Entonces al considerar la derivada de los componentes de $\boldsymbol{\Omega}$,

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = [(\dot{\boldsymbol{\omega}}_1)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_1] + [(\dot{\boldsymbol{\omega}}_2)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2]$$
$$= [1.5\mathbf{i} + \mathbf{0}] + [-6\mathbf{k} + 4\mathbf{i} \times 5\mathbf{k}] = \{1.5\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 6\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}^2$$

Además, $\boldsymbol{\omega}_1$ cambia la dirección de $\mathbf{r}_B$ de modo que las derivadas con respecto al tiempo de $\mathbf{r}_B$ se determinan con los ejes primos antes definidos. Por consiguiente,

$$\mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_B = (\dot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_B$$
$$= \mathbf{0} + 4\mathbf{i} \times (-0.5\mathbf{k}) = \{2\mathbf{j}\}\ \text{m/s}$$
$$\mathbf{a}_B = \ddot{\mathbf{r}}_B = [(\ddot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\dot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \mathbf{r}_B + \boldsymbol{\omega}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_B$$
$$= [\mathbf{0} + \mathbf{0}] + 1.5\mathbf{i} \times (-0.5\mathbf{k}) + 4\mathbf{i} \times 2\mathbf{j} = \{0.75\mathbf{j} + 8\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2$$

Movimiento de *C* con respecto a *B*.

$$\boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \mathbf{0}$$
$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{xyz} = \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{r}_{C/B})_{xyz} = \{0.2\mathbf{j}\}\ \text{m}$$
$$(\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} = \{3\mathbf{j}\}\ \text{m/s}$$
$$(\mathbf{a}_{C/B})_{xyz} = \{2\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2$$

Movimiento de *C*.

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B} + (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz}$$
$$= 2\mathbf{j} + [(4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{j})] + 3\mathbf{j}$$
$$= \{-1\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 0.8\mathbf{k}\}\ \text{m/s} \qquad \textit{Resp.}$$
$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/B} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/B})_{xyz}$$
$$= (0.75\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) + [(1.5\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{j})]$$
$$+ (4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) \times [(4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) \times 0.2\mathbf{j}] + 2[(4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) \times 3\mathbf{j}] + 2\mathbf{j}$$
$$= \{-28.8\mathbf{i} - 5.45\mathbf{j} + 32.3\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

20

PROBLEMAS

20-39. Resuelva el problema 20-5 de modo que los ejes x, y, z se muevan con translación curvilínea, $\mathbf{\Omega} = \mathbf{0}$ en cuyo caso parece que el collarín tiene tanto velocidad angular $\mathbf{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ como movimiento radial.

***20-40.** Resuelva el ejemplo 20-5 con los ejes x, y, z fijos en la barra BD de modo que $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$. En este caso parece que el collarín se mueve sólo radialmente hacia fuera a lo largo de BD; por consiguiente $\mathbf{\Omega}_{xyz} = \mathbf{0}$.

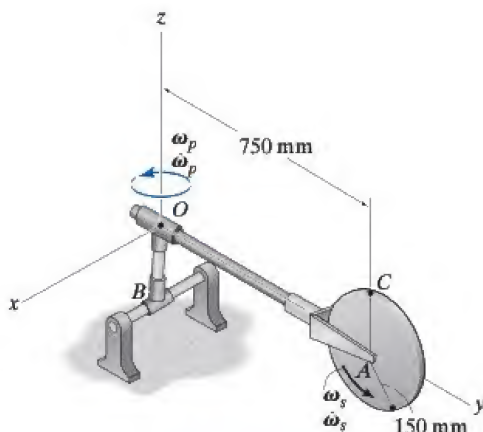
•**20-41.** En el instante que se muestra, la flecha gira con una velocidad angular de $\omega_P = 6$ rad/s y su aceleración es de $\dot{\omega}_p = 3$ rad/s^2. En el mismo instante, el disco gira alrededor de su eje con una velocidad angular de $\omega_s = 12$ rad/s, la cual se incrementa a una razón constante de $\dot{\omega}_s = 6$ rad/s^2. Determine la velocidad del punto C localizado en el borde del disco en este instante.

20-42. En el instante que se muestra, la flecha gira con una velocidad angular de $\omega_P = 6$ rad/s y su aceleración angular es de $\dot{\omega}_p = 3$ rad/s^2. En el mismo instante, el disco gira alrededor de su eje con una velocidad angular de $\omega_s = 12$ rad/s, la cual se incrementa a una razón constante de $\dot{\omega}_s = 6$ rad/s^2. Determine la aceleración del punto C localizado en el borde del disco en este instante.

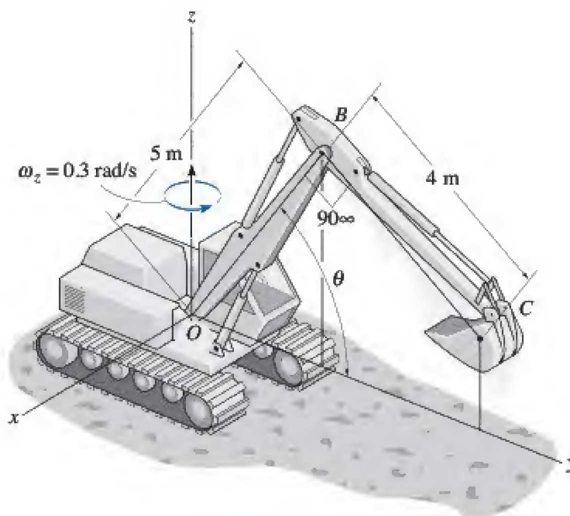
20-43. En el instante que se muestra, la cabina de la excavadora gira respecto del eje z con una velocidad angular constante de $\omega_z = 0.3$ rad/s. En el mismo instante $\theta = 60°$ y la pluma OBC tiene una velocidad angular de $\dot{\theta} = 0.6$ rad/s, la cual se incrementa a $\ddot{\theta} = 0.2$ rad/s^2, ambas medidas con respecto a la cabina. Determine la velocidad y aceleración del punto C en la grapa en este instante.

***20-44.** En el instante que se muestra, la estructura de la excavadora avanza en la dirección y con una velocidad de 2 m/s y una aceleración de 1 m/s^2, mientras que la cabina gira respecto del eje z con una velocidad angular de $\omega_z = 0.3$ rad/s, la cual se incrementa a $\alpha_z = 0.4$ rad/s^2. En el mismo instante $\theta = 60°$, y la pluma OBC tiene una velocidad angular de $\dot{\theta} = 0.6$ rad/s, la cual se incrementa a $\ddot{\theta} = 0.2$ rad/s^2; ambas medidas con respecto a la cabina. Determine la velocidad y la aceleración del punto C para tratar de coger algo en este instante.

20



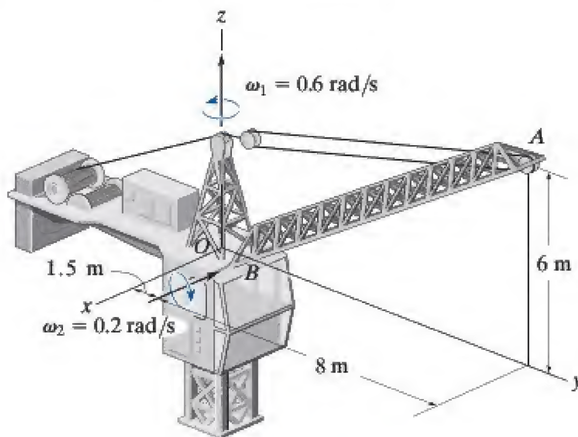
Probs. 20-41/42



Probs. 20-43/44

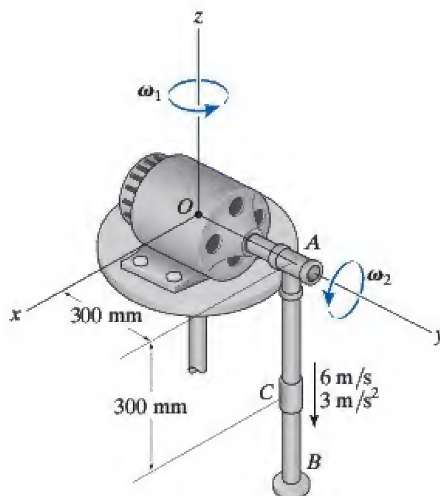
•**20-45.** La grúa gira alrededor del eje z con una velocidad constante $\omega_1 = 0.6$ rad/s, mientras que la pluma baja a una velocidad constante $\omega_2 = 0.2$ rad/s. Determine la velocidad y la aceleración del punto A localizado en el extremo de la pluma en el instante que se muestra.

20-46. La grúa gira alrededor del eje z a una velocidad de $\omega_1 = 0.6$ rad/s, la cual se incrementa a $\dot{\omega}_1 = 0.6$ rad/s^2. Además, la pluma baja a una velocidad $\omega_2 = 0.2$ rad/s, la cual se incrementa a $\dot{\omega}_2 = 0.3$ rad/s^2. Determine la velocidad y aceleración del punto A localizado en el extremo de la pluma en el instante que se muestra.



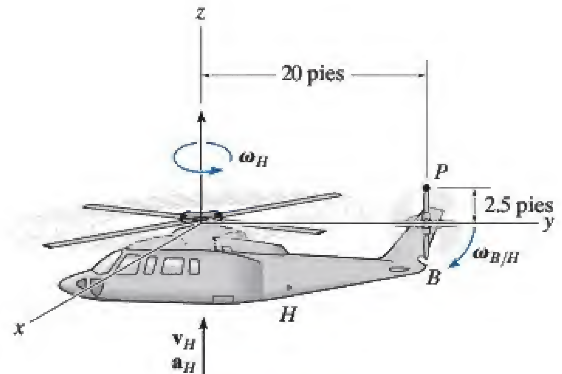
Probs. 20-45/46

20-47. El motor gira respecto del eje z a una velocidad angular constante de $\omega_1 = 3$ rad/s. Simultáneamente, la flecha OA gira a una velocidad angular constante de $\omega_2 = 6$ rad/s. Además, el collarín C se desliza a lo largo de la barra AB con una velocidad y aceleración de 6 m/s y 3 m/s^2. Determine la velocidad y aceleración del collarín C en el instante que se muestra.



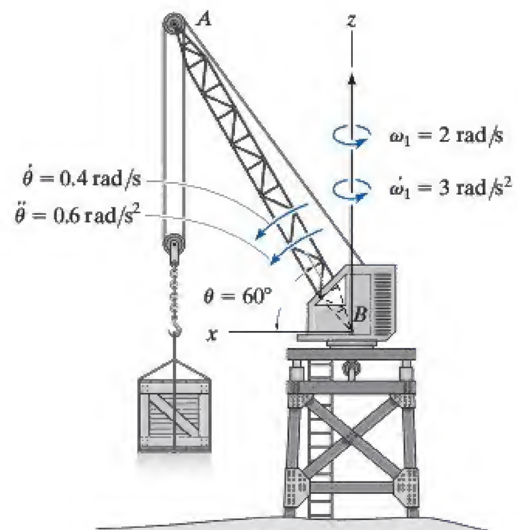
Prob. 20-47

***20-48.** En el instante que se muestra, el helicóptero se eleva con una velocidad $v_H = 4$ pies/s y aceleración de $a_H = 2$ pies/s^2. En el mismo instante la estructura H, *no* el aspa horizontal, gira alrededor de un eje vertical con una velocidad angular $\omega_H = 0.9$ rad/s. Si el aspa del rotor de cola B gira con una velocidad angular constante $\omega_{B/H} = 180$ rad/s, medida con respecto a H, determine la velocidad y aceleración del punto P, localizado en el extremo del aspa, en el instante en que el aspa está en posición vertical.



Prob. 20-48

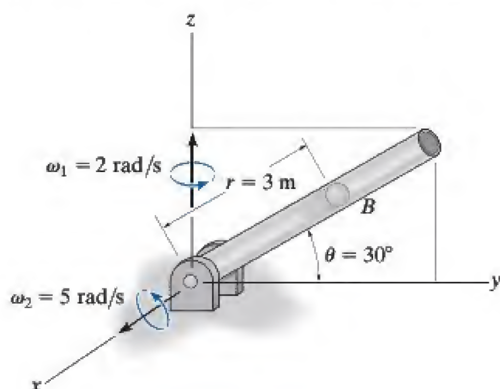
•**20-49.** En un instante dado la pluma AB de la grúa gira alrededor del eje z con el movimiento que se muestra. En este mismo instante, $\theta = 60°$ y la pluma desciende de modo que $\dot{\theta} = 0.4$ rad/s y $\ddot{\theta} = 0.6$ rad/s^2. Determine la velocidad y aceleración del extremo de la pluma A en este instante. La longitud de la pluma es $l_{AB} = 40$ m.



Prob. 20-49

20-50. En el instante que se muestra, el tubo gira alrededor del eje z con una velocidad angular constante $\omega_1 = 2$ rad/s, mientras que al mismo tiempo el tubo gira hacia arriba a una velocidad constante $\omega_2 = 5$ rad/s. Si la bola es impulsada por aire a través del tubo a una velocidad $\dot{r} = 7$ m/s y aceleración $\ddot{r} = 2$ m/s^2, determine su velocidad y aceleración en el instante que se muestra. Ignore el tamaño de la bola.

20-51. En el instante que se muestra, el tubo gira alrededor del eje z con una velocidad angular constante $\omega_1 = 2$ rad/s, mientras que al mismo tiempo el tubo gira hacia arriba a una velocidad constante $\omega_2 = 5$ rad/s. Si la bola es impulsada por aire a través del tubo a una velocidad constante $\dot{r} = 7$ m/s, determine su velocidad y aceleración en el instante que se muestra. Ignore el tamaño de la bola.

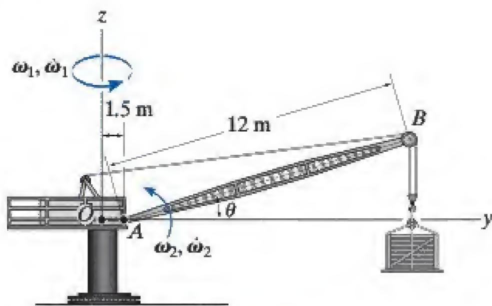


Probs. 20-50/51

***20-52.** En el instante $\theta = 30°$, la estructura de la grúa y la pluma AB giran a una velocidad angular constante de $\omega_1 = 1.5$ rad/s y $\omega_2 = 0.5$ rad/s, respectivamente. Determine la velocidad y aceleración del punto B en este instante.

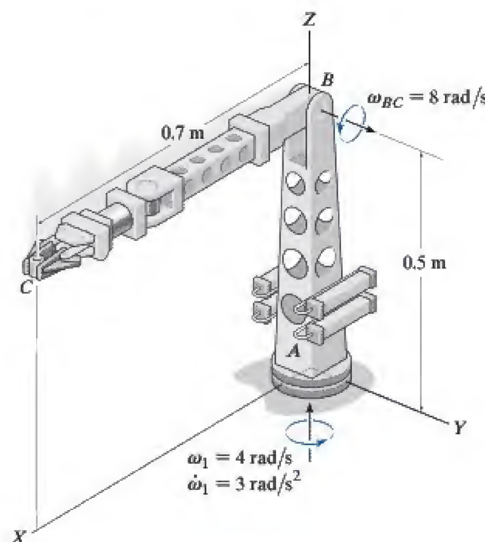
•20-53. En el instante $\theta = 30°$, la estructura de la grúa y la pluma AB giran a una velocidad angular constante de $\omega_1 = 1.5$ rad/s y aceleración angular de $\dot{\omega}_1 = 0.5$ rad/s^2, mientras que la pluma AB gira a una velocidad angular de $\omega_2 = 0.5$ rad/s y aceleración angular de $\dot{\omega}_2 = 0.25$ rad/s^2. Determine la velocidad y aceleración del punto B en este instante.

20



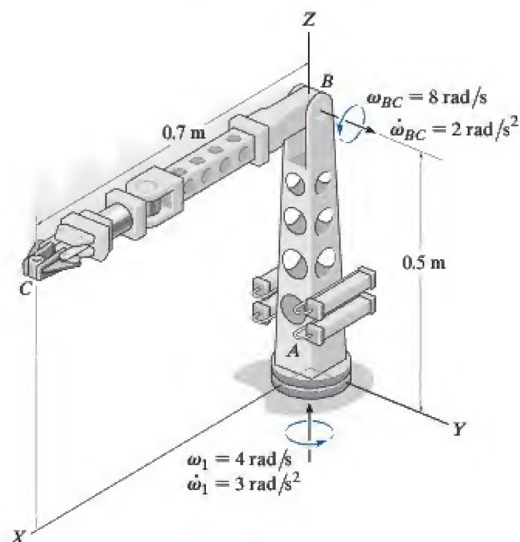
Probs. 20-52/53

20-54. En el instante que se muestra, la base del brazo robótico gira alrededor del eje z con una velocidad angular de $\omega_1 = 4$ rad/s, la cual se incrementa a $\dot{\omega}_1 = 3$ rad/s^2. Además, la pluma BC gira a una velocidad constante de $\omega_{BC} = 8$ rad/s. Determine la velocidad y aceleración de la parte C sujetada en su mordaza en este instante.



Prob. 20-54

20-55. En el instante que se muestra, la base del brazo robótico gira alrededor del eje z con una velocidad angular de $\omega_1 = 4$ rad/s, la cual se está incrementando a $\dot{\omega}_1 = 3$ rad/s^2. También, la pluma BC gira a una velocidad constante de $\omega_{BC} = 8$ rad/s, la cual se incrementa a $\dot{\omega}_{BC} = 2$ rad/s^2. Determine la velocidad y aceleración de la parte C sujetada en su mordaza en este instante.



Prob. 20-55

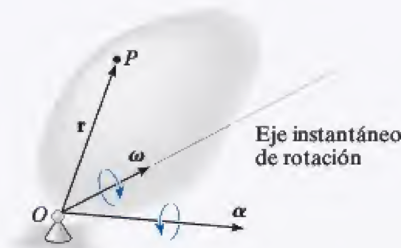
REPASO DEL CAPÍTULO

Rotación alrededor de un punto fijo

Cuando un cuerpo gira alrededor de un punto fijo O, entonces los puntos en el cuerpo siguen una trayectoria que queda en la superficie de una esfera con su centro en O.

Como la aceleración angular es un cambio con respecto al tiempo de la velocidad angular, entonces es necesario tener en cuenta los cambios de magnitud y dirección de $\boldsymbol{\omega}$ cuando se determine su derivada con respecto al tiempo. Para hacer esto, a menudo se especifica la velocidad angular en función de sus movimientos componentes, de modo que la dirección de algunos de estos componentes permanezcan constantes con respecto a ejes rotatorios x, y, z. Si éste es el caso, entonces la derivada con respecto al eje fijo puede determinarse con $\dot{\mathbf{A}} = (\dot{\mathbf{A}})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}$.

Una vez conocidas $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$, entonces pueden determinarse la velocidad y aceleración de cualquier punto P del cuerpo.



$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

Movimiento general

Si el cuerpo experimenta movimiento general, entonces el movimiento de un punto B del cuerpo puede relacionarse con el movimiento de otro punto A mediante un análisis de movimiento relativo, con ejes trasladantes fijos en A.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

Análisis de movimiento relativo por medio de ejes trasladantes y rotatorios

El movimiento de dos puntos A y B de un cuerpo, una serie de cuerpos conectados, o cada punto localizado en dos trayectorias diferentes, puede relacionarse por medio de un análisis de movimiento relativo con ejes rotatorios y trasladantes en A.

Cuando se aplican las ecuaciones para determinar $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{a}_B$, es importante tener en cuenta los cambios de magnitud y dirección de $\mathbf{r}_A$, $(\mathbf{r}_{B/A})_{xyz}$, $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\Omega}_{xyz}$ cuando se consideran sus derivadas con respecto al tiempo para determinar $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{a}_A$, $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$, $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$, $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ y $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{xyz}$. Para hacer esto de manera correcta debemos utilizar la ecuación 20-6.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

20



El diseño de juegos mecánicos requiere un análisis de fuerzas que depende de su movimiento tridimensional.

Cinética tridimensional de un cuerpo rígido

21

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Presentar los métodos de determinar los momentos de inercia y los productos de inercia de un cuerpo con respecto a varios ejes.
- Demostrar cómo se aplican los principios de trabajo y energía, y cantidad de movimiento angular y lineal a un cuerpo rígido que tiene movimiento tridimensional.
- Desarrollar y aplicar las ecuaciones de movimiento en tres dimensiones.
- Estudiar el movimiento giroscópico y sin par de torsión.

*21.1 Momentos y productos de inercia

Cuando se estudió la cinética plana de un cuerpo, fue necesario presentar el momento de inercia I_G, el cual se calculó con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento y que pasa por el centro de masa G. Para el análisis cinético del movimiento tridimensional en ocasiones será necesario calcular seis cantidades inerciales. Estos términos, llamados momentos y productos de inercia, describen en una forma particular la distribución de la masa de un cuerpo con respecto a un sistema de coordenadas proporcionado con su orientación y punto de origen especificados.

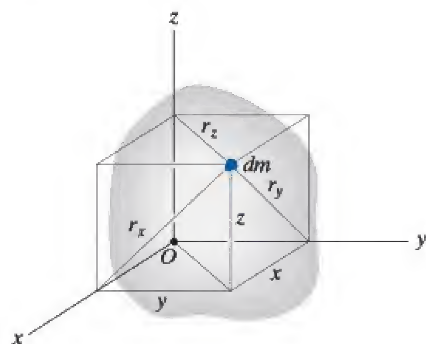


Fig. 21-1

Momento de inercia. Considere el cuerpo rígido que se muestra en la figura 21-1. El *momento de inercia* de un elemento diferencial dm del cuerpo con respecto a cualquiera de los tres ejes de coordenadas se define como el producto de la masa del elemento por el cuadrado de la distancia más corta del eje al elemento. Por ejemplo, como se indica en la figura, $r_x = \sqrt{y^2 + z^2}$, por lo que el momento de inercia de masa del elemento con respecto al eje x es

$$dI_{xx} = r_x^2\, dm = (y^2 + z^2)\, dm$$

El momento de inercia I_{xx} para el cuerpo puede determinarse al integrar esta expresión a lo largo de toda su masa. Por consiguiente, para cada uno de los ejes, podemos escribir

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_m r_x^2\, dm = \int_m (y^2 + z^2)\, dm \\ I_{yy} &= \int_m r_y^2\, dm = \int_m (x^2 + z^2)\, dm \\ I_{zz} &= \int_m r_z^2\, dm = \int_m (x^2 + y^2)\, dm \end{aligned} \qquad (21\text{-}1)$$

Se ve que el momento de inercia *siempre* es *una cantidad positiva*, puesto que es la suma del producto de la masa dm, la cual siempre es positiva y las distancias al cuadrado.

Producto de inercia. El *producto de inercia* de un elemento diferencial dm con respecto a un sistema de *dos planos ortogonales* se define como el producto de la masa del elemento por las distancias perpendiculares (o más cortas) de los planos al elemento. Por ejemplo, esta distancia es x al plano y-z, y y al plano x-z, figura 21-1. Por consiguiente, el producto de inercia dI_{xy} para el elemento es,

$$dI_{xy} = xy\, dm$$

Observe también que $dI_{yx} = dI_{xy}$. Al integrarlos a largo de toda la masa, los productos de inercia del cuerpo con respecto a cada combinación de planos pueden expresarse como

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = \int_m xy\, dm \\ I_{yz} &= I_{zy} = \int_m yz\, dm \\ I_{xz} &= I_{zx} = \int_m xz\, dm \end{aligned} \qquad (21\text{-}2)$$

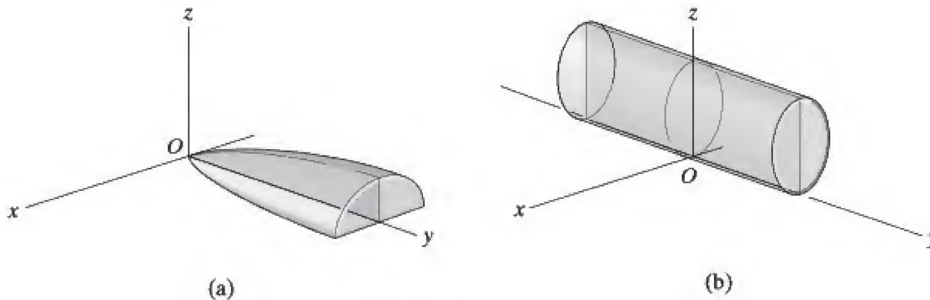


Fig. 21-2

A diferencia del momento de inercia, el cual siempre es positivo, el producto de inercia puede ser positivo, negativo, o cero. El resultado depende de los signos algebraicos de las dos coordenadas definitorias, las cuales varían independientemente una de otra. En particular, si alguno o ambos planos ortogonales son *planos de simetría* para la masa, el *producto de inercia* con respecto a estos planos será *cero*. En esos casos, los elementos de masa ocurrirán en *pares* localizados a cada lado del plano de simetría. En un lado del plano el producto de inercia del elemento será positivo, mientras que en el otro el producto de inercia del elemento correspondiente será negativo, la suma por consiguiente es cero. Ejemplos de esto se muestran en las figuras 21-2. En el primer caso, figura 21-2*a*, el plano *y*-*z* es un plano de simetría y por consiguiente $I_{xy} = I_{xz} = 0$. El cálculo de I_{yz} dará un resultado *positivo*, puesto que todos los elementos de masa se localizan al utilizar sólo coordenadas *y* y *z* positivas. Para el cilindro, con los ejes de coordenadas localizados como se muestra en la figura 21-2*b*, los planos *x*-*z* y *y*-*z* son planos de simetría. Por tanto, $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$.

Ejes paralelos y teoremas de plano paralelo. En la sección 17.1 se describieron las técnicas de integración que se utilizaron para determinar el momento de inercia de un cuerpo. Además se analizaron métodos para determinar el momento de inercia de un cuerpo compuesto, es decir, un cuerpo compuesto de elementos más simples, los cuales aparecen en las tablas de la cubierta posterior interna. En estos dos casos, con frecuencia se utiliza el *teorema de ejes paralelos* en los cálculos. Este teorema, desarrollado en la sección 17.1, nos permite transferir el momento de inercia de un cuerpo de un eje que pasa por su centro de masa *G* a un eje paralelo que pasa por algún otro punto. Si las coordenadas de *G* son x_G, y_G, z_G definidas con respecto a los ejes *x*, *y*, *z*, figura 21-3, entonces las ecuaciones de los ejes paralelos utilizadas para calcular los momentos de inercia con respecto a los ejes *x*, *y*, *z* son

$$
\begin{aligned}
I_{xx} &= (I_{x'x'})_G + m(y_G^2 + z_G^2) \\
I_{yy} &= (I_{y'y'})_G + m(x_G^2 + z_G^2) \\
I_{zz} &= (I_{z'z'})_G + m(x_G^2 + y_G^2)
\end{aligned}
\tag{21-3}
$$

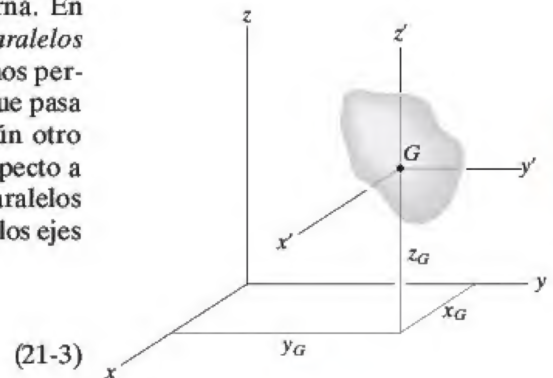


Fig. 21-3

21

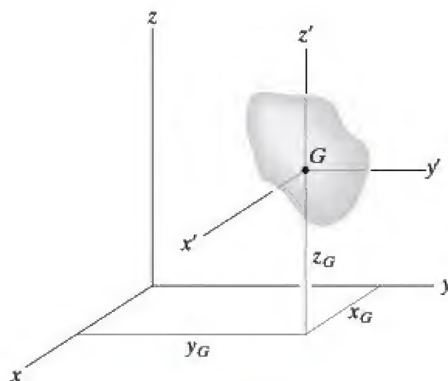


Fig. 21-3 (repetida)

Los productos de inercia de un cuerpo compuesto se calculan de la misma manera que los momentos de inercia de un cuerpo. En este caso, sin embargo, el *teorema del plano paralelo* es importante. Este teorema se utiliza para transferir los productos de inercia del cuerpo con respecto a un sistema de tres planos ortogonales que pasan por el centro de masa del cuerpo a un sistema correspondiente de tres planos paralelos que pasan por algún otro punto O. Al definir las distancias perpendiculares entre los planos como x_G, y_G y z_G, figura 21-3, las ecuaciones del plano paralelo se escriben como

$$\begin{aligned} I_{xy} &= (I_{x'y'})_G + m x_G y_G \\ I_{yz} &= (I_{y'z'})_G + m y_G z_G \\ I_{zx} &= (I_{z'x'})_G + m z_G x_G \end{aligned} \qquad (21\text{-}4)$$

La derivación de estas fórmulas es similar a la de la ecuación de los ejes paralelos, sección 17.1.

Tensor de inercia. Por consiguiente, las propiedades inerciales de un cuerpo están caracterizadas por nueve términos, seis de los cuales son independientes unos de otros. Este conjunto de términos se define por medio de las ecuaciones 21-1 y 21-2 y se escribe como

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Esta matriz se denomina *tensor de inercia.** Tiene un conjunto único de valores para un cuerpo cuando se determina para cada ubicación del origen O y orientación de los ejes de coordenadas.

En general, para el punto O podemos especificar una inclinación única de los ejes con la cual los productos de inercia del cuerpo son cero cuando se calculan con respecto a estos ejes. Al hacerlo así se dice que el tensor de inercia está "diagonalizado" y puede escribirse en la forma simplificada

$$\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$



Las dinámicas del transbordador espacial durante su órbita alrededor de la Tierra se pueden predecir sólo si sus momentos y productos de inercia son conocidos respecto de su centro de masa.

21

En este caso, $I_x = I_{xx}$, $I_y = I_{yy}$ e $I_z = I_{zz}$ son los denominados *momentos de inercia principales* del cuerpo, los cuales se calculan con respecto a los *ejes de inercia principales*. De estos tres momentos principales de inercia, uno será máximo y otro un mínimo del momento de inercia del cuerpo.

*Los signos negativos están aquí como una consecuencia del desarrollo de una cantidad de movimiento angular, ecuaciones 21-10.

La determinación matemática de las direcciones de los ejes de inercia principales no se analizarán aquí (vea el problema 21-20). Sin embargo, hay muchos casos en los cuales los ejes principales se determinan por inspección. Del planteamiento previo se desprende que si los ejes de coordenadas están orientados de modo que *dos* de los tres planos ortogonales que los contienen son planos de *simetría* del cuerpo, entonces todos los productos de inercia del cuerpo son cero con respecto a estos planos de coordenadas, y por consiguiente estos ejes de coordenadas son ejes de inercia principales. Por ejemplo, los ejes x, y, z de la figura 21-2b representan los ejes de inercia principales del cilindro en el punto O.

Momento de inercia con respecto a un eje arbitrario.

Considere el cuerpo que se muestra en la figura 21-4, donde los nueve elementos del tensor de inercia se determinaron con respecto a los ejes x, y, z con su origen en O. En este caso deseamos determinar el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje Oa, cuya dirección está definida por el vector unitario $\mathbf{u}_a$. Por definición $I_{Oa} = \int b^2\,dm$, donde b es la *distancia perpendicular* de dm a Oa. Si la posición de dm se localiza por medio de $\mathbf{r}$, entonces $b = r \operatorname{sen} \theta$, la cual representa la *magnitud* del producto vectorial $\mathbf{u}_a \times \mathbf{r}$. Por consiguiente, el momento de inercia se expresa como

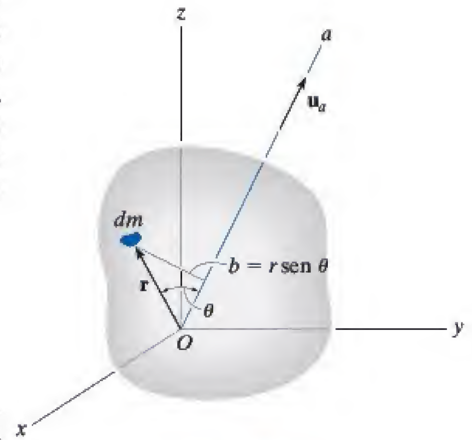


Fig. 21-4

$$I_{Oa} = \int_m |(\mathbf{u}_a \times \mathbf{r})|^2 dm = \int_m (\mathbf{u}_a \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{u}_a \times \mathbf{r}) dm$$

Siempre que $\mathbf{u}_a = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$ y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{u}_a \times \mathbf{r} = (u_y z - u_z y)\mathbf{i} + (u_z x - u_x z)\mathbf{j} + (u_x y - u_y x)\mathbf{k}$. Luego de sustituir y realizar el producto escalar, el momento de inercia es

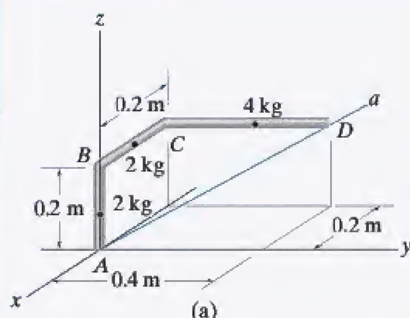
$$\begin{aligned} I_{Oa} &= \int_m [(u_y z - u_z y)^2 + (u_z x - u_x z)^2 + (u_x y - u_y x)^2] dm \\ &= u_x^2 \int_m (y^2 + z^2) dm + u_y^2 \int_m (z^2 + x^2) dm + u_z^2 \int_m (x^2 + y^2)\, dm \\ &\quad - 2u_x u_y \int_m xy\, dm - 2u_y u_z \int_m yz\, dm - 2u_z u_x \int_m zx\, dm \end{aligned}$$

Si reconocemos que las integrales son los momentos y productos de inercia del cuerpo, ecuaciones 21-1 y 21-2, tenemos

$$I_{Oa} = I_{xx}u_x^2 + I_{yy}u_y^2 + I_{zz}u_z^2 - 2I_{xy}u_x u_y - 2I_{yz}u_y u_z - 2I_{zx}u_z u_x \quad (21\text{-}5)$$

Por tanto, si el tensor de inercia se especifica para los ejes x, y, z, el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje inclinado Oa puede determinarse. Para el cálculo, debe determinarse la dirección de los cosenos u_x, u_y, u_z de los ejes. Estos términos especifican los cosenos de los ángulos de dirección de las coordenadas α, β, γ formados entre el eje positivo Oa y los ejes positivos x, y, z, respectivamente (vea el apéndice C).

EJEMPLO 21.1



Determine el momento de inercia de la barra acodada que se ilustra en la figura 21-5*a* con respecto al eje *Aa*. La masa de cada uno de los tres segmentos se proporciona en la figura.

SOLUCIÓN

Antes de aplicar la ecuación 21-5 es necesario determinar primero los momentos y productos de inercia de la barra con respecto a los ejes x, y, z. Esto se hace mediante la fórmula del momento de inercia de una barra delgada, $I = \frac{1}{12}ml^2$ y los teoremas de ejes paralelos y del plano paralelo, ecuaciones 21-3 y 21-4. Al dividir la barra en tres partes y localizar el centro de masa de cada segmento, figura 21-5*b*, tenemos

$$I_{xx} = \left[\tfrac{1}{12}(2)(0.2)^2 + 2(0.1)^2\right] + [0 + 2(0.2)^2] + \left[\tfrac{1}{12}(4)(0.4)^2 + 4((0.2)^2 + (0.2)^2)\right] = 0.480 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{yy} = \left[\tfrac{1}{12}(2)(0.2)^2 + 2(0.1)^2\right] + \left[\tfrac{1}{12}(2)(0.2)^2 + 2((-0.1)^2 + (0.2)^2)\right] + [0 + 4((-0.2)^2 + (0.2)^2)] = 0.453 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{zz} = [0 + 0] + \left[\tfrac{1}{12}(2)(0.2)^2 + 2(-0.1)^2\right] + \left[\tfrac{1}{12}(4)(0.4)^2 + 4((-0.2)^2 + (0.2)^2)\right] = 0.400 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{xy} = [0 + 0] + [0 + 0] + [0 + 4(-0.2)(0.2)] = -0.160 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{yz} = [0 + 0] + [0 + 0] + [0 + 4(0.2)(0.2)] = 0.160 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{zx} = [0 + 0] + [0 + 2(0.2)(-0.1)] + [0 + 4(0.2)(-0.2)] = -0.200 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

El eje *Aa* se define por medio del vector unitario

$$\mathbf{u}_{Aa} = \frac{\mathbf{r}_D}{r_D} = \frac{-0.2\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j} + 0.2\mathbf{k}}{\sqrt{(-0.2)^2 + (0.4)^2 + (0.2)^2}} = -0.408\mathbf{i} + 0.816\mathbf{j} + 0.408\mathbf{k}$$

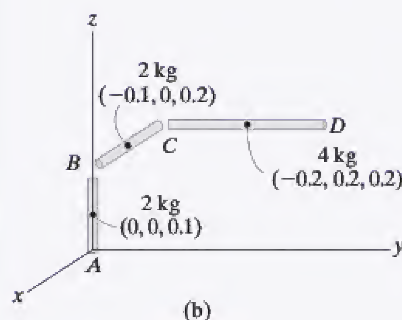


Fig. 21-5

Por tanto,

$$u_x = -0.408 \qquad u_y = 0.816 \qquad u_z = 0.408$$

Si sustituimos estos resultados en la ecuación 21-5, obtenemos

$$\begin{aligned} I_{Aa} &= I_{xx}u_x^2 + I_{yy}u_y^2 + I_{zz}u_z^2 - 2I_{xy}u_xu_y - 2I_{yz}u_yu_z - 2I_{zx}u_zu_x \\ &= 0.480(-0.408)^2 + (0.453)(0.816)^2 + 0.400(0.408)^2 \\ &\quad - 2(-0.160)(-0.408)(0.816) - 2(0.160)(0.816)(0.408) \\ &\quad - 2(-0.200)(0.408)(-0.408) \\ &= 0.169 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \end{aligned}$$

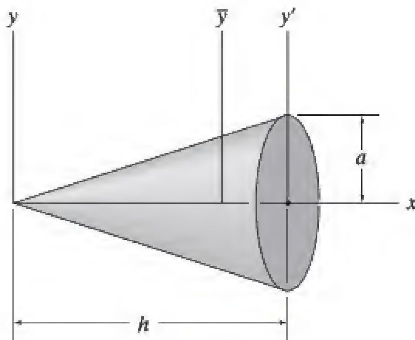
Resp.

21

PROBLEMAS

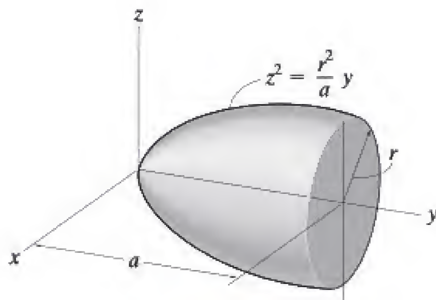
•**21-1.** Demuestre que la suma de los momentos de inercia de un cuerpo, $I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}$, es independiente de la orientación de los ejes x, y, z y que por tanto depende de la ubicación de su origen.

21-2. Determine el momento de inercia del cono con respecto a un eje vertical $\bar{y}$ que pasa por el centro de masa del cono. ¿Cuál es el momento de inercia con respecto a un eje paralelo y' que pasa a través del diámetro de la base del cono? La masa del cono es m.



Prob. 21-2

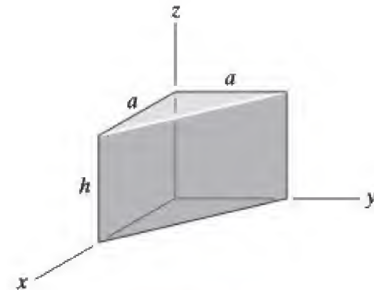
21-3. Determine los momentos de inercia I_x e I_y del paraboloide de revolución. La masa del paraboloide es m.



Prob. 21-3

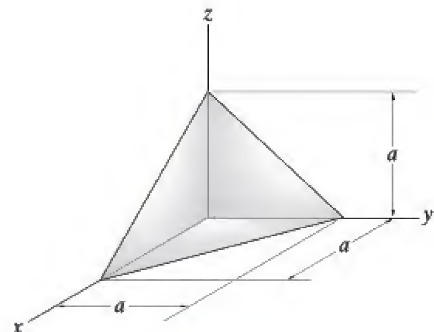
*__21-4.__ Determine por integración directa el producto de inercia I_{yz} del prisma homogéneo. La densidad del material es ρ. Exprese el resultado en función de la masa total m del prisma.

•**21-5.** Determine por integración directa el producto de inercia I_{xy} del prisma homogéneo. La densidad del material es ρ. Exprese el resultado en función de la masa total m del prisma.



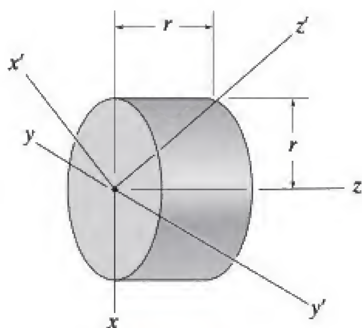
Probs. 21-4/5

21-6. Determine el producto de inercia I_{xy} del tetraedro homogéneo. La densidad del material es ρ. Exprese el resultado en función de la masa total m del sólido. *Sugerencia:* use un elemento triangular de espesor dz y luego exprese dI_{xy} en función del tamaño y masa del elemento con el resultado del problema 21-5.



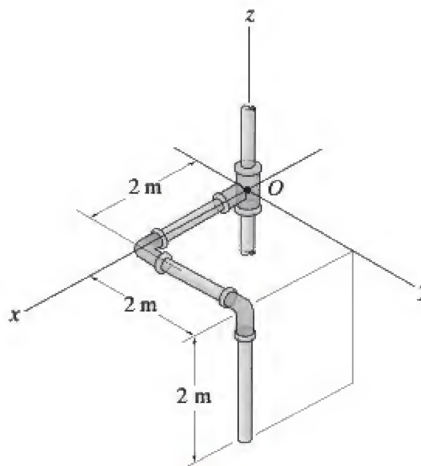
Prob. 21-6

21-7. Determine los momentos de inercia del cilindro homogéneo de masa m con respecto a los ejes x', y', z'.



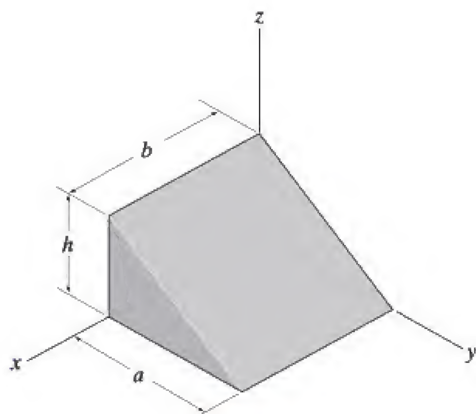
Prob. 21-7

•21-9. La barra delgada tiene una masa por unidad de longitud de 6 kg/m. Determine los momentos y productos de inercia con respecto a los ejes x, y, z.



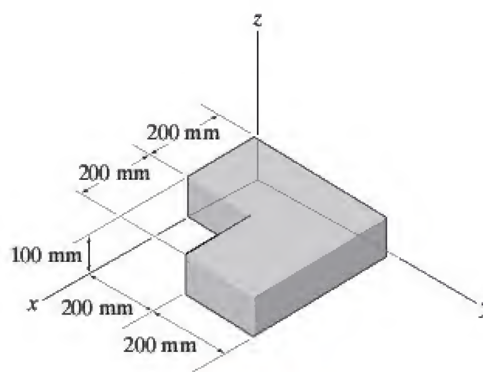
Prob. 21-9

***21-8.** Determine el producto de inercia I_{xy} del bloque triangular homogéneo. La densidad del material es ρ. Exprese el resultado en función de la masa total m del bloque.



Prob. 21-8

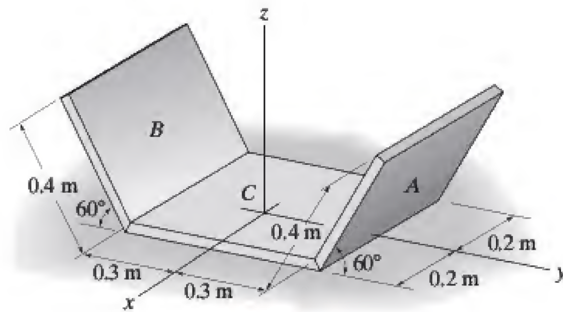
21-10. Determine los productos, I_{xy}, I_{yz} e I_{xz} del sólido homogéneo. La densidad del material es de 7.85 Mg/m^3.



Prob. 21-10

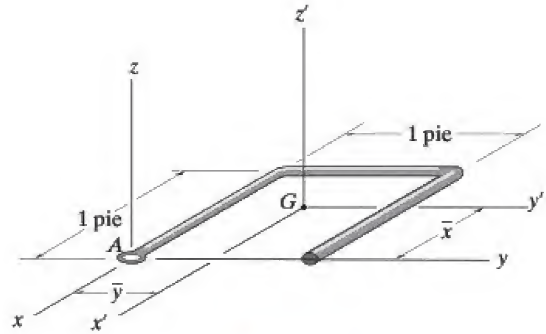
21

21-11. El ensamble se compone de dos placas delgadas A y B las cuales tienen una masa de 3 kg cada una y una placa delgada C la cual tiene una masa de 4.5 kg. Determine los momentos de inercia I_x, I_y e I_z.



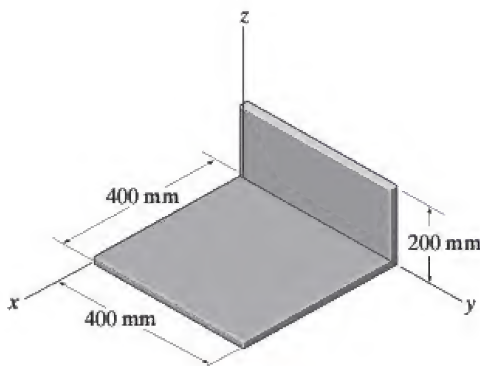
Prob. 21-11

•**21-13.** La barra acodada pesa 1.5 lb/pie. Localice el centro de gravedad $G(\bar{x}, \bar{y})$ y determine los momentos de inercia principales $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{z'}$ de la barra con respecto a los ejes x', y', z'.



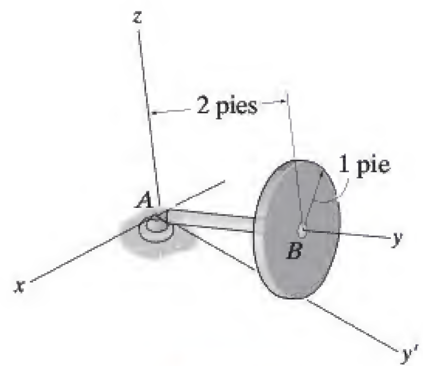
Prob. 21-13

*__21-12.__ Determine los productos de inercia I_{xy}, I_{yz} e I_{xz} de la placa delgada. La densidad del material por unidad de área es de 50 kg/m^2.



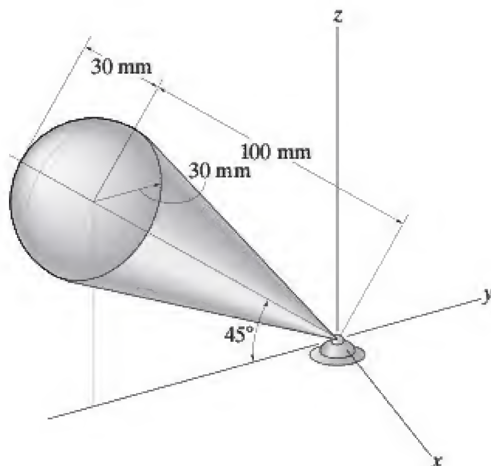
Prob. 21-12

21-14. El ensamble se compone de una barra delgada de 10 lb y un disco circular delgado de 30 lb. Determine su momento de inercia con respecto al eje y'.



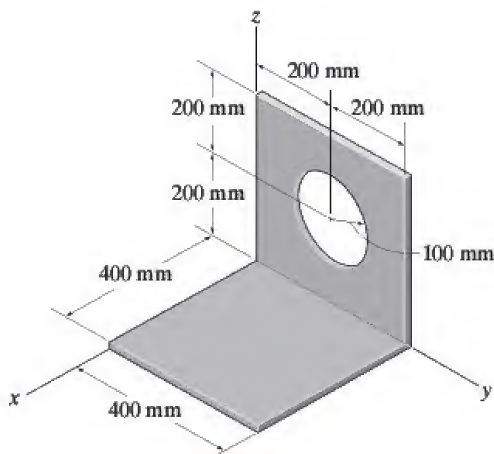
Prob. 21-14

21-15. El giróscopo se compone de un cono de 0.7 kg de masa y una semiesfera de 0.2 kg de masa. Determine el momento de inercia I_z cuando el trompo está en la posición que se muestra.



Prob. 21-15

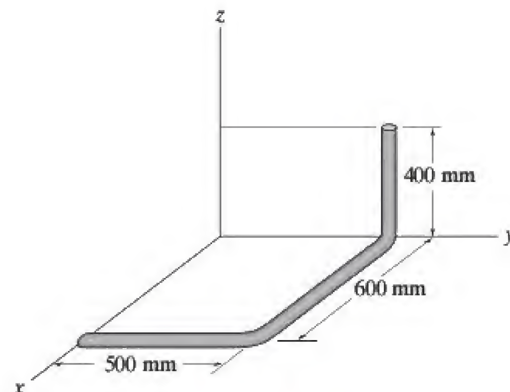
*21-16. Determine los productos de inercia I_{xy}, I_{yz} e I_{xz} de la placa delgada. La masa del material por unidad de área es de 50 kg/m^2.



Prob. 21-16

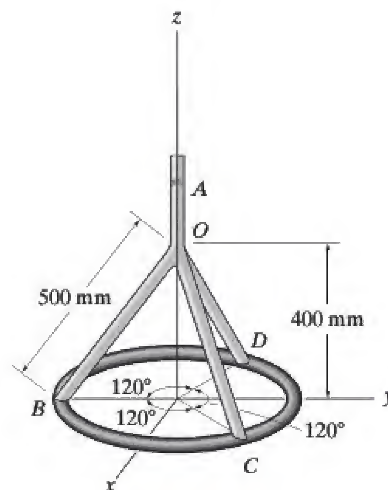
•21-17. Determine el producto de inercia I_{xy} de la barra acodada. Su masa por unidad de longitud es de 2 kg/m.

21-18. Determine los momentos de inercia I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} de la barra acodada. Su masa por unidad de longitud es de 2 kg/m.



Probs. 21-17/18

21-19. Determine el momento de inercia del ensamble de barras y anillo con respecto al eje z. La masa de las barras y el anillo por unidad de longitud es de 2 kg/m.



Prob. 21-19

21

21.2 Cantidad de movimiento angular

En esta sección desarrollaremos las ecuaciones necesarias que se usaron para determinar la cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido con respecto a un punto arbitrario. Estas ecuaciones permitirán desarrollar tanto el principio de impulso y cantidad de movimiento como las ecuaciones de movimiento de rotación de un cuerpo rígido.

Considere el cuerpo rígido que se muestra en la figura 21-6, el cual tiene una masa m y centro de gravedad en G. El sistema de coordenadas X, Y, Z representa un marco de referencia inercial, y por tanto, sus ejes están fijos o se trasladan a una velocidad constante. La cantidad de movimiento angular medida a partir de esta referencia se determinará con respecto al punto arbitrario A. Los vectores de posición $\mathbf{r}_A$ y $\boldsymbol{\rho}_A$ se trazan del origen de las coordenadas al punto A y de éste a la partícula $i$ésima del cuerpo. Si la masa de la partícula es m_i, la cantidad de movimiento angular con respecto al punto A es

$$(\mathbf{H}_A)_i = \boldsymbol{\rho}_A \times m_i \mathbf{v}_i$$

donde $\mathbf{v}_i$ representa la velocidad de la partícula medida a partir del sistema de coordenadas X, Y, Z. Si la velocidad angular del cuerpo es $\boldsymbol{\omega}$ en el instante considerado, $\mathbf{v}_i$ puede relacionarse con la velocidad de A aplicando la ecuación 20-7, es decir,

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A$$

Por tanto,

$$(\mathbf{H}_A)_i = \boldsymbol{\rho}_A \times m_i(\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A)$$
$$= (\boldsymbol{\rho}_A m_i) \times \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\rho}_A \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) m_i$$

La suma de los momentos de todas las partículas del cuerpo requiere una integración. Puesto que $m_i \rightarrow dm$, tenemos

$$\mathbf{H}_A = \left(\int_m \boldsymbol{\rho}_A dm\right) \times \mathbf{v}_A + \int_m \boldsymbol{\rho}_A \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) dm \qquad (21\text{-}6)$$

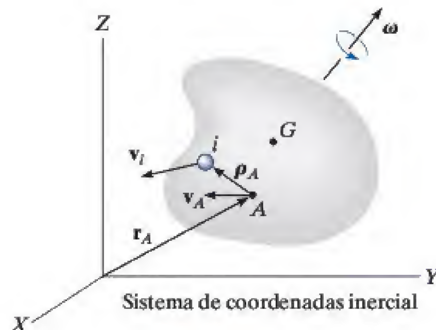


Fig. 21-6

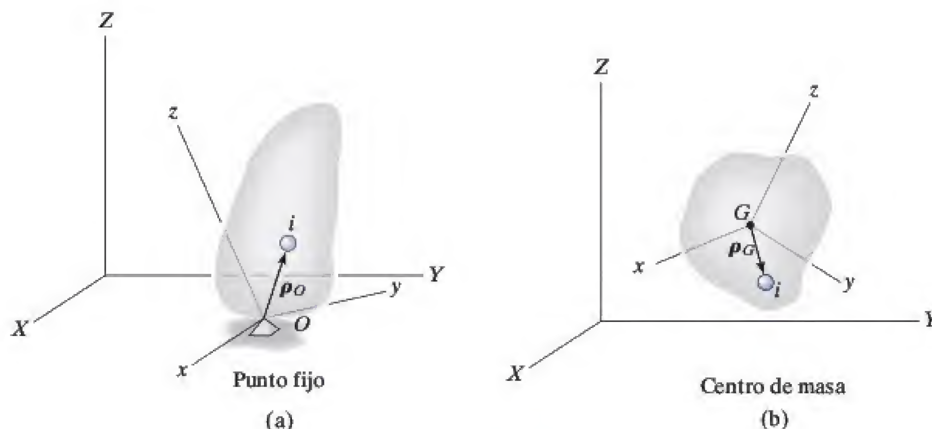


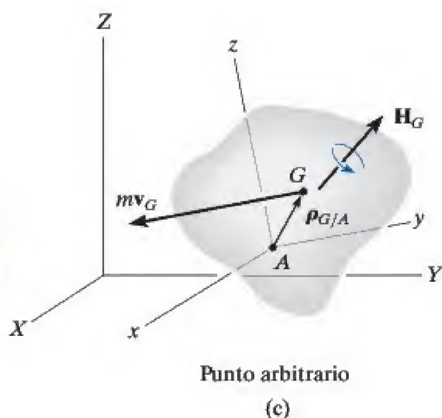
Fig. 21-7

Punto fijo O. Si A llega a ser un *punto fijo O* en el cuerpo, figura 21-7a, entonces $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$ y la ecuación 21-6 se reduce a

$$\mathbf{H}_O = \int_m \boldsymbol{\rho}_O \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_O)\, dm \tag{21-7}$$

Centro de masa G. Si A está en el *centro de masa G* del cuerpo, figura 21-7b, entonces $\int_m \boldsymbol{\rho}_A\, dm = \mathbf{0}$ y

$$\mathbf{H}_G = \int_m \boldsymbol{\rho}_G \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_G)\, dm \tag{21-8}$$



Punto arbitrario
(c)

Punto arbitrario A. En general, A puede ser un punto diferente de O o G, figura 21-7c en cuyo caso, la ecuación 21-6 puede, sin embargo, simplificarse a la siguiente forma (vea el problema 21-21).

$$\mathbf{H}_A = \boldsymbol{\rho}_{G/A} \times m\mathbf{v}_G + \mathbf{H}_G \tag{21-9}$$

Aquí la cantidad de movimiento angular se compone de dos partes —el momento de la cantidad de movimiento lineal $m\mathbf{v}_G$ del cuerpo con respecto al punto A sumado (vectorialmente) a la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$. También puede utilizarse la ecuación 21-9 para determinar la cantidad de movimiento angular del cuerpo con respecto a un punto fijo O. Los resultados, desde luego, serán los mismos que se determinaron con la ecuación 21-7 más conveniente.

Componentes rectangulares de H. Para un uso práctico de las ecuaciones 21-7 a 21-9, la cantidad de movimiento angular debe expresarse en función de sus componentes escalares. Para este propó-

sito, es conveniente seleccionar un segundo sistema de ejes x, y, z con una orientación arbitraria con respecto a los ejes X, Y, Z, figura 21-7, y para una formulación general, observe que las ecuaciones 21-7 y 21-8 son de la forma

$$\mathbf{H} = \int_m \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})dm$$

Al expresar $\mathbf{H}$, $\boldsymbol{\rho}$ y $\boldsymbol{\omega}$ en función de componentes x, y, z, tenemos

$$H_x\mathbf{i} + H_y\mathbf{j} + H_z\mathbf{k} = \int_m (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times [(\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}) \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})]dm$$

Si expandimos los productos vectoriales y combinamos los términos obtenemos

$$\begin{aligned} H_x\mathbf{i} + H_y\mathbf{j} + H_z\mathbf{k} = &\left[\omega_x \int_m (y^2 + z^2)dm - \omega_y \int_m xy\,dm - \omega_z \int_m xz\,dm\right]\mathbf{i} \\ &+ \left[-\omega_x \int_m xy\,dm + \omega_y \int_m (x^2 + z^2)dm - \omega_z \int_m yz\,dm\right]\mathbf{j} \\ &+ \left[-\omega_x \int_m zx\,dm - \omega_y \int_m yz\,dm + \omega_z \int_m (x^2 + y^2)dm\right]\mathbf{k} \end{aligned}$$

Al igualar las componentes $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ respectivas y reconocer que las integrales representan los momentos y productos de inercia, obtenemos

$$\begin{aligned} H_x &= I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ H_y &= -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ H_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned} \qquad (21\text{-}10)$$

Estas ecuaciones pueden simplificarse aún más si los ejes de coordenadas x, y, z están orientados de modo que lleguen a ser los *ejes de inercia principales* del cuerpo en el punto. Cuando se utilizan estos ejes, los productos de inercia $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$, y si los momentos de inercia principales con respecto a los ejes x, y, z se representan como $I_x = I_{xx}$, $I_y = I_{yy}$ e $I_z = I_{zz}$, las tres componentes de cantidad de movimiento angular son

$$H_x = I_x\omega_x \qquad H_y = I_y\omega_y \qquad H_z = I_z\omega_z \qquad (21\text{-}11)$$

21



El movimiento del astronauta se controla por medio de pequeños cohetes direccionales propulsores montados en su traje espacial. Los impulsos que estos cohetes proporcionan deben ser especificados con cuidado para evitar el movimiento descontrolado y la pérdida de orientación.

Principio de impulso y cantidad de movimiento. Ahora que ya se desarrolló la formulación de la cantidad de movimiento angular de un cuerpo, el *principio de impulso y cantidad de movimiento*, estudiado en la sección 19.2, puede usarse para resolver problemas cinéticos que implican *fuerza, velocidad y tiempo*. En este caso, las dos siguientes ecuaciones vectoriales están disponibles:

$$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m(\mathbf{v}_G)_2 \qquad (21\text{-}12)$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2 \qquad (21\text{-}13)$$

En tres dimensiones cada término vectorial puede ser representado por tres componentes escalares, y por consiguiente puede escribirse un total de *seis ecuaciones escalares*. Tres ecuaciones relacionan el impulso y cantidad de movimiento lineales en las direcciones x, y, z, y las otras tres relacionan el impulso y cantidad de movimiento angulares del cuerpo con respecto a los ejes x, y, z. Antes de aplicar las ecuaciones 21-12 y 21-13 a la solución de problemas, deberá repasarse el material de las secciones 19.2 y 19.3.

21.3 Energía cinética

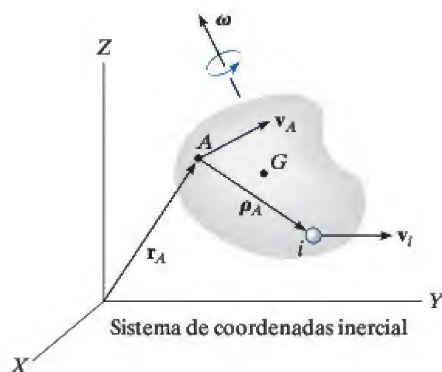


Fig. 21-8

Para aplicar el principio de trabajo y energía en la solución de problemas que implican el movimiento general de un cuerpo rígido, primero es necesario formular expresiones para la energía cinética del cuerpo. Para esto, considere el cuerpo rígido que se muestra en la figura 21-8, el cual tiene una masa m y centro de masa en G. La energía cinética de la partícula $i$ésima del cuerpo tiene una masa m_i velocidad $\mathbf{v}_i$, medidas con respecto al marco de referencia inercial X, Y, Z, es

$$T_i = \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i)$$

Siempre que se conozca la velocidad de un punto arbitrario A en el cuerpo, $\mathbf{v}_i$ puede relacionarse con $\mathbf{v}_A$ con la ecuación $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A$, donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del cuerpo, medido con respecto al sistema de coordenadas X, Y, Z, y $\boldsymbol{\rho}_A$ es un vector de posición que se extiende de A a i. Con esta expresión, la energía cinética de la partícula se escribe como

$$T_i = \tfrac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) \cdot (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A) m_i + \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) m_i + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) m_i$$

La energía cinética de todo el cuerpo se obtiene al sumar las energías cinéticas de todas las partículas del cuerpo. Esto requiere una integración. Como $m_i \rightarrow dm$, obtenemos

$$T = \tfrac{1}{2} m (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_A \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \int_m \boldsymbol{\rho}_A\, dm \right) + \tfrac{1}{2} \int_m (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A)\, dm$$

El último término del lado derecho puede reescribirse mediante la identidad vectorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, donde $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{b} = \boldsymbol{\rho}_A$, y $\mathbf{c} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A$. El resultado final es

$$T = \tfrac{1}{2}m(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_A \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \int_m \boldsymbol{\rho}_A\, dm\right) + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \int_m \boldsymbol{\rho}_A \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) dm \qquad (21\text{-}14)$$

Esta ecuación rara vez se utiliza porque los cálculos implican integrales. Se simplifica, no obstante, si el punto de referencia A es o bien un punto fijo o el centro de masa.

Punto fijo O. Si A es un *punto fijo O* en el cuerpo, figura 21-7*a*, entonces $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$, y con la ecuación 21-7 podemos expresar la ecuación 21-14 como

$$T = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_O$$

Si los ejes x, y, z representan los ejes principales de inercia del cuerpo, entonces $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$ y $\mathbf{H}_O = I_x\omega_x\mathbf{i} + I_y\omega_y\mathbf{j} + I_z\omega_z\mathbf{k}$. Al sustituir en la ecuación anterior y realizar las operaciones de producto vectorial se obtiene

$$T = \tfrac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \tfrac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \tfrac{1}{2}I_z\omega_z^2 \qquad (21\text{-}15)$$

Centro de masa G. Si A se ubica en el *centro de masa G* del cuerpo, figura 21-7*b*, entonces $\int \boldsymbol{\rho}_A\, dm = \mathbf{0}$ y, con la ecuación 21-8, podemos escribir la ecuación 21-14 como

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_G$$

Del mismo modo que con un punto fijo, el último término del lado derecho puede representarse en forma escalar, en cuyo caso

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \tfrac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \tfrac{1}{2}I_z\omega_z^2 \qquad (21\text{-}16)$$

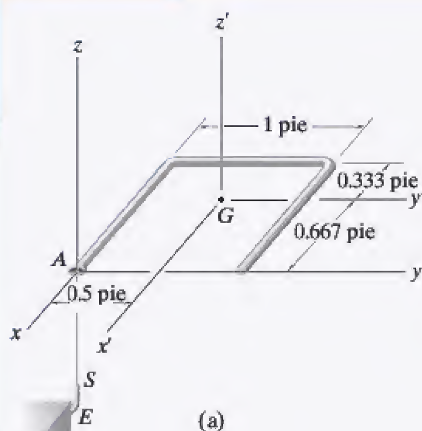
Se ve que la energía cinética consta de dos partes; a saber, la energía cinética de traslación del centro de masa, $\tfrac{1}{2}mv_G^2$, y la energía cinética de rotación del cuerpo.

Principio de trabajo y energía. Una vez formulada la energía cinética de un cuerpo, puede aplicarse el *principio de trabajo y energía* para resolver problemas cinéticos que implican *fuerza, velocidad y desplazamiento*. En este caso sólo puede escribirse una ecuación escalar para cada cuerpo, a saber,

$$T_1 + \Sigma U_{1\text{-}2} = T_2 \qquad (21\text{-}17)$$

Antes de aplicar esta ecuación, es recomendable repasar el material del capítulo 18.

EJEMPLO 21.2



La barra de la figura 21-9*a* tiene un peso por unidad de longitud de 1.5 lb/pie. Determine su velocidad angular justo después de que el extremo *A* cae sobre el gancho en *E*. Éste funciona como una conexión permanente para la barra debido a su mecanismo de cerrojo de resorte *S*. Justo antes de chocar con el gancho, la barra cae con una velocidad de $(v_G)_1 = 10$ pies/s.

SOLUCIÓN

Se utilizará el principio de impulso y cantidad de movimiento puesto que se trata de un impacto.

Diagramas de impulso y cantidad de movimiento. Figura 21-9*b*. Durante el corto tiempo Δt, la fuerza impulsora **F** que actúa en *A* cambia la cantidad de movimiento de la barra. (El impulso creado por el peso de la barra **W** durante este tiempo es mínimo comparado con $\int \mathbf{F}\,dt$, de modo que puede omitirse, es decir, el peso es una fuerza no impulsora.) Por consiguiente, la cantidad de movimiento de la barra se *conserva* con respecto al punto *A* puesto que el momento de $\int \mathbf{F}\,dt$ con respecto a *A* es cero.

Conservación de la cantidad de movimiento angular. La ecuación 21-9 debe utilizarse para determinar la cantidad de movimiento angular de la barra, puesto que *A* no llega a ser un *punto fijo* hasta *después* de la interacción impulsora con el gancho. Por tanto, con referencia a la figura 21-9*b*, $(\mathbf{H}_A)_1 = (\mathbf{H}_A)_2$ o

$$\mathbf{r}_{G/A} \times m(\mathbf{v}_G)_1 = \mathbf{r}_{G/A} \times m(\mathbf{v}_G)_2 + (\mathbf{H}_G)_2 \qquad (1)$$

Según la figura 21-9*a*, $\mathbf{r}_{G/A} = \{-0.667\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j}\}$ pies. Además, los ejes primos son ejes principales de inercia para la barra porque $I_{x'y'} = I_{x'z'} = I_{z'y'} = 0$. Por consiguiente, de acuerdo con las ecuaciones 21-11, $(\mathbf{H}_G)_2 = I_{x'}\omega_x\mathbf{i} + I_{y'}\omega_y\mathbf{j} + I_{z'}\omega_z\mathbf{k}$. Los momentos de inercia principales son $I_{x'} = 0.0272\,\text{slug}\cdot\text{pie}^2$, $I_{y'} = 0.0155\,\text{slug}\cdot\text{pie}^2$, $I_{z'} = 0.0427\,\text{slug}\cdot\text{pie}^2$ (vea el problema 21-13). Si sustituimos en la ecuación 1, tenemos

$$(-0.667\mathbf{i}+0.5\mathbf{j})\times\left[\left(\frac{4.5}{32.2}\right)(-10\mathbf{k})\right]=(-0.667\mathbf{i}+0.5\mathbf{j})\times\left[\left(\frac{4.5}{32.2}\right)(-v_G)_2\mathbf{k}\right]$$
$$+\ 0.0272\omega_x\mathbf{i} + 0.0155\omega_y\mathbf{j} + 0.0427\omega_z\mathbf{k}$$

Al expandir e igualar las componentes **i**, **j**, **k** respectivas obtenemos

$$-0.699 = -0.0699(v_G)_2 + 0.0272\omega_x \qquad (2)$$
$$-0.932 = -0.0932(v_G)_2 + 0.0155\omega_y \qquad (3)$$
$$0 = 0.0427\omega_z \qquad (4)$$

Cinemática. Hay cuatro incógnitas en las ecuaciones anteriores; sin embargo, puede obtenerse otra ecuación al relacionar $\boldsymbol{\omega}$ con $(\mathbf{v}_G)_2$ por *cinemática*. Como $\omega_z = 0$ (ecuación 4) y después del impacto la barra gira alrededor del punto fijo *A*, puede aplicarse la ecuación 20-3, en cuyo caso $(\mathbf{v}_G)_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{G/A}$, o

$$-(v_G)_2\mathbf{k} = (\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j}) \times (-0.667\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j})$$
$$-(v_G)_2 = 0.5\omega_x + 0.667\omega_y \qquad (5)$$

Si resolvemos las ecuaciones 2, 3 y 5 simultáneamente, obtenemos

$(\mathbf{v}_G)_2 = \{-8.41\mathbf{k}\}$ pie/s $\qquad \boldsymbol{\omega} = \{-4.09\mathbf{i} - 9.55\mathbf{j}\}$ rad/s **Resp.**

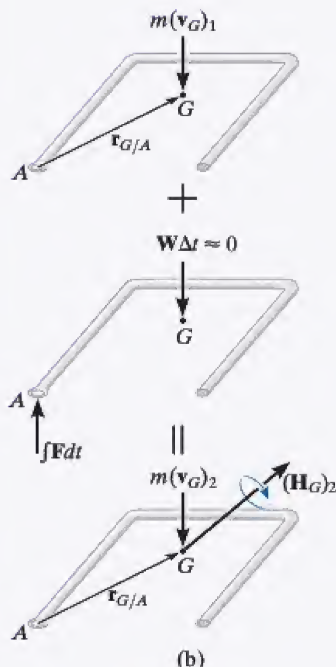


Fig. 21-9

EJEMPLO 21.3

Se aplica un par de torsión de 5 N · m a la flecha vertical *CD* que se muestra en la figura 21-10*a*, la cual permite que el engrane *A* de 10 kg gire libremente alrededor de *CE*. Suponga que el engrane *A* comienza a girar a partir del reposo, determine la velocidad angular de *CD* después de que ha realizado dos revoluciones. Ignore la masa de la flecha *CD* y el eje *CE* y suponga que el engrane *A* puede ser representado de forma aproximada por un disco delgado. El engrane *B* está fijo.

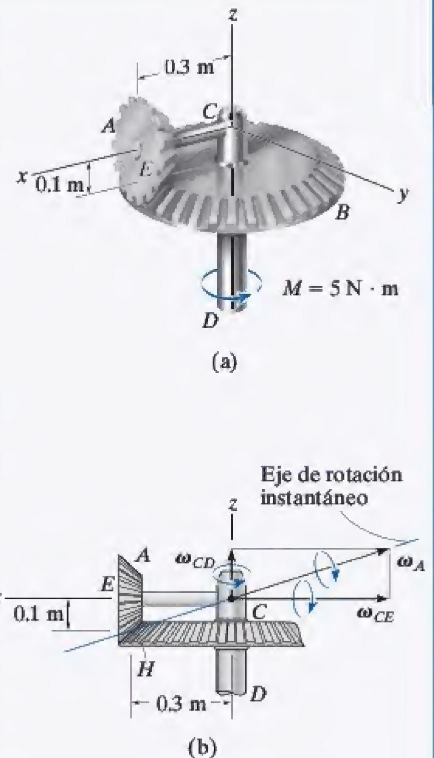


Fig. 21-10

SOLUCIÓN

Para la solución puede utilizarse el principio de trabajo y energía. ¿Por qué?

Trabajo. Si la flecha *CD*, el eje *CE* y el engrane *A* se consideran como un sistema de cuerpos conectados, sólo el par de torsión aplicado **M** realiza trabajo. Con dos revoluciones de *CD*, este trabajo es $\Sigma U_{1-2} = (5\text{ N}\cdot\text{m})(4\pi\text{ rad}) = 62.83\text{ J}$.

Energía cinética. Como inicialmente el engrane está en reposo, su energía cinética inicial es cero. En la figura 21-10*b* se muestra un diagrama cinemático del engrane. Si la velocidad angular de *CD* se considera como $\boldsymbol{\omega}_{CD}$, entonces la velocidad angular del engrane *A* es $\boldsymbol{\omega}_A = \boldsymbol{\omega}_{CD} + \boldsymbol{\omega}_{CE}$. El engrane puede considerarse como una parte de un cuerpo extendido sin masa el cual gira respecto del *punto fijo C*. El eje instantáneo de rotación de este cuerpo está a lo largo de la línea *CH*, porque los puntos *C* y *H* en el cuerpo (engrane) tienen una velocidad cero y por consiguiente deben quedar en este eje. Esto requiere que los componentes $\boldsymbol{\omega}_{CD}$ y $\boldsymbol{\omega}_{CE}$ se relacionen por medio de la ecuación $\omega_{CD}/0.1\text{ m} = \omega_{CE}/0.3\text{ m}$ o $\omega_{CE} = 3\omega_{CD}$. Por tanto,

$$\boldsymbol{\omega}_A = -\omega_{CE}\mathbf{i} + \omega_{CD}\mathbf{k} = -3\omega_{CD}\mathbf{i} + \omega_{CD}\mathbf{k} \qquad (1)$$

Los ejes *x*, *y*, *z* en la figura 21-10*a* representan *ejes de inercia principales* en *C* para el engrane. Como el punto *C* es un punto de rotación fijo, puede aplicarse la ecuación 21-15 para determinar la energía cinética, es decir,

$$T = \tfrac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \tfrac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \tfrac{1}{2}I_z\omega_z^2 \qquad (2)$$

Al utilizar el teorema de ejes paralelos, los momentos de inercia del engrane con respecto al punto *C* son como sigue:

$$I_x = \tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(0.1\text{ m})^2 = 0.05\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_y = I_z = \tfrac{1}{4}(10\text{ kg})(0.1\text{ m})^2 + 10\text{ kg}(0.3\text{ m})^2 = 0.925\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Como $\omega_x = -3\omega_{CD}$, $\omega_y = 0$, $\omega_z = \omega_{CD}$, la ecuación 2 se vuelve

$$T_A = \tfrac{1}{2}(0.05)(-3\omega_{CD})^2 + 0 + \tfrac{1}{2}(0.925)(\omega_{CD})^2 = 0.6875\omega_{CD}^2$$

Principio de trabajo y energía. Aplicamos el principio de trabajo y energía, y obtenemos

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$0 + 62.83 = 0.6875\omega_{CD}^2$$

$$\omega_{CD} = 9.56\text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

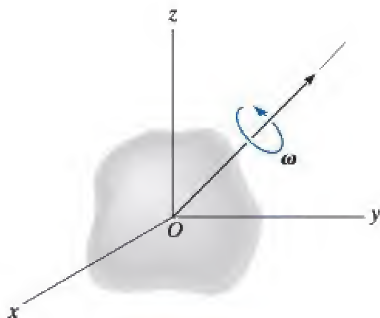
21

PROBLEMAS

***21-20.** Si el cuerpo *no contiene planos de simetría*, los momentos de inercia principales pueden determinarse matemáticamente. Para demostrar cómo se hace esto, considere el cuerpo rígido el cual gira con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, dirigida a lo largo de uno de sus ejes de inercia principales. Si el momento de inercia principal con respecto a este eje es I, la cantidad de movimiento angular puede expresarse como $\mathbf{H} = I\boldsymbol{\omega} = I\omega_x\mathbf{i} + I\omega_y\mathbf{j} + I\omega_z\mathbf{k}$. Las componentes de $\mathbf{H}$ también pueden expresarse por medio de las ecuaciones 21-10, donde se supone que el tensor de inercia es conocido. Ponga en la ecuación las componentes $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ de ambas expresiones para $\mathbf{H}$ y considere que ω_x, ω_y, ω_z son incógnitas. La solución de estas tres ecuaciones se obtiene siempre que el determinante de los coeficientes sea cero. Demuestre que este determinante, cuando se expande, resulta en la ecuación cúbica

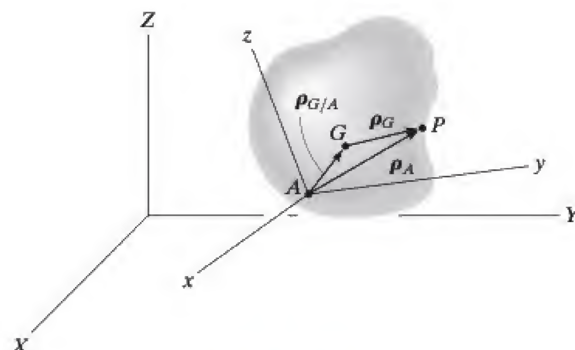
$$
\begin{aligned}
&I^3 - (I_{xx} + I_{yy} + I_{zz})I^2 \\
&\quad + (I_{xx}I_{yy} + I_{yy}I_{zz} + I_{zz}I_{xx} - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2)I \\
&\qquad - (I_{xx}I_{yy}I_{zz} - 2I_{xy}I_{yz}I_{zx} - I_{xx}I_{yz}^2 \\
&\qquad - I_{yy}I_{zx}^2 - I_{zz}I_{xy}^2) = 0
\end{aligned}
$$

Las tres raíces positivas de I, obtenidas con la solución de esta ecuación, representan los momentos de inercia principales I_x, I_y e I_z.



Prob. 21-20

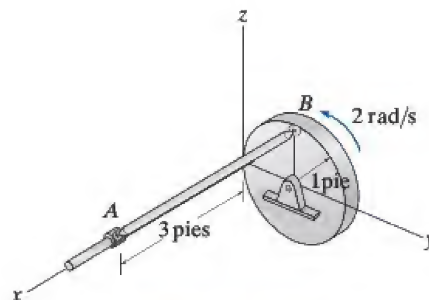
•21-21. Demuestre que si la cantidad de movimiento angular de un cuerpo se determina con respecto a un punto arbitrario A, entonces $\mathbf{H}_A$ puede expresarse por medio de la ecuación 21-9. Esto requiere sustituir $\boldsymbol{\rho}_A = \boldsymbol{\rho}_G + \boldsymbol{\rho}_{G/A}$ en la ecuación 21-6 y expandir, habida cuenta que $\int \boldsymbol{\rho}_G \, dm = \mathbf{0}$ por definición del centro de masa y $\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_{G/A}$.



Prob. 21-21

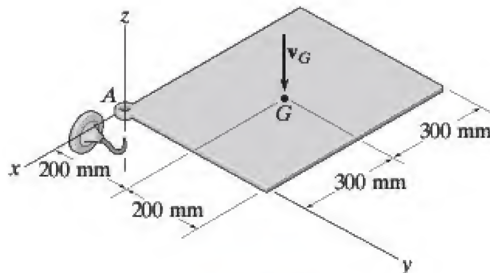
21-22. La barra AB de 4 lb está conectada al disco y collarín por medio de articulaciones de rótula. Si el disco tiene una velocidad constante de 2 rad/s, determine la energía cinética de la barra cuando está en la posición que se muestra. Suponga que la dirección de la velocidad angular de la barra es perpendicular a su eje.

21-23. Determine la cantidad de movimiento angular de la barra AB que se ilustra en el problema 21-22 con respecto a su centro de masa en el instante mostrado. Suponga que la dirección de su velocidad angular es perpendicular a su eje.



Probs. 21-22/23

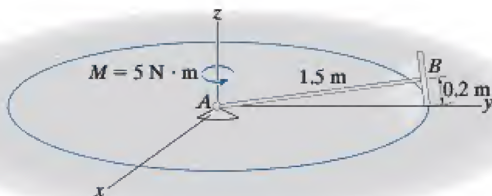
***21-24.** La placa uniforme delgada tiene una masa de 15 kg. Justo antes de que la esquina A choque con el gancho, está en descenso a una velocidad de $\mathbf{v}_G = \{-5\mathbf{k}\}$ m/s sin movimiento de rotación. Determine la velocidad angular inmediatamente después de que la esquina A choca con el gancho sin rebotar.



Prob. 21-24

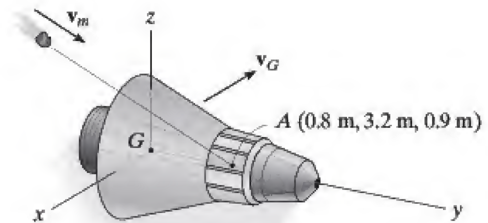
•21-25. El disco de 5 kg está conectado a la barra delgada de 3 kg. Si el ensamble se conecta a una articulación de rótula esférica en A y se aplica el momento de par de 5 N · m, determine la velocidad angular de la barra con respecto al eje z después de que el ensamble ha realizado dos revoluciones alrededor del eje z a partir del reposo. El disco rueda sin deslizarse.

21-26. El disco de 5 kg está conectado a la barra delgada de 3 kg. Si el ensamble se conecta a una articulación de rótula esférica en A y el momento de par de 5 N · m le imparte una velocidad angular alrededor del eje z de ω_z = 2 rad/s, determine la magnitud de la cantidad de movimiento angular del ensamble con respecto a A.



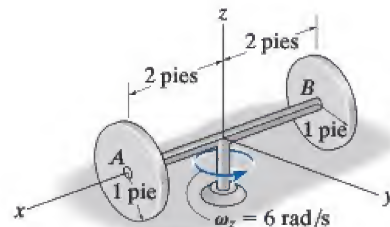
Probs. 21-25/26

21-27. La cápsula espacial tiene una masa de 5 Mg y los radios de giro son $k_x = k_z = 1.30$ m y $k_y = 0.45$ m. Si viaja a una velocidad $\mathbf{v}_G = \{400\mathbf{j} + 200\mathbf{k}\}$ m/s, calcule su velocidad angular justo después de que es impactada por un meteorito de 0.80 kg de masa a una velocidad de $\mathbf{v}_m = \{-300\mathbf{i} + 200\mathbf{j} - 150\mathbf{k}\}$ m/s. Suponga que el meteorito se incrusta en la cápsula en el punto A y que inicialmente la cápsula no tiene velocidad angular.



Prob. 21-27

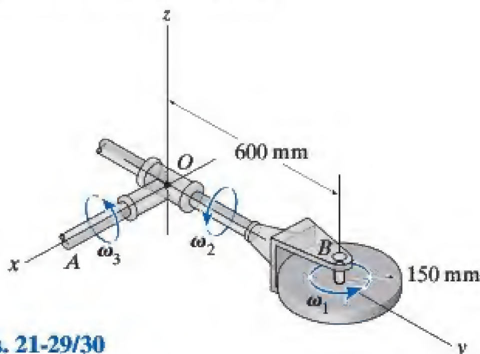
***21-28.** Cada uno de los dos discos pesa 10 lb. El eje AB pesa 3 lb. Si el ensamble gira alrededor del eje z a ω_z = 6 rad/s, determine la cantidad de movimiento angular con respecto al eje z y su energía cinética. Los discos ruedan sin deslizarse.



Prob. 21-28

•**21-29.** El disco circular de 10 kg gira alrededor de su eje a una velocidad angular constante de $\omega_1 = 15$ rad/s. Al mismo tiempo, el brazo OB y la flecha OA giran alrededor de sus ejes a velocidades angulares constantes de $\omega_2 = 0$ y $\omega_3 = 6$ rad/s, respectivamente. Determine la cantidad de movimiento angular del disco con respecto al punto O y su energía cinética.

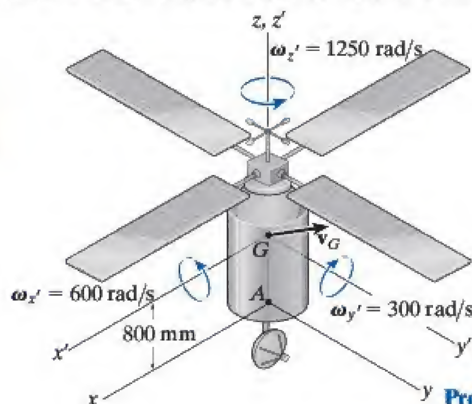
21-30. El disco circular de 10 kg gira alrededor de su eje a una velocidad angular constante de $\omega_1 = 15$ rad/s. Al mismo tiempo, el brazo OB y la flecha OA giran alrededor de sus ejes a velocidades angulares constantes de $\omega_2 = 10$ rad/s y $\omega_3 = 6$ rad/s, respectivamente. Determine la cantidad de movimiento angular del disco con respecto al punto O y su energía cinética.



Probs. 21-29/30

21-31. El satélite de 200 kg tiene su centro de masa en el punto G. Los radios de giro con respecto a los ejes z', x', y' son $k_{z'} = 300$ mm, $k_{x'} = k_{y'} = 500$ mm, respectivamente. En el instante mostrado, el satélite gira respecto de los ejes x', y' y z' a la velocidad angular mostrada, y su centro de masa G tiene una velocidad de $\mathbf{v}_G = \{-250\mathbf{i} + 200\mathbf{j} + 120\mathbf{k}\}$ m/s. Determine la cantidad de movimiento angular del satélite con respecto a A en este instante.

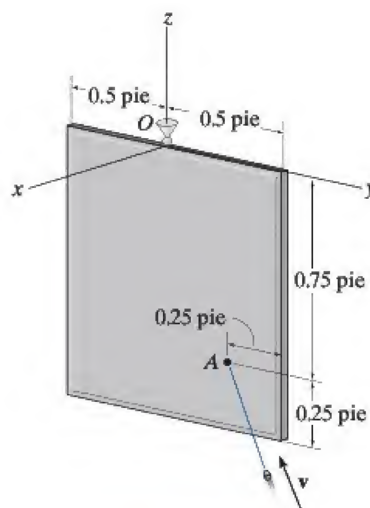
*__21-32.__ El satélite de 200 kg tiene su centro de masa en el punto G. Los radios de giro con respecto a los ejes z', x', y' son $k_{z'} = 300$ mm, $k_{x'} = k_{y'} = 500$ mm, respectivamente. En el instante mostrado, el satélite gira respecto de los ejes x', y' y z' a la velocidad angular mostrada, y su centro de masa G tiene una velocidad de $\mathbf{v}_G = \{-250\mathbf{i} + 200\mathbf{j} + 120\mathbf{k}\}$ m/s. Determine la energía cinética del satélite en este instante.



Probs. 21-31/32

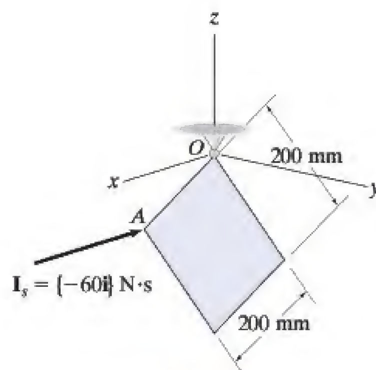
•**21-33.** La placa delgada de 25 lb cuelga de una articulación de rótula esférica en O. Se dispara un proyectil de 0.2 lb con una velocidad de $\mathbf{v} = \{-300\mathbf{i} - 250\mathbf{j} + 300\mathbf{k}\}$ pies/s contra la placa y se incrusta en el punto A. Determine la velocidad angular de la placa justo después del impacto y el eje alrededor del cual comienza a girar. Ignore la masa del proyectil después de que se incrusta en la placa.

21-34. Resuelva el problema 21-33 si el proyectil sale de la placa a una velocidad de 275 pies/s en la misma dirección.



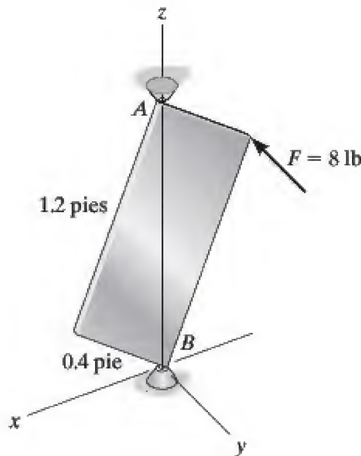
Probs. 21-33/34

21-35. Una placa delgada de 4 kg de masa cuelga de una de sus esquinas por medio de una articulación de rótula esférica en O. Si una piedra golpea la placa perpendicular a su superficie en una esquina adyacente A con un impulso $\mathbf{I}_s = \{-60\mathbf{i}\}$ N · s determine el eje instantáneo de rotación de la placa y el impulso ejercido en O.



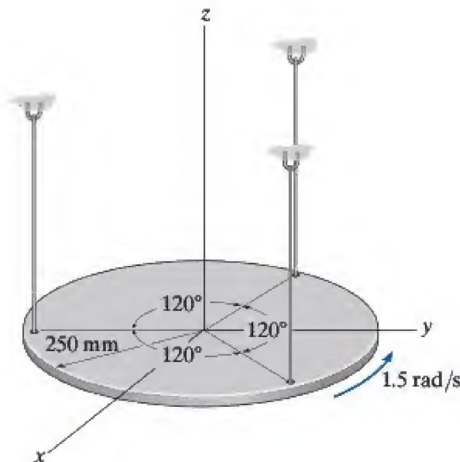
Prob. 21-35

*21-36. La placa de 15 lb se somete a una fuerza $F = 8$ lb la que siempre es perpendicular a la cara de la placa. Si ésta está originalmente en reposo, determine su velocidad angular después de que ha realizado una revolución (360°). La placa está soportada por articulaciones de rótula esférica en A y B.



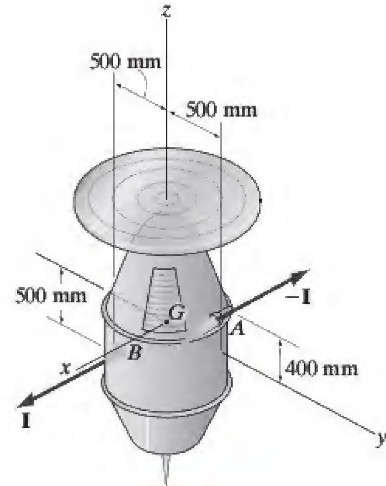
Prob. 21-36

•21-37. La placa tiene una masa de 10 kg y está suspendida de cuerdas paralelas. Si su velocidad angular es de 1.5 rad/s alrededor del eje z en el instante mostrado, determine qué tan alto se eleva el centro de la placa en el momento en que ésta deja de oscilar momentáneamente.



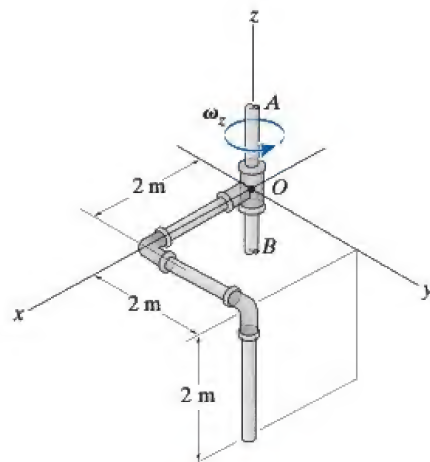
Prob. 21-37

21-38. El satélite tiene una masa de 200 kg y radios de giro de $k_x = k_y = 400$ mm y $k_z = 250$ mm. Cuando no está en giro, se encienden los dos pequeños cohetes propulsores A y B al mismo tiempo, y cada uno le imparte un impulso de $I = 1000$ N · s. Determine la velocidad angular del satélite inmediatamente después de la ignición.



Prob. 21-38

21-39. La barra acodada tiene una masa por unidad de longitud de 6 kg/m y sus momentos y productos de inercia se calcularon en el problema 21-9. Si la flecha AB gira a una velocidad angular constante de $\omega_z = 6$ rad/s, determine la cantidad de movimiento angular de la barra con respecto al punto O y su energía cinética.



Prob. 21-39

21

*21.4 Ecuaciones de movimiento

Una vez familiarizados con las técnicas utilizadas para describir tanto las propiedades inerciales como la cantidad de movimiento de un cuerpo, ahora podemos escribir las ecuaciones que describen el movimiento del cuerpo en sus formas más útiles.

Ecuaciones de movimiento de traslación. El *movimiento de traslación* de un cuerpo se define en función de la aceleración de su centro de masa, la cual se mide con respecto a una referencia X, Y, Z inercial. La ecuación de movimiento de traslación del cuerpo se escribe en forma vectorial como

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \tag{21-18}$$

o por las tres ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= m(a_G)_x \\ \Sigma F_y &= m(a_G)_y \\ \Sigma F_z &= m(a_G)_z \end{aligned} \tag{21-19}$$

Aquí, $\Sigma \mathbf{F} = \Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} + \Sigma F_z \mathbf{k}$ representa la suma de todas las fuerzas externas que actúan en el cuerpo.

Ecuaciones de movimiento de rotación. En la sección 15.6, desarrollamos la ecuación 15-17, es decir,

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{21-20}$$

la cual establece que la suma de los momentos de todas las fuerzas externas que actúan en un sistema de partículas (contenidas en un cuerpo rígido) con respecto a un punto fijo O, es igual al cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento angular total del cuerpo con respecto al punto O. Cuando los momentos de las fuerzas externas que actúan en las partículas se suman con respecto al *centro de masa* G del sistema, de nuevo obtenemos la misma forma simple de la ecuación 21-20, que relaciona la suma de momentos $\Sigma \mathbf{M}_G$ con la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$. Para demostrar esto, considere el sistema de partículas que aparecen en la figura 21-11, donde X, Y, Z representan un marco de referencia inercial y los ejes x, y, z, con su origen en G, *se trasladan* con respecto a este marco. Por lo general, G está en *aceleración*, por lo que por definición el marco trasladante *no* es una referencia inercial. Sin embargo, la cantidad de movimiento angular de la partícula $i$ésima con respecto a este marco es,

$$(\mathbf{H}_i)_G = \mathbf{r}_{i/G} \times m_i \mathbf{v}_{i/G}$$

donde $\mathbf{r}_{i/G}$ y $\mathbf{v}_{i/G}$ representan la posición y velocidad de la partícula $i$ésima con respecto a G. Al calcular la derivada con respecto al tiempo tenemos

$$(\dot{\mathbf{H}}_i)_G = \dot{\mathbf{r}}_{i/G} \times m_i \mathbf{v}_{i/G} + \mathbf{r}_{i/G} \times m_i \dot{\mathbf{v}}_{i/G}$$

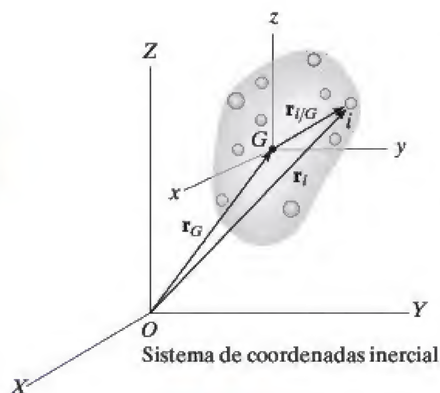


Fig. 21-11

21

Por definición, $\mathbf{v}_{i/G} = \dot{\mathbf{r}}_{i/G}$. Por tanto, el primer término del lado derecho es cero puesto que el producto vectorial de los mismos vectores es cero. También, $\mathbf{a}_{i/G} = \dot{\mathbf{v}}_{i/G}$, de modo que

$$(\dot{\mathbf{H}}_i)_G = (\mathbf{r}_{i/G} \times m_i \mathbf{a}_{i/G})$$

Pueden escribirse expresiones similares para las demás partículas del cuerpo. Cuando sumamos los resultados, obtenemos

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \Sigma(\mathbf{r}_{i/G} \times m_i \mathbf{a}_{i/G})$$

Aquí $\dot{\mathbf{H}}_G$ es el cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento angular del cuerpo calculado con respecto al punto G.

La aceleración relativa de la partícula *i*ésima se define por medio de la ecuación $\mathbf{a}_{i/G} = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_G$, donde $\mathbf{a}_i$ y $\mathbf{a}_G$, representan, respectivamente, las aceleraciones de la partícula *i*ésima y el punto G medidas con respecto al *marco de referencia inercial*. Si sustituimos y expandimos, mediante la propiedad distributiva del producto vectorial, obtenemos

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \Sigma(\mathbf{r}_{i/G} \times m_i \mathbf{a}_i) - (\Sigma m_i \mathbf{r}_{i/G}) \times \mathbf{a}_G$$

Por definición del centro de masa, la suma $(\Sigma m_i \mathbf{r}_{i/G}) = (\Sigma m_i)\bar{\mathbf{r}}$ es igual a cero, puesto que el vector de posición $\bar{\mathbf{r}}$ con respecto a G es cero. Por tanto, el último término de la ecuación anterior es cero. Con la ecuación de movimiento, el producto $m_i \mathbf{a}_i$ puede ser reemplazado por la *fuerza externa* resultante $\mathbf{F}_i$ que actúa en la partícula *i*ésima. Al denotar $\Sigma \mathbf{M}_G = \Sigma(\mathbf{r}_{i/G} \times \mathbf{F}_i)$, el resultado final se escribe como

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{21-21}$$

Ahora se desarrollará la ecuación de movimiento de rotación del cuerpo con la ecuación 21-20 o bien la 21-21. A este respecto, los componentes escalares de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ o $\mathbf{H}_G$ están definidos por las ecuaciones 21-10 o, si se utilizan los ejes de inercia principales en el punto O o en el punto G, por las ecuaciones 21-11. Si estos componentes se calculan con respecto a los ejes x, y, z que *giran* a una velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ que es *diferente* de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo, entonces la derivada con respecto al tiempo $\dot{\mathbf{H}} = d\mathbf{H}/dt$, tal como se utiliza en las ecuaciones 21-20 y 21-21 debe tener en cuenta la rotación de los ejes x, y, z medida con respecto a los ejes X, Y, Z inerciales. Esto requiere la aplicación de la ecuación 20-6, en cuyo caso las ecuaciones 21-20 y 21-21 se vuelven

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{M}_O &= (\dot{\mathbf{H}}_O)_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{H}_O \\ \Sigma \mathbf{M}_G &= (\dot{\mathbf{H}}_G)_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{H}_G \end{aligned} \tag{21-22}$$

Aquí $(\dot{\mathbf{H}})_{xyz}$ es el cambio con respecto al tiempo de $\mathbf{H}$ medido con respecto a la referencia x, y, z.

Hay tres maneras de definir el movimiento de los ejes x, y, z. Obviamente, el movimiento de esta referencia deberá escogerse de modo que origine el sistema de ecuaciones de momento más simple para la solución de un problema particular.

Ejes *x, y, z* que tienen un movimiento $\Omega = 0$. Si el cuerpo tiene movimiento general, los ejes x, y, z se seleccionan con su origen en G, de modo que los ejes *se trasladen* sólo con respecto al marco de referencia X, Y, Z inercial. De este modo se simplifica la ecuación 21-22 puesto que $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$. Sin embargo, el cuerpo puede tener una rotación $\boldsymbol{\omega}$ alrededor de estos ejes, y por consiguiente los momentos y productos de inercia del cuerpo tendrían que expresarse como *funciones de tiempo*. En la mayoría de los casos, esto dificultaría la tarea, de modo que tal selección de ejes ha limitado la aplicación.

Ejes *x, y, z* que tienen un movimiento $\Omega = \omega$. Los ejes x, y, z pueden seleccionarse de modo que estén *fijos en y se muevan junto con el cuerpo*. Los momentos y productos de inercia del cuerpo con respecto a estos ejes serán entonces *constantes* durante el movimiento. Como $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$, las ecuaciones 21-22 se vuelven

$$
\begin{aligned}
\Sigma \mathbf{M}_O &= (\dot{\mathbf{H}}_O)_{xyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_O \\
\Sigma \mathbf{M}_G &= (\dot{\mathbf{H}}_G)_{xyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_G
\end{aligned}
\qquad (21\text{-}23)
$$

Podemos expresar cada una de estas ecuaciones vectoriales como tres cantidades escalares por medio de las ecuaciones 21-10. Si ignoramos los subíndices O y G tenemos

$$
\begin{aligned}
\Sigma M_x &= I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z - I_{xy}(\dot{\omega}_y - \omega_z\omega_x) \\
&\quad - I_{yz}(\omega_y^2 - \omega_z^2) - I_{zx}(\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y) \\
\Sigma M_y &= I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x - I_{yz}(\dot{\omega}_z - \omega_x\omega_y) \\
&\quad - I_{zx}(\omega_z^2 - \omega_x^2) - I_{xy}(\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z) \\
\Sigma M_z &= I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y - I_{zx}(\dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z) \\
&\quad - I_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2) - I_{yz}(\dot{\omega}_y + \omega_z\omega_x)
\end{aligned}
\qquad (21\text{-}24)
$$

Si los ejes x, y, z se seleccionan como *ejes de inercia principales*, los productos de inercia son cero, $I_{xx} = I_x$, etcétera, y las ecuaciones anteriores se vuelven

$$
\begin{aligned}
\Sigma M_x &= I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z \\
\Sigma M_y &= I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x \\
\Sigma M_z &= I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y
\end{aligned}
\qquad (21\text{-}25)
$$

21

Este sistema de ecuaciones se conoce históricamente como *ecuaciones de movimiento de Euler*, nombradas así en honor del matemático suizo Leonhard Euler, que fuera el primero en desarrollarlas. Son válidas *sólo* para momentos sumados con respecto al punto O o al punto G.

Cuando se apliquen estas ecuaciones habrá que darse cuenta que $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$, $\dot{\omega}_z$ representan las derivadas con respecto al tiempo de las magnitudes de las componentes x, y, z de $\boldsymbol{\omega}$ observados desde x, y, z. Para determinar estas componentes, primero es necesario determinar ω_x, ω_y, ω_z cuando los ejes x, y, z están orientados en una *posición general* y *luego* calcular la derivada con respecto al tiempo de la magnitud de estas componentes, es decir, $(\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$. Sin embargo, como los ejes x, y, z giran a $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$, entonces de acuerdo con la ecuación 20-6, debe notarse que $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}$. Como $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, entonces $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$. Este importante resultado indica que la derivada con respecto al tiempo de $\boldsymbol{\omega}$ con respecto a los ejes X, Y, Z, es decir, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, también puede utilizarse para obtener $(\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$. Por lo general, ésta es la forma más fácil de determinar el resultado. Vea el ejemplo 21.5.

Ejes x, y, z que tienen un movimiento $\Omega \neq \omega$. Para simplificar los cálculos de la derivada con respecto al tiempo de $\boldsymbol{\omega}$, con frecuencia es conveniente seleccionar los ejes x, y, z con una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ diferente de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo. Esto es particularmente adecuado para el análisis de giróscopos y giroscopios los cuales son *simétricos* con respecto a sus ejes de giro.* Cuando éste sea el caso, los momentos y productos de inercia permanecen constantes con respecto al eje de giro.

Las ecuaciones 21-22 son aplicables en ese sistema de ejes. Cada una de estas dos ecuaciones vectoriales pueden reducirse a un sistema de tres ecuaciones escalares las cuales se derivan del mismo modo que las ecuaciones 21-25†, es decir,

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= I_x\dot{\omega}_x - I_y\Omega_z\omega_y + I_z\Omega_y\omega_z \\ \Sigma M_y &= I_y\dot{\omega}_y - I_z\Omega_x\omega_z + I_x\Omega_z\omega_x \\ \Sigma M_z &= I_z\dot{\omega}_z - I_x\Omega_y\omega_x + I_y\Omega_x\omega_y \end{aligned} \qquad (21\text{-}26)$$

Aquí Ω_x, Ω_y, Ω_z representan los componentes x, y, z de $\boldsymbol{\Omega}$, medidos con respecto al marco de referencia inercial, y $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$, $\dot{\omega}_z$ deben determinarse con respecto a los ejes x, y, z que tienen la rotación $\boldsymbol{\Omega}$. Vea el ejemplo 21.6.

Cualquiera de estos sistemas de ecuaciones, las ecuaciones 21-24, 21-25, o la 21-26, representa una serie de tres ecuaciones diferenciales no lineales de primer grado. Estas ecuaciones se "acoplan" puesto que los componentes de velocidad angular están presentes en todos los términos. El éxito al determinar la solución de un problema particular depende por consiguiente de lo desconocido en estas ecuaciones. Ciertamente surgen dificultades cuando intentamos resolver las componentes desconocidas de $\boldsymbol{\omega}$ cuando los momentos externos son funciones del tiempo. Pueden surgir más complicaciones si las ecuaciones de momentos se acoplan a las tres ecuaciones escalares de movimiento de traslación, ecuaciones 21-19. Esto puede suceder debido a la existencia de restricciones cinemáticas que relacionan la rotación del cuerpo con la traslación de su centro de masa, como en el caso de un

*En la sección 21.5 se analizan en detalle tales dispositivos.
†Vea el problema 21-42.

aro que rueda sin deslizarse. Los problemas que requieren la solución simultánea de ecuaciones diferenciales en general se resuelven mediante métodos numéricos con la ayuda de una computadora. En muchos problemas de ingeniería, sin embargo, se nos da información sobre el movimiento del cuerpo y se nos pide que determinemos los momentos aplicados que actúan en el cuerpo. La mayoría de estos problemas tiene soluciones directas, de modo que no es necesario recurrir a técnicas de computadora.

Procedimiento para el análisis

Los problemas que implican el movimiento tridimensional de un cuerpo rígido se resuelven por el siguiente procedimiento.

Diagrama de cuerpo libre.

- Trace un *diagrama de cuerpo libre* del cuerpo en el instante considerado y especifique el sistema de coordenadas x, y, z. El origen de esta referencia debe localizarse en el centro de masa G del cuerpo o en el punto O, considerado fijo en un marco de referencia inercial localizado en el cuerpo o en una extensión sin masa de él.
- Las componentes de fuerza de reacción desconocidas pueden mostrarse con un sentido de dirección positivo.
- Según la naturaleza del problema, decida qué tipo de movimiento de rotación $\mathbf{\Omega}$ deberá tener el sistema de coordenadas x, y, z, es decir, $\mathbf{\Omega} = \mathbf{0}$, $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$ o $\mathbf{\Omega} \neq \boldsymbol{\omega}$. Al seleccionarlo, no olvide que las ecuaciones de momentos se simplifican cuando los ejes se mueven de tal modo que representen los ejes de inercia principales del cuerpo en todo momento.
- Calcule los momentos y productos de inercia necesarios para el cuerpo con respecto a los ejes x, y, z.

Cinemática.

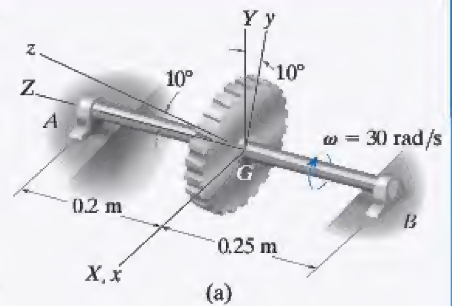
- Determine las componentes x, y, z de las velocidades angulares del cuerpo y encuentre sus derivadas con respecto al tiempo ω.
- Observe que si $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$, entonces $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$. Por consiguiente podemos determinar la derivada con respecto al tiempo de $\boldsymbol{\omega}$ con respecto a los ejes X, Y, Z, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ y luego determinar sus componentes, $\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$, o podemos determinar las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ a lo largo de los ejes x, y, z, cuando los ejes están orientados en una posición general y luego determinar la derivada con respecto al tiempo de las magnitudes de estas componentes, $(\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$.

Ecuaciones de movimiento.

- Aplique cualquiera de las dos ecuaciones vectoriales, 21-18 y 21-22, o las seis ecuaciones de componentes escalares apropiadas para los ejes de coordenadas x, y, z seleccionados para el problema.

EJEMPLO 21.4

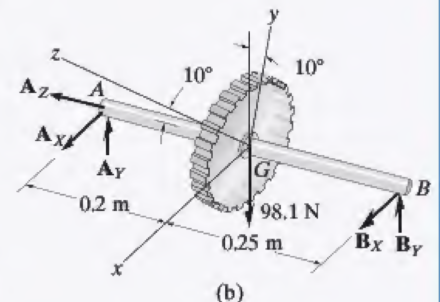
El engrane que se ilustra en la figura 21-12*a* tiene una masa de 10 kg y está montado a un ángulo de 10° con la flecha rotatoria de masa insignificante. Si $I_z = 0.1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$, $I_x = I_y = 0.05\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ y la flecha está girando a una velocidad angular constante de $\omega = 30$ rad/s, determine las componentes de reacción que el cojinete de empuje *A* y la chumacera *B* ejercen en la flecha en el instante que se muestra.



(a)

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Figura 21-12*b*. El origen del sistema de coordenadas *x, y, z* se encuentra en el centro de masa *G* del engrane, el cual también es un punto fijo. Los ejes están fijos en y giran con el engrane, de modo que estos ejes siempre representarán los ejes de inercia principales del engrane. Por consiguiente $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$.

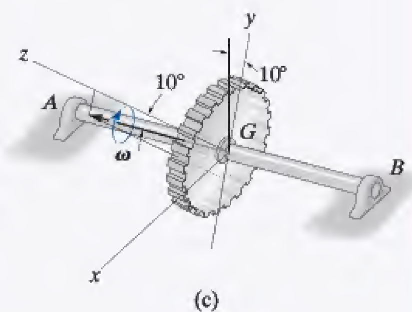


(b)

Cinemática. Como se muestra en la figura 21-12*c*, la magnitud de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del engrane es constante y siempre está dirigida a lo largo del eje de la flecha *AB*. Como este vector se mide con respecto al marco de referencia inercial *X, Y, Z*, para cualquier posición de los ejes *x, y, z*,

$$\omega_x = 0 \qquad \omega_y = -30 \text{ sen } 10° \qquad \omega_z = 30 \cos 10°$$

Estas componentes permanecen constantes con cualquier orientación de los ejes *x, y, z* y por tanto $\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0$. También observe que como $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$, entonces $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$. Por consiguiente, podemos determinar estas derivadas con respecto al tiempo con respecto a los ejes *X, Y, Z*. A este respecto la magnitud y dirección de $\boldsymbol{\omega}$ son constantes $(+Z)$ puesto que $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$ y por tanto $\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0$. Además, como *G* es un punto fijo, $(a_G)_x = (a_G)_y = (a_G)_z = 0$.



(c)

Fig. 21-12

Ecuaciones de movimiento. Al aplicar las ecuaciones 21-25 $(\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega})$ obtenemos

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z$$

$$-(A_Y)(0.2) + (B_Y)(0.25) = 0 - (0.05 - 0.1)(-30 \text{ sen } 10°)(30 \cos 10°)$$

$$-0.2A_Y + 0.25B_Y = -7.70 \qquad (1)$$

$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x$$

$$A_X(0.2)\cos 10° - B_X(0.25)\cos 10° = 0 - 0$$

$$A_X = 1.25B_X \qquad (2)$$

$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y$$

$$A_X(0.2)\text{ sen } 10° - B_X(0.25)\text{ sen } 10° = 0 - 0$$

$$A_X = 1.25B_X \text{ (comprobación)}$$

Al aplicar las ecuaciones 21-19, tenemos

$\Sigma F_X = m(a_G)_X;$ $\qquad A_X + B_X = 0 \qquad (3)$

$\Sigma F_Y = m(a_G)_Y;$ $\qquad A_Y + B_Y - 98.1 = 0 \qquad (4)$

$\Sigma F_Z = m(a_G)_Z;$ $\qquad A_Z = 0 \qquad$ ***Resp.***

Al resolver las ecuaciones 1 a 4 simultáneamente obtenemos

$A_X = B_X = 0 \qquad A_Y = 71.6\text{ N} \qquad B_Y = 26.5\text{ N}$ $\qquad$ ***Resp.***

21

EJEMPLO 21.5

El avión de la figura 21-13*a* está en el proceso de realizar un viraje *horizontal* constante a la razón de ω_p. Durante este movimiento, la hélice gira a una razón de ω_s. Si la hélice tiene dos aspas, determine los momentos que la flecha de la hélice ejerce en la hélice cuando las aspas están en la posición vertical. Para simplificar, suponga que las aspas son una barra delgada uniforme con momento de inercia I con respecto a un eje perpendicular a las aspas que pasa por el centro de la barra y con momento de inercia cero con respecto a un eje longitudinal.



(a)

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Figura 21-13*b*. Las reacciones de la flecha de conexión en la hélice se indican por medio de las resultantes $\mathbf{F}_R$ y $\mathbf{M}_R$. (Se supone que el peso de la hélice es insignificante.) Los ejes x, y, z se considerarán fijos en la hélice, puesto que estos ejes siempre representan los ejes de inercia principales de la hélice. Por tanto, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$. Los momentos de inercia I_x e I_y son iguales ($I_x = I_y = I$) e $I_z = 0$.

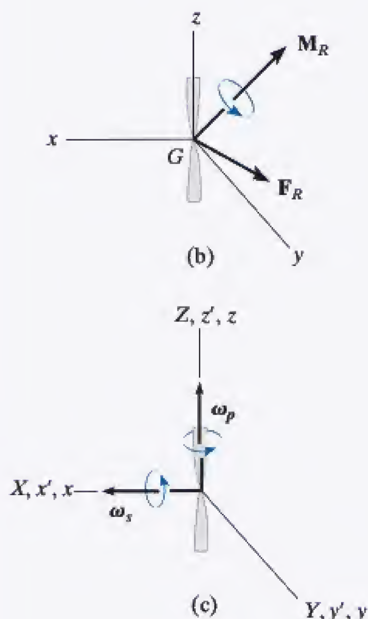


Fig. 21-13

Cinemática. La velocidad angular de la hélice observada desde los ejes X, Y, Z, coincidentes con los ejes x, y, z, figura 21-13*c*, es $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p = \omega_s\mathbf{i} + \omega_p\mathbf{k}$, de modo que las componentes x, y, z de $\boldsymbol{\omega}$ son

$$\omega_x = \omega_s \qquad \omega_y = 0 \qquad \omega_z = \omega_p$$

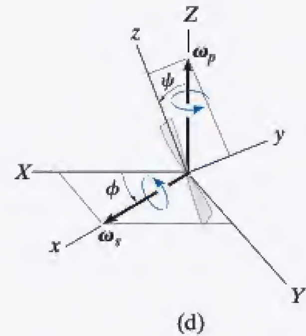
Como $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$, entonces $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$. Para determinar $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, la cual es la derivada con respecto al tiempo con respecto a los ejes fijos X, Y, Z, podemos utilizar la ecuación 20-6 puesto que $\boldsymbol{\omega}$ cambia de dirección con respecto a X, Y, Z. El cambio con respecto al tiempo de cada una de estas componentes $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_s + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p$ con respecto a los ejes X, Y, Z se obtienen al introducir un tercer sistema de coordenadas x', y', z', cuya velocidad angular es $\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\omega}_p$ y que coincide con los ejes X, Y, Z en el instante que se muestra. Por tanto

21

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}$$
$$= (\dot{\boldsymbol{\omega}}_s)_{x'y'z'} + (\dot{\boldsymbol{\omega}}_p)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p)$$
$$= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_p$$
$$= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \omega_p \mathbf{k} \times \omega_s \mathbf{i} + \mathbf{0} = \omega_p \omega_s \mathbf{j}$$

Como los ejes X, Y, Z coinciden con los ejes x, y, z en el instante que se muestra, las componentes de $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ a lo largo de x, y, z son, por consiguiente,

$$\dot{\omega}_x = 0 \qquad \dot{\omega}_y = \omega_p \omega_s \qquad \dot{\omega}_z = 0$$



(d)

Estos mismos resultados también pueden determinarse mediante un cálculo directo de $(\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$; sin embargo, esto implicará un poco de más trabajo. Para esto, será necesario visualizar la hélice (o los ejes x, y, z) en alguna *posición general*, como la de la figura 21-13*d*. Aquí el avión ha girado un ángulo ϕ (fi) y la hélice un ángulo ψ (psi) con respecto al plano. Observe que $\boldsymbol{\omega}_p$ siempre está dirigida a lo largo del eje Z y que $\boldsymbol{\omega}_s$ sigue el eje x. Por tanto, las componentes generales de $\boldsymbol{\omega}$ son

$$\omega_x = \omega_s \qquad \omega_y = \omega_p \operatorname{sen} \psi \qquad \omega_z = \omega_p \cos \psi$$

Como ω_s y ω_p son constantes, las derivadas con respecto al tiempo de estas componentes se vuelven

$$\dot{\omega}_x = 0 \qquad \dot{\omega}_y = \omega_p \cos \psi \, \dot{\psi} \qquad \omega_z = -\omega_p \operatorname{sen} \psi \, \dot{\psi}$$

Pero $\phi = \psi = 0°$ y $\dot{\psi} = \omega_s$ en el instante considerado. Por tanto,

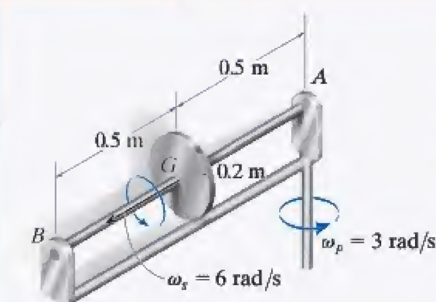
$$\omega_x = \omega_s \qquad \omega_y = 0 \qquad \omega_z = \omega_p$$
$$\dot{\omega}_x = 0 \qquad \dot{\omega}_y = \omega_p \omega_s \qquad \dot{\omega}_z = 0$$

Los cuales son los mismos resultados que los previamente obtenidos.

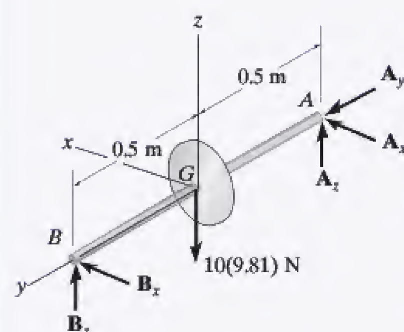
Ecuaciones de movimiento. Con las ecuaciones 21-25, tenemos

$$\Sigma M_x = I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y \omega_z = I(0) - (I - 0)(0)\omega_p$$
$$M_x = 0 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$
$$\Sigma M_y = I_y \dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z \omega_x = I(\omega_p \omega_s) - (0 - I)\omega_p \omega_s$$
$$M_y = 2I\omega_p \omega_s \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$
$$\Sigma M_z = I_z \dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x \omega_y = 0(0) - (I - I)\omega_s(0)$$
$$M_z = 0 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

EJEMPLO 21.6



(a)



(b)

Fig. 21-14

El volante de 10 kg (o disco delgado) que se muestra en la figura 21-14*a* gira alrededor de la flecha a una velocidad angular constante de $\omega_s = 6$ rad/s. Al mismo tiempo, la flecha gira (experimenta precesión) alrededor del cojinete A con una velocidad angular de $\omega_p = 3$ rad/s. Si A es un cojinete de empuje y B es una chumacera, determine las componentes de la reacción en cada uno de estos soportes debido al movimiento.

SOLUCIÓN I

Diagrama de cuerpo libre. Figura 21-14*b*. El origen del sistema de coordenadas x, y, z se encuentra en el centro de masa G del volante. Aquí consideraremos que estas coordenadas tienen una velocidad angular de $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p = \{3\mathbf{k}\}$ rad/s. Aunque la rueda gira con respecto a estos ejes, los momentos de inercia *permanecen constantes*,* es decir,

$$I_x = I_z = \tfrac{1}{4}(10\text{ kg})(0.2\text{ m})^2 = 0.1\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_y = \tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(0.2\text{ m})^2 = 0.2\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Cinemática. Con respecto al marco de referencia X, Y, Z inercial coincidente, figura 21-14*c*, el volante tiene una velocidad angular de $\boldsymbol{\omega} = \{6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\}$ rad/s, de modo que

$$\omega_x = 0 \quad \omega_y = 6\text{ rad/s} \quad \omega_z = 3\text{ rad/s}$$

La derivada con respecto al tiempo de $\boldsymbol{\omega}$ debe determinarse con respecto a los ejes x, y, z. En este caso tanto $\boldsymbol{\omega}_p$ como $\boldsymbol{\omega}_s$ no cambian de magnitud o dirección, y por tanto

$$\dot{\omega}_x = 0 \quad \dot{\omega}_y = 0 \quad \dot{\omega}_z = 0$$

Ecuaciones de movimiento. Al aplicar la ecuación 21-26 ($\mathbf{\Omega} \neq \boldsymbol{\omega}$) obtenemos

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - I_y\Omega_z\omega_y + I_z\Omega_y\omega_z$$
$$-A_z(0.5) + B_z(0.5) = 0 - (0.2)(3)(6) + 0 = -3.6$$
$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - I_z\Omega_x\omega_z + I_x\Omega_z\omega_x$$
$$0 = 0 - 0 + 0$$
$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - I_x\Omega_y\omega_x + I_y\Omega_x\omega_y$$
$$A_x(0.5) - B_x(0.5) = 0 - 0 + 0$$

*Esto no sería cierto para la hélice del ejemplo 21.5.

21

Al aplicar las ecuaciones 21-19, tenemos

$$\Sigma F_X = m(a_G)_X; \qquad A_x + B_x = 0$$

$$\Sigma F_Y = m(a_G)_Y; \qquad A_y = -10(0.5)(3)^2$$

$$\Sigma F_Z = m(a_G)_Z; \qquad A_z + B_z - 10(9.81) = 0$$

Al resolver estas ecuaciones obtenemos

$$A_x = 0 \quad A_y = -45.0 \text{ N} \quad A_z = 52.6 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$
$$B_x = 0 \qquad\qquad B_z = 45.4 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: si no hubiera ocurrido la precesión $\boldsymbol{\omega}_p$, la componente z de la fuerza en A y B sería igual a 49.05 N. En este caso, sin embargo, la diferencia de estas componentes se debe al "momento giroscópico" creado siempre que un cuerpo que gira experimenta precesión con respecto a otro eje. En la siguiente sección estudiaremos en detalle este efecto.

SOLUCIÓN II

Este ejemplo también puede resolverse con las ecuaciones de movimiento de Euler, ecuaciones 21-25. En este caso $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} = \{6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\}$ rad/s, y la derivada con respecto al tiempo $(\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$ puede obtenerse convenientemente con referencia a los ejes fijos X, Y, Z puesto que $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$. Este cálculo puede realizarse si consideramos que los ejes x', y', z' tienen una velocidad angular de $\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\omega}_p$, figura 21-14$c$, de modo que

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} + 3\mathbf{k} \times (6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = \{-18\mathbf{i}\} \text{ rad/s}^2$$
$$\dot{\omega}_x = -18 \text{ rad/s} \quad \dot{\omega}_y = 0 \quad \dot{\omega}_z = 0$$

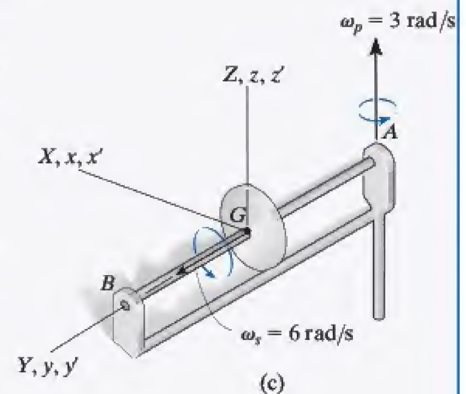


Fig. 21-14

Las ecuaciones de momentos se escriben entonces como

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z$$
$$-A_z(0.5) + B_z(0.5) = 0.1(-18) - (0.2 - 0.1)(6)(3) = -3.6$$
$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x$$
$$0 = 0 - 0$$
$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y$$
$$A_x(0.5) - B_x(0.5) = 0 - 0$$

La solución prosigue entonces como antes.

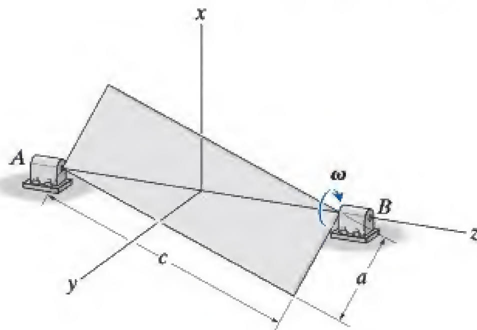
PROBLEMAS

***21-40.** Deduzca la forma escalar de la ecuación de movimiento de rotación con respecto al eje x si $\mathbf{\Omega} \neq \boldsymbol{\omega}$ y los momentos y productos de inercia del cuerpo *no* son *constantes* con respecto al tiempo.

•21-41. Derive la forma escalar de la ecuación de movimiento de rotación con respecto al eje x si $\mathbf{\Omega} \neq \boldsymbol{\omega}$ y los momentos y productos de inercia del cuerpo son *constantes* con respecto al tiempo.

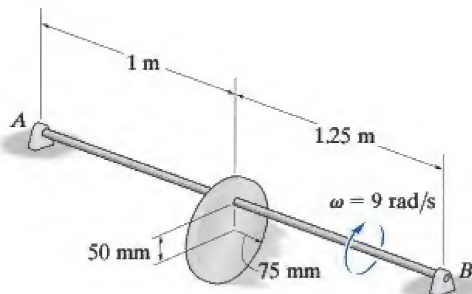
21-42. Derive las ecuaciones de movimiento de Euler con $\mathbf{\Omega} \neq \boldsymbol{\omega}$, es decir, ecuaciones 21-26.

21-43. La placa rectangular uniforme tiene una masa de $m = 2$ kg y se le imparte una rotación de $\omega = 4$ rad/s con respecto a sus cojinetes A y B. Si $a = 0.2$ m y $c = 0.3$ m, determine las reacciones verticales en A y B cuando la placa está en posición vertical como se muestra. Use los ejes x, y, z y observe que $I_{zx} = -\left(\frac{mac}{12}\right)\left(\frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2}\right)$.



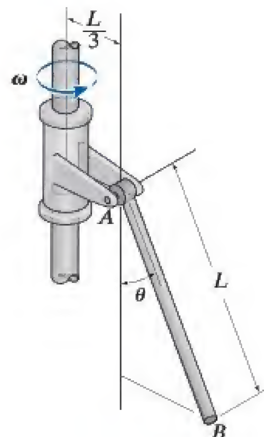
Prob. 21-43

***21-44.** El disco de 3 kg de masa, está montado excéntricamente en la flecha AB. Si ésta gira a una velocidad constante de 9 rad/s, determine las reacciones en los soportes de chumacera cuando el disco está en la posición que se muestra.



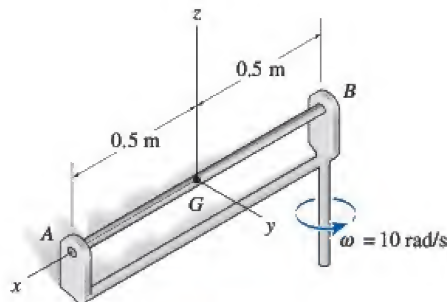
Prob. 21-44

•21-45. La barra delgada AB tiene una masa m y está conectada al soporte por medio de un pasador en A. El soporte está rígidamente montado en la flecha. Determine la velocidad angular constante requerida $\boldsymbol{\omega}$ de la flecha, para que la barra forme un ángulo θ con la vertical.



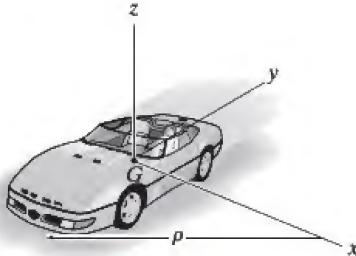
Prob. 21-45

21-46. Una barra AB de 5 kg está sostenida por un brazo rotatorio. El soporte A es una chumacera, el cual desarrolla reacciones normales a la barra. El soporte B es un cojinete de empuje, el cual desarrolla reacciones tanto normales a la barra como a lo largo de su eje. Ignore la fricción y determine las componentes x, y, z de reacción en estos soportes cuando la estructura gira a una velocidad angular constante de $\omega = 10$ rad/s.



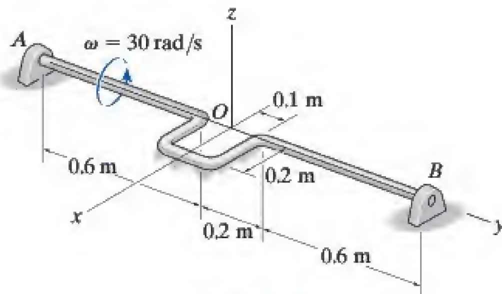
Prob. 21-46

21-47. El automóvil toma una curva de radio ρ de modo que su centro de masa tiene una velocidad constante v_G. Escriba las ecuaciones de movimiento de rotación con respecto a los ejes x, y, z. Suponga que los seis momentos y productos de inercia del automóvil con respecto a estos ejes son conocidos.



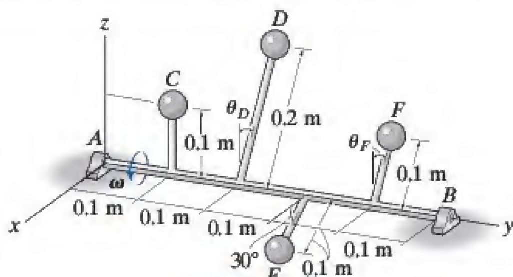
Prob. 21-47

***21-48.** La flecha se construyó con una barra cuya masa por unidad de longitud es de 2 kg/m. Determine las componentes x, y, z de la reacción en los cojinetes A y B si en el instante que se muestra la flecha gira libremente a una velocidad angular de $\omega = 30$ rad/s. ¿Cuál es la aceleración angular de la flecha en este instante? El cojinete A es capaz de soportar una componente de fuerza en la dirección y mientras que el cojinete B no.



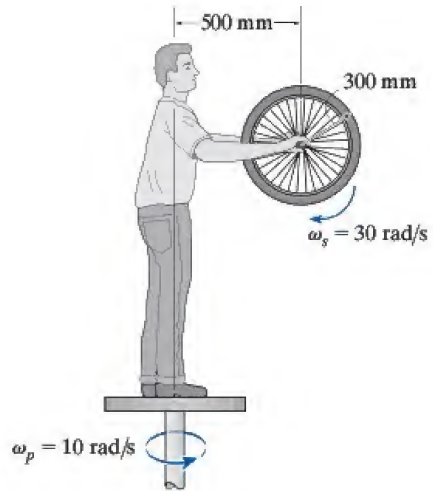
Prob. 21-48

•21-49. Hay cuatro esferas conectadas a la flecha AB. Si $m_C = 1$ kg y $m_E = 2$ kg, determine la masa de las esferas D y F y los ángulos de las barras θ_D y θ_F, de modo que la flecha esté dinámicamente balanceada, es decir, los cojinetes A y B ejercen sólo reacciones verticales en la flecha cuando gira. Ignore la masa de las barras.



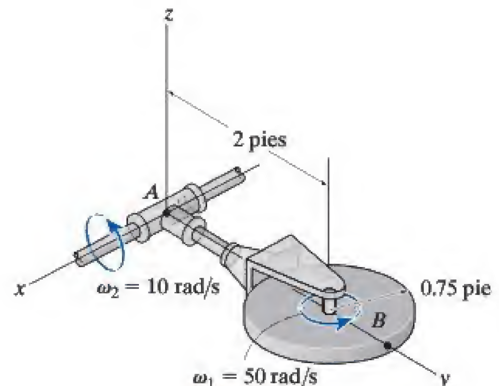
Prob. 21-49

21-50. Un hombre se para en una tornamesa que gira en torno a un eje vertical a una velocidad angular constante de $\omega_P = 10$ rad/s. Si la rueda que sostiene gira a una velocidad angular constante de $\omega_s = 30$ rad/s, determine la magnitud del momento que debe ejercer en la rueda para mantenerla en la posición mostrada. Considere la rueda como un aro circular delgado (anillo) con masa de 3 kg y radio medio de 300 mm.



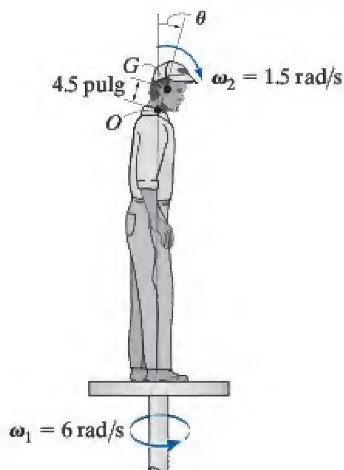
Prob. 21-50

21-51. El disco de 50 lb gira a una velocidad angular constante de $\omega_1 = 50$ rad/s alrededor de su eje. Al mismo tiempo, la flecha gira a una velocidad angular constante de $\omega_2 = 10$ rad/s. Determine las componentes x, y, z del momento desarrollado en el punto A del brazo en el instante que se muestra. Ignore el peso del brazo AB.



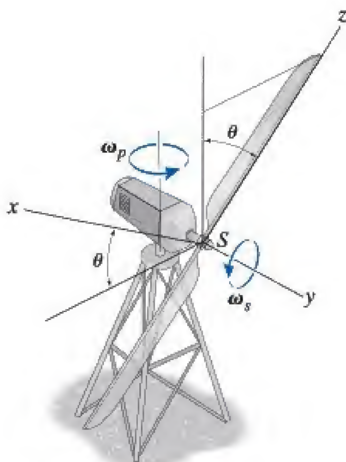
Prob. 21-51

*21-52. El hombre se para en una tornamesa que gira respecto de un eje vertical a una velocidad angular constante de $\omega_1 = 6$ rad/s. Si inclina su cabeza hacia delante a una velocidad angular constante de $\omega_2 = 1.5$ rad/s respecto del punto O, determine la magnitud del momento que su cuello debe resistir en O cuando $\theta = 30°$. Suponga que su cabeza puede considerarse como una esfera uniforme de 10 lb y tiene 4.5 pulg de radio y centro de gravedad localizado en G y el punto O está en la superficie de la esfera.



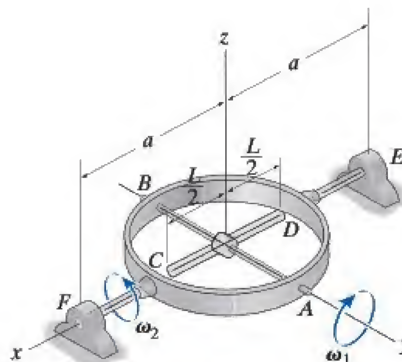
Prob. 21-52

•21-53. Las aspas de una turbina de viento gira alrededor de una flecha S a una velocidad angular constante de ω_s, mientras que el armazón experimenta precesión alrededor el eje vertical con una velocidad angular constante de ω_p. Determine las componentes x, y, z del momento que la flecha ejerce en las aspas como una función de θ. Considere cada aspa como una barra delgada de masa m y longitud l.



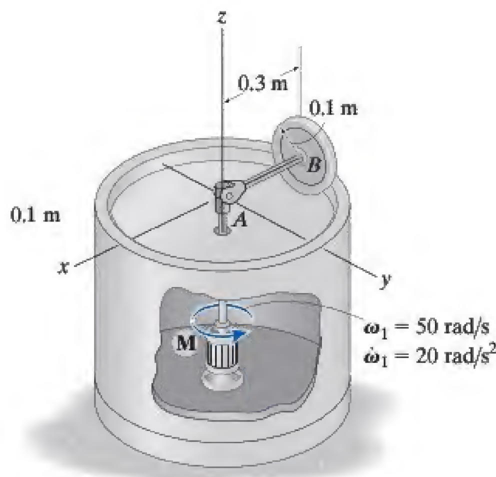
Prob. 21-53

21-54. La barra CD de masa m longitud L gira a una velocidad angular constante de ω_1 alrededor del eje AB, mientras que la flecha EF gira a una velocidad angular constante de ω_2. Determine las componentes X, Y, Z de la reacción en el cojinete de empuje E y la chumacera F en el instante que se muestra. Ignore la masa de los demás elementos.



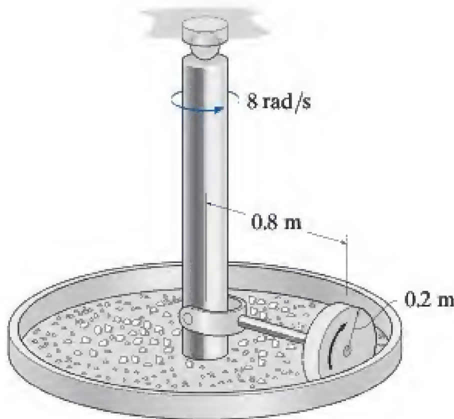
Prob. 21-54

21-55. Si la flecha AB es propulsada por el motor con una velocidad angular de $\omega_1 = 50$ rad/s y aceleración angular de $\dot{\omega}_1 = 20$ rad/s^2 en el instante que se muestra y la rueda de 10 kg gira sin deslizarse, determine la fuerza de fricción y la reacción normal en ésta y el momento $\mathbf{M}$ que el motor debe suministrar en este instante. Suponga que la rueda es un disco circular uniforme.



Prob. 21-55

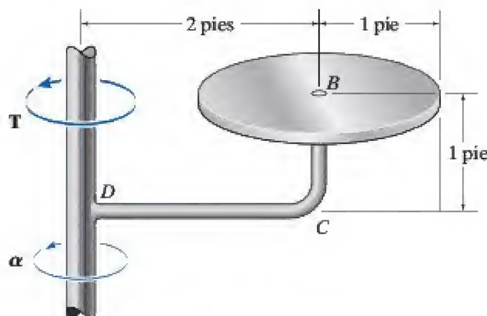
*21-56. Una trituradora de roca se compone de un disco delgado grande el cual está conectado por medio de un pasador a un eje horizontal. Si éste gira a una velocidad constante de 8 rad/s, determine la fuerza normal que el disco ejerce en las piedras. Suponga que el disco rueda sin deslizarse y que su masa es de 25 kg. Ignore la masa del eje.



Prob. 21-56

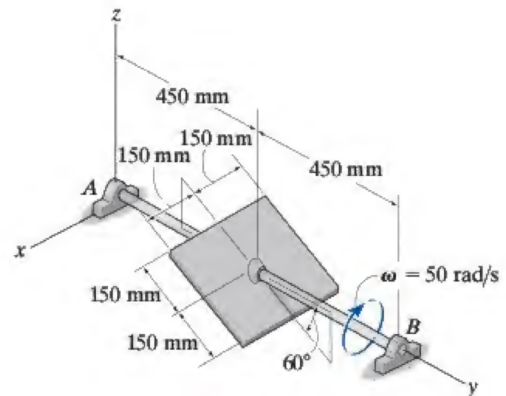
•21-57. El disco de 25 lb está *fijo* en la barra BCD, la cual tiene una masa insignificante. Determine el par de torsión **T** que debe aplicarse a la flecha vertical de modo que su aceleración angular sea $\alpha = 6$ rad/s^2. La flecha gira libremente en sus cojinetes.

21-58. Resuelva el problema 21-57, con el supuesto de que la barra BCD tiene un peso por unidad de longitud de 2 lb/pie.



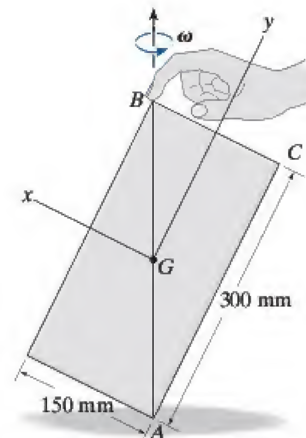
Probs. 21-57/58

21-59. Si la flecha AB gira con una velocidad angular constante de $\omega = 50$ rad/s, determine las componentes X, Y, Z de la reacción en la chumacera A y en el cojinete de empuje B en el instante que se muestra. La masa de la placa delgada es de 10 kg. Ignore la masa de la flecha AB.

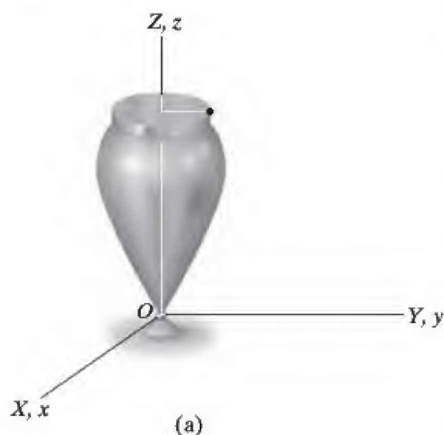


Prob. 21-59

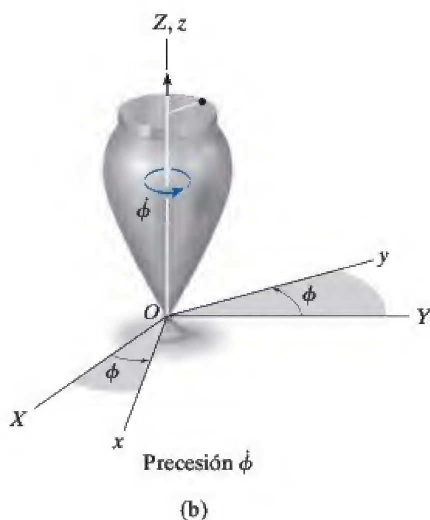
*21-60. Una placa uniforme delgada de 0.4 kg de masa gira a una velocidad angular constante de **ω** alrededor de su diagonal AB. Si la persona que detiene la esquina de la placa en B retira su dedo, la placa caerá sobre su lado AC. Determine el momento de par necesario **M**, el cual si se aplicara a la placa evitaría que esto sucediera.



Prob. 21-60



(a)



Precesión $\dot{\phi}$

(b)

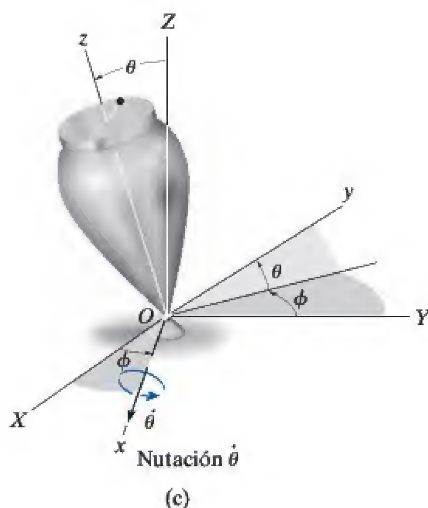
*21.5 Movimiento giroscópico

En esta sección desarrollaremos las ecuaciones que definen el movimiento de un cuerpo (trompo o giróscopo) simétrico con respecto a un eje y que gira en torno a un punto fijo. Estas ecuaciones también se aplican al movimiento de un dispositivo particularmente interesante, el giroscopio.

El movimiento del cuerpo se analizará mediante los ángulos de Euler ϕ, θ, ψ (fi, teta, psi). Para ilustrar cómo definen la posición de un cuerpo, considere el trompo que se ilustra en la figura 21-15*a*. Para definir su posición final, figura 21-15*d*, se fija un segundo sistema de ejes x, y, z en el trompo. Se comienza con la coincidencia de los ejes X, Y, Z y x, y, z, figura 21-15*a*; la posición final del trompo se determina con los tres pasos siguientes:

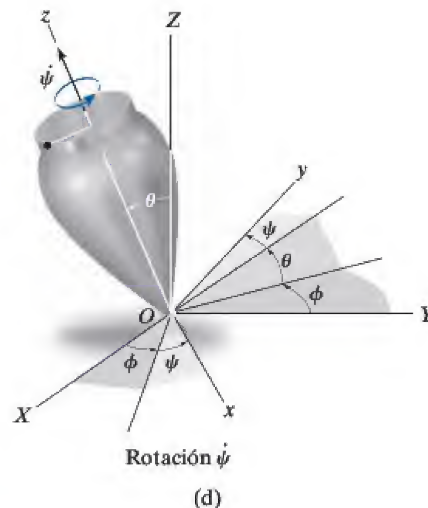
1. Haga girar el trompo en torno al eje Z (o z) un ángulo ϕ ($0 \leq \phi < 2\pi$), figura 21-15*b*.
2. Haga girar el trompo en torno al eje x un ángulo θ ($0 \leq \theta \leq \pi$), figura 21-15*c*.
3. Haga girar el trompo en torno al eje z un ángulo ψ ($0 \leq \psi < 2\pi$) para obtener la posición final, figura 20-15*d*.

La secuencia de estos tres ángulos ϕ, θ y luego ψ, debe mantenerse, puesto que las rotaciones finitas *no* son *vectores* (vea la figura 20-1). Aunque éste es el caso, las rotaciones diferenciales $d\boldsymbol{\phi}$, $d\boldsymbol{\theta}$ y $d\boldsymbol{\psi}$ son vectores y por tanto la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del trompo puede expresarse en función de las derivadas con respecto al tiempo de los ángulos de Euler. Las componentes de la velocidad angular $\dot{\phi}$ y $\dot{\theta}$ se conocen como *precesión*, *nutación* y *rotación*, respectivamente.



Nutación $\dot{\theta}$

(c)



Rotación $\dot{\psi}$

(d)

Fig. 21-15

Sus direcciones positivas se muestran en la figura 21-16. Se ve que no todos estos vectores son perpendiculares entre sí; sin embargo, $\boldsymbol{\omega}$ del trompo aún puede expresarse en función de estas tres componentes.

Como el cuerpo (trompo) es simétrico con respecto al eje z o de rotación, no es necesario anexar los ejes x, y, z al trompo puesto que las propiedades inerciales de éste permanecen constantes con respecto a este marco de referencia durante el movimiento. Por consiguiente, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_n$, figura 21-16. En consecuencia, la velocidad angular del cuerpo es

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$$

$$= \dot{\theta}\mathbf{i} + (\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\mathbf{k} \qquad (21\text{-}27)$$

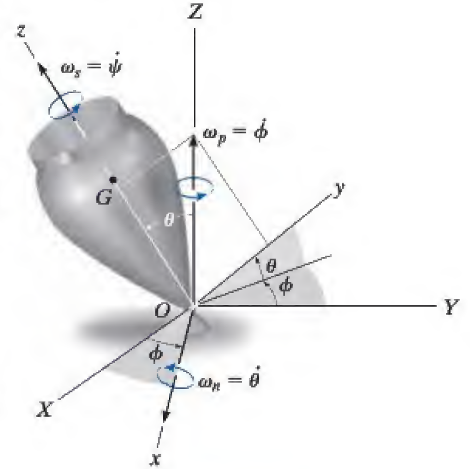


Fig. 21-16

Y la velocidad angular de los ejes es

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_x\mathbf{i} + \Omega_y\mathbf{j} + \Omega_z\mathbf{k}$$

$$= \dot{\theta}\mathbf{i} + (\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + (\dot{\phi}\cos\theta)\mathbf{k} \qquad (21\text{-}28)$$

Haga que los ejes x, y, z representen los ejes de inercia principales del trompo, y por tanto los momentos de inercia serán $I_{xx} = I_{yy} = \text{I}$ e $I_{zz} = I_z$. Como $\boldsymbol{\Omega} \neq \boldsymbol{\omega}$, se utilizan las ecuaciones 21-26 para establecer las ecuaciones de movimiento de rotación. Al sustituir en estas ecuaciones las respectivas componentes de velocidad angular definidas por las ecuaciones 21-27 y 21-28, sus derivadas con respecto al tiempo correspondientes y las componentes de momento de inercia, obtenemos

$$\Sigma M_x = I(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta) + I_z\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})$$

$$\Sigma M_y = I(\ddot{\phi}\,\text{sen}\,\theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta) - I_z\dot{\theta}(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) \qquad (21\text{-}29)$$

$$\Sigma M_z = I_z(\ddot{\psi} + \ddot{\phi}\cos\theta - \dot{\phi}\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta)$$

Cada suma de momentos se aplica sólo en el punto fijo O o en el centro de masa G del cuerpo. Como las ecuaciones representan un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales de segundo grado no lineales, en general puede obtenerse una solución de forma cerrada. En cambio, los ángulos de Euler ϕ, θ y ψ pueden obtenerse gráficamente como funciones de tiempo mediante un análisis numérico y técnicas de computadora.

Hay un caso especial, sin embargo, en el cual es posible simplificar las ecuaciones 21-29. Comúnmente conocida como *precesión constante*, ésta ocurre cuando el ángulo de nutación θ, el ángulo de precesión $\dot{\phi}$, y el ángulo de rotación $\dot{\psi}$ permanecen *constantes*. Las ecuaciones 21-29 se reducen entonces a la forma

$$\Sigma M_x = -I\dot{\phi}^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + I_z\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) \qquad (21\text{-}30)$$

$$\Sigma M_y = 0$$

$$\Sigma M_z = 0$$

21

Las ecuaciones 21-30 se simplifican aún más observando que, de acuerdo con la ecuación 21-27, $\omega_z = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}$, de modo que

$$\Sigma M_x = -I\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + I_z\dot{\phi}(\operatorname{sen}\theta)\omega_z$$

o bien

$$\Sigma M_x = \dot{\phi}\operatorname{sen}\theta(I_z\omega_z - I\dot{\phi}\cos\theta) \qquad (21\text{-}31)$$

Es interesante hacer notar que los efectos que la rotación $\dot{\psi}$ tiene en un momento con respecto al eje x. Para demostrar esto, considere el rotor que gira en la figura 21-17. Aquí $\theta = 90°$, en cuyo caso la ecuación 21-30 se reduce a la forma

$$\Sigma M_x = I_z\dot{\phi}\dot{\psi}$$

o bien

$$\Sigma M_x = I_z\Omega_y\omega_z \qquad (21\text{-}32)$$

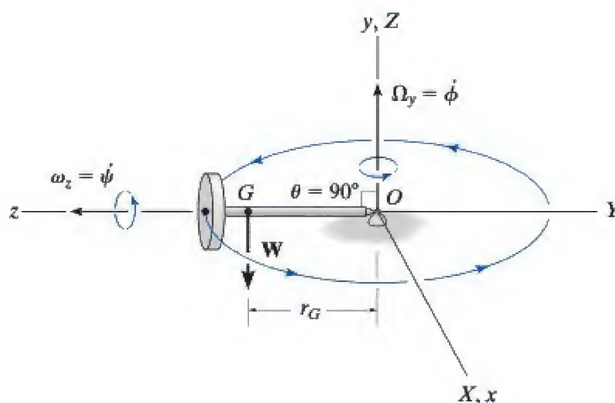


Fig. 21-17

21

En la figura se ve que $\mathbf{\Omega}_y$ y $\boldsymbol{\omega}_z$ actúan a lo largo de sus respectivos *ejes positivos* y por consiguiente son mutuamente perpendiculares. Instintivamente, ¡esperaríamos que el rotor cayera por la fuerza de gravedad! Sin embargo, éste no es el caso en absoluto, siempre que el producto $I_z\Omega_y\omega_z$ se seleccione de forma correcta para contrarrestar el momento $\Sigma M_x = Wr_G$ del peso del rotor con respecto a O. A este fenómeno inusitado del movimiento de un cuerpo rígido se le conoce como *efecto giroscópico*.

Quizás una demostración más intrigante del efecto giroscópico se desprende del estudio de la acción de un *giroscopio*, frecuentemente designado como *giro*. Un giro es un rotor que gira a una muy alta velocidad respecto de su eje de simetría. Esta velocidad de rotación es considerablemente mayor que su velocidad de rotación precesional en torno al eje vertical. Por consiguiente, en la práctica, que la dirección de la cantidad de movimiento angular del giro es a lo largo de su eje de rotación. Por tanto, para el rotor del giro que se muestra en la figura 21-18, $\omega_z \gg \Omega_y$, y la magnitud de la cantidad de movimiento angular con respecto al punto O, determinada con las ecuaciones 21-11, se reduce a la forma $H_O = I_z\omega_z$. Como tanto la magnitud como la dirección de $\mathbf{H}_O$ son constantes observadas desde x, y, z, el resultado de la aplicación directa de la ecuación 21-22 es

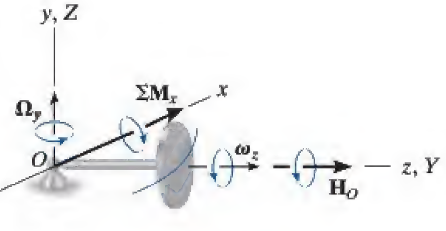


Fig. 21-18

$$\Sigma \mathbf{M}_x = \mathbf{\Omega}_y \times \mathbf{H}_O \qquad (21\text{-}33)$$

Con la regla de la mano derecha aplicada al producto vectorial, se ve que $\mathbf{\Omega}_y$ siempre oscila $\mathbf{H}_O$ (u $\boldsymbol{\omega}_z$) hacia el sentido de $\Sigma\mathbf{M}_x$. En realidad, el *cambio de dirección* de la cantidad de movimiento angular del giro, $d\mathbf{H}_O$, equivale al impulso angular provocado por el peso del giro con respecto a O, es decir, $d\mathbf{H}_O = \Sigma\mathbf{M}_x\, dt$, ecuación 21-20. Además, como $H_O = I_z\omega_z$ y $\Sigma\mathbf{M}_x$, $\mathbf{\Omega}_y$ y $\mathbf{H}_O$ son mutuamente perpendiculares, la ecuación 21-33 se reduce a la ecuación 21-32.

Cuando un giro se monta en anillos cardánicos, figura 21-19, se *libera* de los momentos externos aplicados a su base. Por tanto, en teoría, su cantidad de movimiento angular **H** nunca experimentará precesión, sino que, en cambio, mantiene su misma orientación fija a lo largo del eje de rotación cuando la base gira. Este tipo de giroscopio se llama *giro libre* y es útil como brújula giroscópica cuando el eje de rotación del giro está dirigido al norte. En realidad, el mecanismo cardánico nunca está completamente libre de fricción, por lo que tal dispositivo es útil sólo para la navegación local de buques y aviones. El efecto giroscópico también es útil para estabilizar tanto el movimiento de rodamiento de buques en el mar como las trayectorias de misiles y proyectiles. Además, este efecto es de importancia significativa en el diseño de flechas y cojinetes de rotores sometidos a precesiones forzadas.

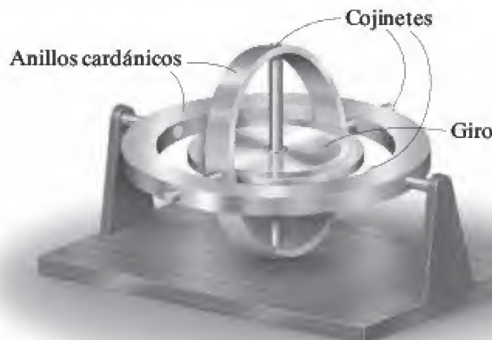
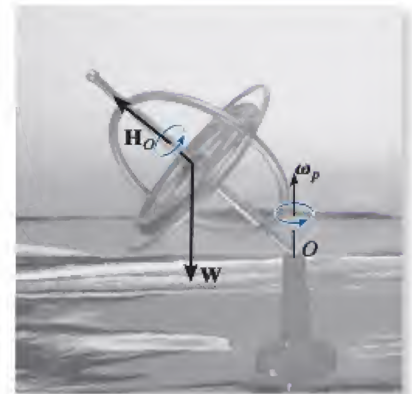
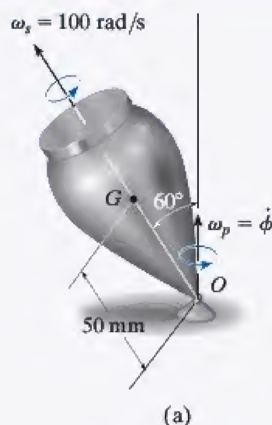


Fig. 21-19



La rotación del giro dentro del armazón de este giroscopio de juguete produce cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$, el cual cambia de dirección cuando el armazón precese a $\boldsymbol{\omega}_p$ respecto del eje vertical. El giroscopio no caerá puesto que el momento de su peso **W** con respecto al apoyo está balanceado por el cambio de dirección de $\mathbf{H}_O$.

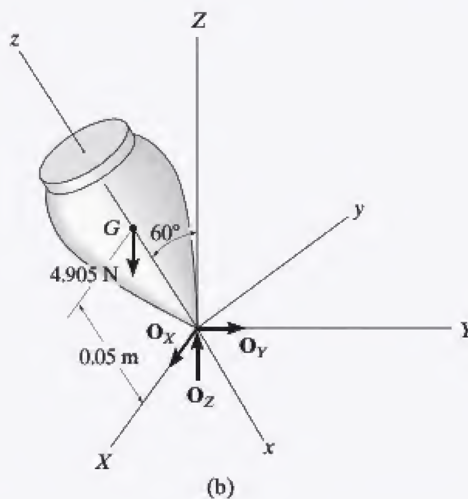
EJEMPLO 21.7



(a)

Fig. 21-20

El trompo de la figura 21-20*a* tiene una masa de 0.5 kg y experimenta precesión respecto del eje vertical al ángulo constante de $\theta = 60°$. Si gira con una velocidad de $\omega_s = 100$ rad/s, determine la precesión $\boldsymbol{\omega}_p$. Suponga que los momentos de inercia axial y transversal del trompo son $0.45(10^{-3})$ kg · m² y $1.20(10^{-3})$ kg · m², respectivamente, medidos con respecto al punto fijo *O*.



(b)

SOLUCIÓN

Se utilizará la ecuación 21-30 para la solución ya que el movimiento de *precesión* es *constante*. Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, figura 21-20*b*, los ejes de coordenadas se establecen como de costumbre, es decir, con el eje *z* positivo en la dirección de la rotación, el eje *Z* positivo en la dirección de la precesión y el eje *x* positivo en la dirección del momento ΣM_x (remítase a la figura 21-16). Por tanto,

$$\Sigma M_x = -I\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + I_z\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})$$

$$4.905\text{ N}(0.05\text{ m})\operatorname{sen}60° = -[1.20(10^{-3})\text{ kg}\cdot\text{m}^2\,\dot{\phi}^2]\operatorname{sen}60°\cos 60°$$
$$+ [0.45(10^{-3})\text{ kg}\cdot\text{m}^2]\dot{\phi}\operatorname{sen}60°(\dot{\phi}\cos 60° + 100\text{ rad/s})$$

o bien

$$\dot{\phi}^2 - 120.0\dot{\phi} + 654.0 = 0 \qquad (1)$$

21

Al resolver esta ecuación cuadrática para la precesión obtenemos

$$\dot{\phi} = 114\text{ rad/s} \qquad \text{(alta precesión)}$$ ***Resp.***

y

$$\dot{\phi} = 5.72\text{ rad/s} \qquad \text{(baja precesión)}$$ ***Resp.***

NOTA: en realidad, por lo general se observaría baja precesión del trompo, ya que alta precesión requeriría una mayor energía cinética.

EJEMPLO 21.8

El disco de 1 kg que se muestra en la figura 21-21*a* gira alrededor de su eje a una velocidad angular constante de $\omega_D = 70$ rad/s. El bloque B tiene una masa de 2 kg y si ajustamos su posición s podemos cambiar la precesión del disco alrededor de su pivote de soporte O mientras que la flecha permanece horizontal. Determine la posición s que permitirá que el disco tenga una precesión constante $\omega_p = 0.5$ rad/s alrededor del pivote. Ignore el peso de la flecha.

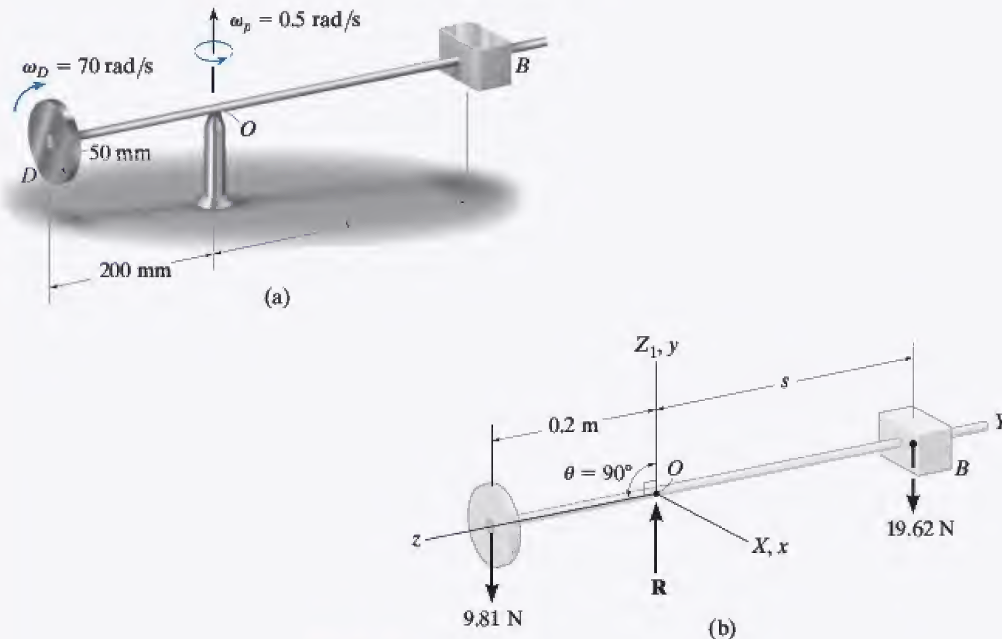


Fig. 21-21

SOLUCIÓN

El diagrama de cuerpo libre del ensamble se muestra en la figura 21-21*b*. El origen tanto del sistema x, y, z como del sistema X, Y, Z se encuentra en el punto fijo O. En el sentido convencional, el eje Z se elige a lo largo del eje de precesión y el eje z a lo largo del eje de rotación, de modo que $\theta = 90°$. Como la precesión es *constante*, puede utilizarse la ecuación 21-32 para la solución.

$$\Sigma M_x = I_z \Omega_y \omega_z$$

Al sustituir los datos requeridos se obtiene

$$(98.1 \text{ N})\ (0.2 \text{ m}) - (19.62 \text{ N})s = \left[\tfrac{1}{2}(1 \text{ kg})(0.05 \text{ m})^2\right]0.5 \text{ rad/s}(-70 \text{ rad/s})$$

$$s = 0.102 \text{ m} = 102 \text{ mm} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

21.6 Movimiento sin par de torsión

Cuando la única fuerza externa que actúa en un cuerpo es provocada por la gravedad, el movimiento general de un cuerpo se conoce como *movimiento sin par de torsión*. Este tipo de movimiento es característico de los planetas, satélites artificiales y proyectiles, siempre que se ignore la fricción del aire.

Para describir las características de este movimiento, se supondrá que la distribución de la masa del cuerpo es *axialmente simétrica*. El satélite que se muestra en la figura 21-22 es un ejemplo de un cuerpo como ese, donde el eje z representa un eje de simetría. El origen de las coordenadas x, y, z se encuentra en el centro de masa G, de modo que $I_{zz} = I_z$ e $I_{xx} = I_{yy} = I$. Como la gravedad es la única fuerza externa presente, la suma de momentos con respecto al centro de masa es cero. Según la ecuación 21-21, esto requiere que la cantidad de movimiento angular del cuerpo sea constante, es decir,

$$\mathbf{H}_G = \text{constante}$$

En el instante considerado, se supondrá que el marco de referencia inercial está orientado de modo que el eje Z positivo está dirigido a lo largo de $\mathbf{H}_G$ y que el eje y queda en el plano formado por los ejes z y Z, figura 21-22. El ángulo de Euler formado entre Z y z es θ, y por consiguiente con esta selección de ejes la cantidad de movimiento angular puede expresarse como

$$\mathbf{H}_G = H_G \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{j} + H_G \cos \theta \, \mathbf{k}$$

Además, si usamos la ecuación 21-11, tenemos

$$\mathbf{H}_G = I\omega_x \mathbf{i} + I\omega_y \mathbf{j} + I_z\omega_z \mathbf{k}$$

Al igualar las componentes **i**, **j**, **k** de las dos ecuaciones anteriores obtenemos

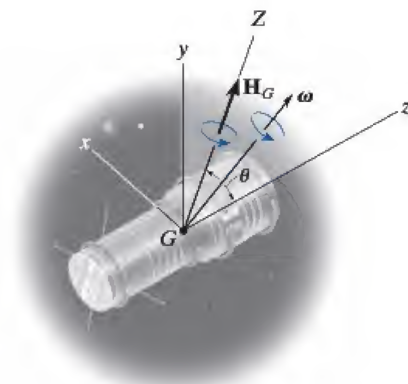


Fig. 21-22

21

$$\omega_x = 0 \qquad \omega_y = \frac{H_G \operatorname{sen} \theta}{I} \qquad \omega_z = \frac{H_G \cos \theta}{I_z} \tag{21-34}$$

o bien

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{H_G \operatorname{sen} \theta}{I}\mathbf{j} + \frac{H_G \cos \theta}{I_z}\mathbf{k} \tag{21-35}$$

Del mismo modo, si igualamos las componentes **i**, **j**, **k** respectivas de la ecuación 21-27 con las de la ecuación 21-34, obtenemos

$$\dot{\theta} = 0$$

$$\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta = \frac{H_G \operatorname{sen} \theta}{I}$$

$$\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} = \frac{H_G \cos \theta}{I_z}$$

Al resolver, obtenemos

$$\begin{aligned} \theta &= \text{constante} \\ \dot{\phi} &= \frac{H_G}{I} \\ \dot{\psi} &= \frac{I - I_z}{I I_z} H_G \cos \theta \end{aligned} \tag{21-36}$$

Por tanto, para el movimiento sin par de torsión de un cuerpo axialmente simétrico, el ángulo θ formado entre el vector de cantidad de movimiento angular y la rotación del cuerpo permanece constante. Además, la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$, la precesión $\dot{\phi}$ y la rotación $\dot{\psi}$ del cuerpo permanecen constantes en todo momento durante el movimiento.

Al eliminar H_G de la segunda y tercera de las ecuaciones 21-36, obtenemos la siguiente relación entre la rotación y la precesión:

$$\dot{\psi} = \frac{I - I_z}{I_z}\dot{\phi} \cos \theta \tag{21-37}$$

21

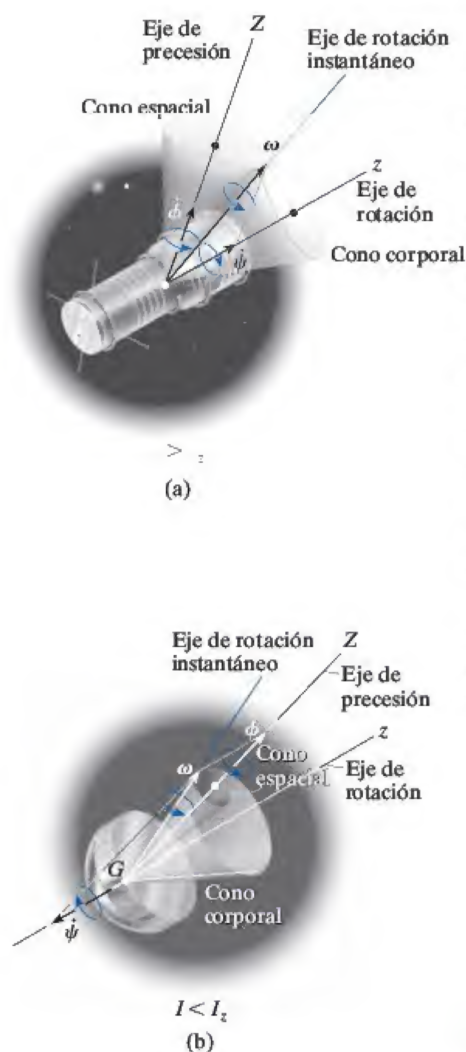


Fig. 21-23

Estas dos componentes de movimiento angular pueden estudiarse con los modelos de cono corporal y espacial presentados en la sección 20.1. El *cono espacial* que define la precesión no gira, puesto que la precesión tiene una dirección fija, mientras que la superficie externa del *cono corporal* rueda sobre la superficie externa del cono espacial. Trate de imaginar este movimiento en la figura 21-23*a*. El ángulo interior de cada cono se elige de modo que la velocidad angular resultante del cuerpo esté dirigida a lo largo de la línea de contacto de los dos conos. Esta línea de contacto representa el eje instantáneo de rotación del cono corporal, y por ende la velocidad angular tanto del cono corporal como del cuerpo debe dirigirse a lo largo de esta línea. Como la rotación es una función de los momentos de inercia I e I_z del cuerpo, ecuación 21-36, el modelo de cono que aparece en la figura 21-23*a* es satisfactoria para describir el movimiento, siempre que $I > I_z$. El movimiento sin torsión que satisface estos requerimientos se llama *precesión regular*. Si $I < I_z$, la rotación es negativa y la precesión positiva. El movimiento del satélite que se muestra en la figura 21-23*b* representa este movimiento ($I < I_z$). Nuevamente puede utilizarse el modelo cono para representar el movimiento; sin embargo, para preservar la suma vectorial correcta de la rotación y precesión para obtener la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, la superficie interna del cono corporal debe rodar sobre la superficie externa del cono espacial (fijo). Este movimiento se conoce como *precesión retrógrada*.

A los satélites se les suele imprimir rotación antes de lanzarlos. Si su cantidad de movimiento angular no es colineal con el eje de rotación, exhibirán precesión. En la foto de la izquierda ocurrirá precesión regular puesto que $I > I_z$, y en la foto de la derecha ocurrirá precesión retrógrada puesto que $I < I_z$.





21

EJEMPLO 21.9

El movimiento de un balón de futbol americano se observa con un proyector de cámara lenta. En la película se ve que la rotación del balón está dirigida a 30° de la horizontal, como se muestra en la figura 21-24*a*. Además, el balón experimenta precesión respecto del eje vertical a una velocidad de $\dot{\phi} = 3$ rad/s. Si la relación de los momentos de inercia axial y transversal del balón es de $\frac{1}{3}$, medida con respecto al centro de masa, determine la magnitud de la rotación del balón y de su velocidad angular. Ignore el efecto de la resistencia del aire.

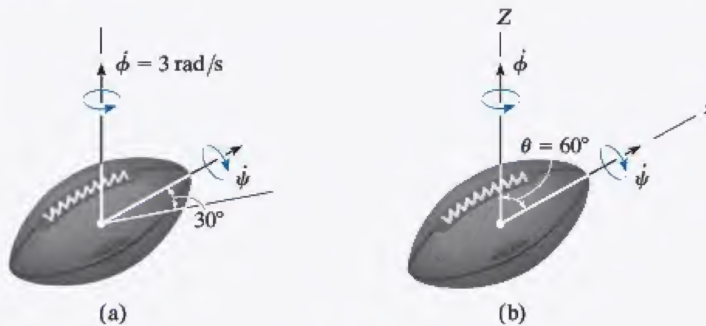


Fig. 21-24

SOLUCIÓN

Como el peso del balón es la única fuerza que actúa, el movimiento es sin par de torsión. En el sentido convencional, si el eje z se establece a lo largo del eje de rotación y el eje Z a lo largo del eje de precesión, como se muestra en la figura 21-24*b*, entonces el ángulo $\theta = 60°$. Al aplicar la ecuación 21-37, la rotación es

$$\dot{\psi} = \frac{I - I_z}{I_z}\dot{\phi}\cos\theta = \frac{I - \frac{1}{3}I}{\frac{1}{3}I}(3)\cos 60°$$
$$= 3 \text{ rad/s} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Si utilizamos la ecuación 21-34, donde $H_G = \dot{\phi}I$ (ecuación 21-36), tenemos

$$\omega_x = 0$$
$$\omega_y = \frac{H_G \operatorname{sen}\theta}{I} = \frac{3I \operatorname{sen} 60°}{I} = 2.60 \text{ rad/s}$$
$$\omega_z = \frac{H_G \cos\theta}{I_z} = \frac{3I\cos 60°}{\frac{1}{3}I} = 4.50 \text{ rad/s}$$

Por tanto,

$$\omega = \sqrt{(\omega_x)^2 + (\omega_y)^2 + (\omega_z)^2}$$
$$= \sqrt{(0)^2 + (2.60)^2 + (4.50)^2}$$
$$= 5.20 \text{ rad/s} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

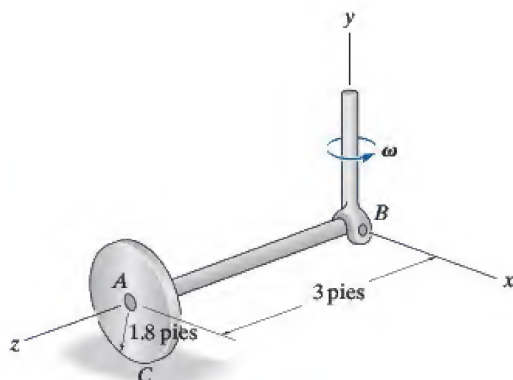
PROBLEMAS

21-61. Demuestre que la velocidad angular de un cuerpo en función de los ángulos de Euler ϕ, θ y ψ, puede expresarse como $\omega = (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi + \dot{\theta} \cos \psi)\mathbf{i} + (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \cos \psi - \dot{\theta} \operatorname{sen} \psi)\mathbf{j} + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})\mathbf{k}$, donde la dirección de **i**, **j**, **k** es a lo largo de los ejes x, y, z como se muestra en la figura 21-15d.

21-62. En principio, una barra delgada coincide con el eje Z cuando se le imparten tres rotaciones definidas por los ángulos de Euler $\phi = 30°$, $\theta = 45°$ y $\psi = 60°$. Si estas rotaciones se imprimen en el orden establecido, determine los ángulos de dirección de las coordenadas α, β, γ del eje de la barra con respecto a los ejes X, Y, Z. ¿Son estas direcciones las mismas con cualquier orden de las rotaciones? ¿Por qué?

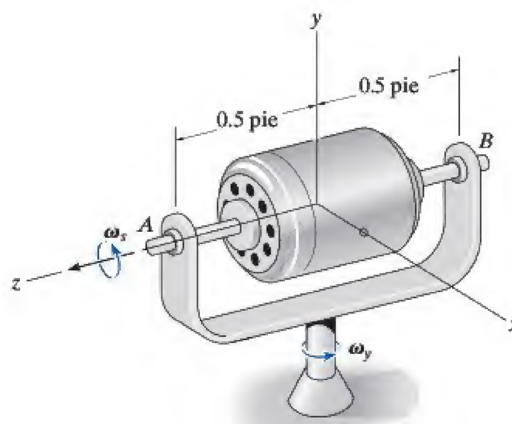
21-63. La rueda de 30 lb gira sin deslizarse. Si su radio de giro es $k_{AB} = 1.2$ pies con respecto a su eje AB y la flecha motriz vertical gira a 8 rad/s, determine la reacción normal que la rueda ejerce en el suelo en C. Ignore la masa del eje.

***21-64.** La rueda de 30 lb gira sin deslizarse. Si su radio de giro es $k_{AB} = 1.2$ pies con respecto a su eje AB, determine su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de modo que la reacción normal en C sea de 60 lb. Ignore la masa del eje.



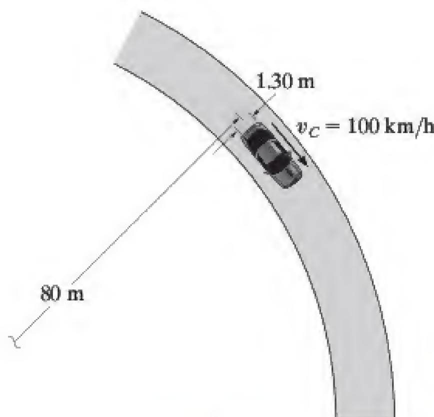
Probs. 21-63/64

•21-65. El motor pesa 50 lb y su radio de giro es de 0.2 pie con respecto al eje z. La flecha está sostenida por cojinetes en A y B y gira a una velocidad constante de $\boldsymbol{\omega}_s = \{100\mathbf{k}\}$ rad/s, mientras que el armazón tiene una velocidad angular de $\boldsymbol{\omega}_y = \{2\mathbf{j}\}$ rad/s. Determine el momento que las fuerzas de los cojinetes A y B ejercen en la flecha debido a este movimiento.



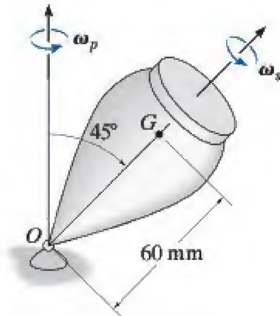
Prob. 21-65

21-66. El automóvil viaja a una rapidez constante de $v_C = 100$ km/h respecto de la curva horizontal de 80 m de radio. Si cada una de las ruedas tiene una masa de 16 kg, un radio de giro $k_G = 300$ mm con respecto a su eje de rotación y un radio de 400 mm, determine la diferencia entre las fuerzas normales de las ruedas traseras, originada por el efecto giroscópico. La distancia entre las ruedas es de 1.30 m.



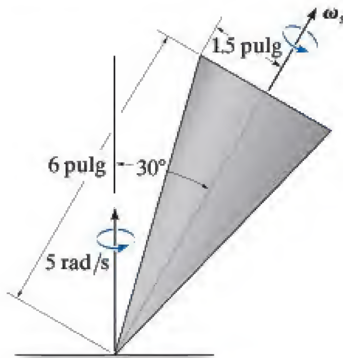
Prob. 21-66

21-67. El trompo tiene una masa de 90 g, un centro de masa en G y un radio de giro $k = 18$ mm con respecto a su eje de simetría. Con respecto a cualquier eje de simetría que actúa a través del punto O el radio de giro es $k_t = 35$ mm. Si el trompo está conectado a una articulación de rótula en O y la precesión es $\omega_p = 0.5$ rad/s, determine la rotación $\boldsymbol{\omega}_s$.



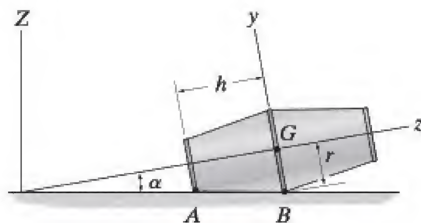
Prob. 21-67

***21-68.** El trompo pesa 3 lb y puede considerarse como un cono sólido. Si se observa que precesa respecto del eje vertical a una velocidad constante de 5 rad/s, determine su rotación.



Prob. 21-68

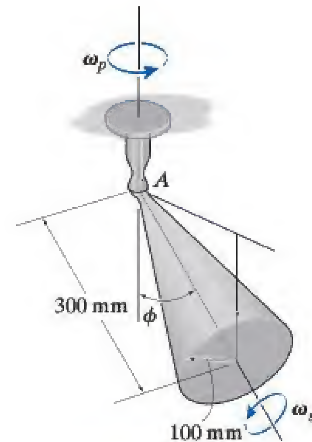
•**21-69.** El barril cervecero de aluminio tiene vacío una masa de m, centro de masa en G y radios de giro con respecto a los ejes x y y de $k_x = k_y = \frac{5}{4}r$ y, con respecto al eje z de $k_z = \frac{1}{4}r$, respectivamente. Si el barril rueda sin deslizarse a una velocidad angular constante, determine su valor máximo sin que el borde A pierda el contacto con el suelo.



Prob. 21-69

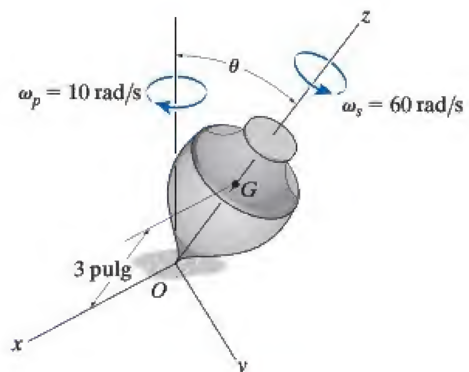
21-70. El cono de 10 kg gira a una velocidad constante de $\omega_s = 150$ rad/s. Determine la velocidad constante ω_p a la cual precesa si $\phi = 90°$.

21-71. El cono de 10 kg gira a una velocidad constante de $\omega_s = 150$ rad/s. Determine la velocidad constante ω_p a la cual precesa si $\phi = 30°$.



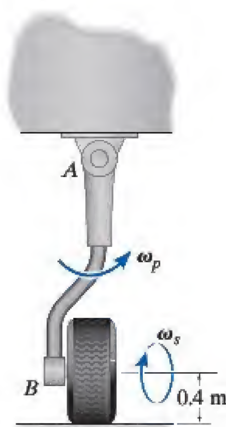
Probs. 21-70/71

***21-72.** El trompo de 1 lb tiene un centro de gravedad en el punto G. Si gira alrededor de su eje de simetría y precesa alrededor del eje vertical a velocidades constantes de $\omega_s = 60$ rad/s y $\omega_p = 10$ rad/s, respectivamente, determine el ángulo de estado estable θ. El radio de giro del trompo con respecto al eje z es $k_z = 1$ pulg y con respecto a los ejes x y y es $k_x = k_y = 4$ pulg.



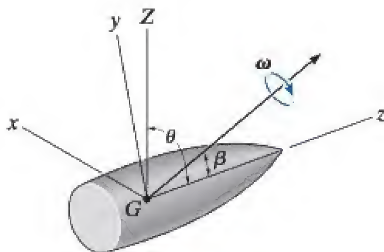
Prob. 21-72

•**21-73.** En el momento de despegar, el tren de aterrizaje de un avión se retrae con una velocidad angular constante de $\omega_p = 2$ rad/s, mientras que la rueda continúa con los giros. Si el avión despega a una rapidez de $v = 320$ km/h, determine el par de torsión en A originado por el efecto giroscópico. La rueda tiene una masa de 50 kg y el radio de giro con respecto a su eje de rotación es $k = 300$ mm.



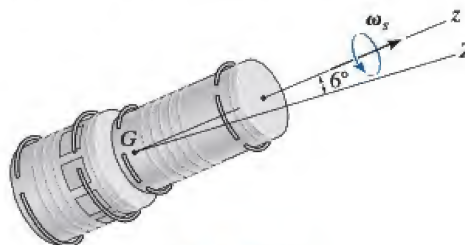
Prob. 21-73

21-74. El proyectil que se ilustra se somete a un movimiento sin par de torsión. Los momentos de inercia axial y transversal son I e I_z, respectivamente. Si θ representa el ángulo entre el eje de precesión Z y el eje de simetría z, y β es el ángulo entre la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y el eje z, demuestre que β y θ están relacionados por la ecuación $\tan\theta = (I/I_z)\tan\beta$.



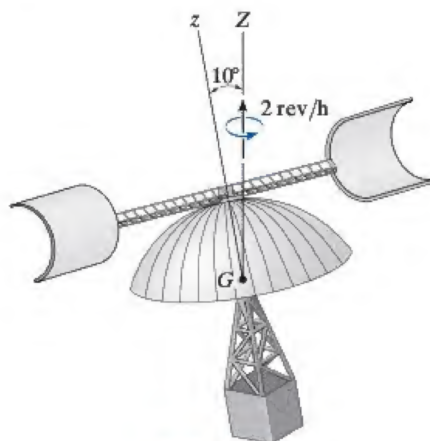
Prob. 21-74

21-75. La cápsula espacial tiene una masa de 3.2 Mg y con respecto a los ejes que pasan por el centro de masa G los radios de giro axial y transversal son $k_z = 0.90$ m y $k_t = 1.85$ m, respectivamente. Si gira a $\omega_s = 0.8$ rev/s, determine su cantidad de movimiento angular. La precesión ocurre alrededor del eje Z.



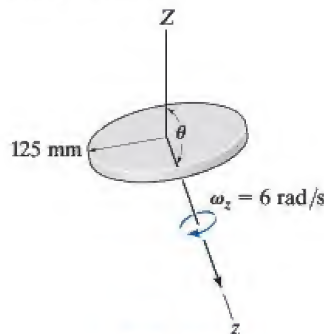
Prob. 21-75

***21-76.** El radio de giro con respecto a un eje que pasa por el eje de simetría del satélite de 2.5 Mg es $k_z = 2.3$ m, y con respecto a cualquier eje transversal que pasa por el centro de masa G, $k_t = 3.4$ m. Si el satélite tiene una precesión de estado constante de dos revoluciones por hora alrededor del eje Z, determine la velocidad de rotación con respecto al eje z.



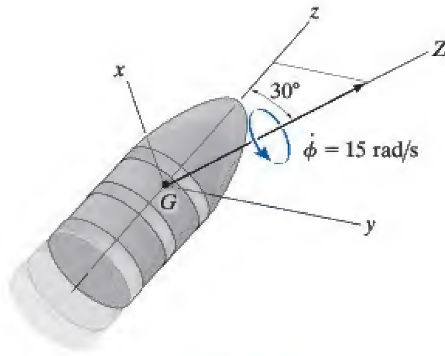
Prob. 21-76

•**21-77.** El disco de 4 kg se lanza con una rotación $\omega_z = 6$ rad/s. Si el ángulo θ se mide como 160°, determine la precesión alrededor del eje Z.



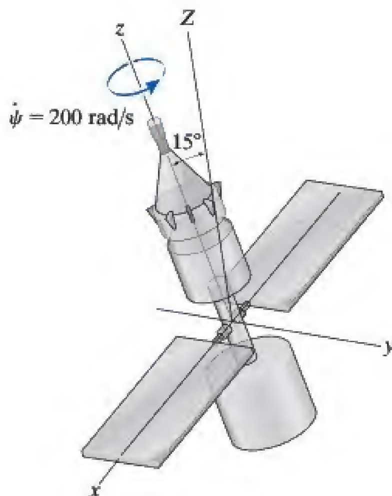
Prob. 21-77

21-78. El proyectil precesa alrededor del eje Z a una velocidad constante de $\dot{\phi} = 15$ rad/s cuando sale del barril de un arma de fuego. Determine su rotación $\dot{\psi}$ y la magnitud de su cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$. La masa del proyectil es de 1.5 kg y sus radios de giro con respecto a su eje de simetría (eje z) y con respecto a sus ejes transversales (ejes x y y) son $k_z = 65$ mm y $k_x = k_y = 125$ mm, respectivamente.



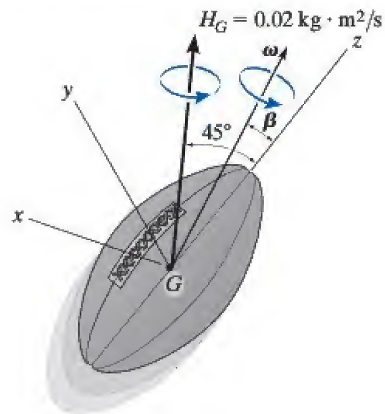
Prob. 21-78

21-79. El satélite tiene una masa de 100 kg y radios de giro con respecto a su eje de simetría (eje z) y a sus ejes transversales (ejes x y y) de $k_z = 300$ mm y $k_x = k_y = 900$ mm, respectivamente. Si el satélite gira alrededor de su eje z a una velocidad constante de $\dot{\psi} = 200$ rad/s y precesa alrededor del eje Z, determine la precesión $\dot{\phi}$ y la magnitud de su cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$.



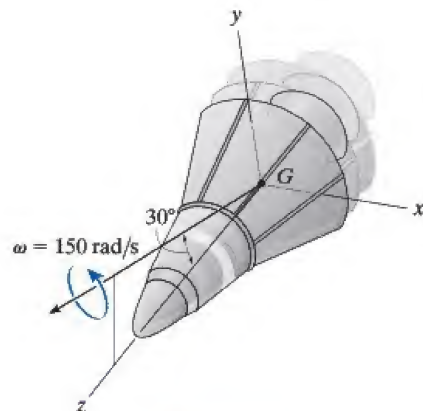
Prob. 21-79

***21-80.** El balón de futbol americano tiene una masa de 450 g y radios de giro con respecto a su eje de simetría (eje z) y a sus ejes transversales (ejes x y y) de $k_z = 30$ mm y $k_x = k_y = 50$ mm, respectivamente. Si el balón tiene una cantidad de movimiento angular de $H_G = 0.02$ kg · m²/s, determine su precesión $\dot{\phi}$ y rotación $\dot{\psi}$. Además, determine el ángulo β que el vector de velocidad angular forma con el eje z.



Prob. 21-80

•21-81. La cápsula espacial tiene una masa de 2 Mg, centro de masa en G y radios de giro con respecto a su eje de simetría (eje z) y a sus ejes transversales (ejes x y y) de $k_z = 2.75$ m y $k_x = k_y = 5.5$ m, respectivamente. Si la velocidad angular de la cápsula es la que se muestra, determine su precesión $\dot{\phi}$ y rotación $\dot{\psi}$. Indique, si la precesión es regular o retrógrada. También, trace el cono espacial y el cono corporal del movimiento.



Prob. 21-81

REPASO DEL CAPÍTULO

Momentos y productos de inercia

Un cuerpo tiene seis componentes de inercia con cualesquier ejes x, y, z especificados. Tres de éstos son momentos de inercia con respecto a cada uno de los ejes I_{xx}, I_{yy} e I_{zz} y tres son productos de inercia, cada uno definido con respecto a dos planos ortogonales, I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}. Si cualquiera de ellos o ambos planos son planos de simetría, entonces el producto de inercia con respecto a ellos será cero.

$$I_{xx} = \int_m r_x^2\, dm = \int_m (y^2 + z^2)\, dm \qquad I_{xy} = I_{yx} = \int_m xy\, dm$$

$$I_{yy} = \int_m r_y^2\, dm = \int_m (x^2 + z^2)\, dm \qquad I_{yz} = I_{zy} = \int_m yz\, dm$$

$$I_{zz} = \int_m r_z^2\, dm = \int_m (x^2 + y^2)\, dm \qquad I_{xz} = I_{zx} = \int_m xz\, dm$$

Los momentos y productos de inercia se determinan mediante integración directa o mediante valores tabulados. Si estas cantidades tienen que determinarse con respecto a ejes o planos que no pasan por el centro de masa, entonces se deben usar los teoremas de ejes paralelos y el plano paralelo.

Siempre que se conozcan las seis componentes de inercia, entonces el momento de inercia con respecto a cualquier eje puede determinarse con la ecuación de transformación de inercia.

$$I_{Oa} = I_{xx}u_x^2 + I_{yy}u_y^2 + I_{zz}u_z^2 - 2I_{xy}u_xu_y - 2I_{yz}u_yu_z - 2I_{zx}u_zu_x$$

Momentos de inercia principales

En cualquier punto en o fuera del cuerpo, los ejes x, y, z pueden orientarse de modo que los productos de inercia sean cero. Los momentos de inercia resultantes son los llamados momentos de inercia principales, uno de los cuales será máximo y el otro mínimo.

$$\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

Principio de impulso y cantidad de movimiento

La cantidad de movimiento angular de un cuerpo se determina con respecto a cualquier punto arbitrario A.

Una vez que la cantidad de movimiento lineal y angular se formula, entonces puede utilizarse el principio de impulso y cantidad de movimiento para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo.

$$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m(\mathbf{v}_G)_2 \qquad (\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2$$

$$\mathbf{H}_O = \int_m \boldsymbol{\rho}_O \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_O)\, dm$$

Punto fijo O

$$\mathbf{H}_G = \int_m \boldsymbol{\rho}_G \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_G)\, dm$$

Centro de masa

$$\mathbf{H}_A = \boldsymbol{\rho}_{G/A} \times m\mathbf{v}_G + \mathbf{H}_G$$

Punto arbitrario

donde

$$H_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z$$

$$H_y = -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z$$

$$H_z = -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

Principio de trabajo y energía

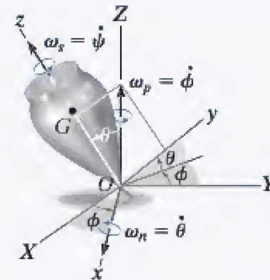
La energía cinética de un cuerpo en general se determina con respecto a un punto fijo o centro de masa del cuerpo.

$$T = \tfrac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \tfrac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \tfrac{1}{2}I_z\omega_z^2$$

Punto fijo

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \tfrac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \tfrac{1}{2}I_z\omega_z^2$$

Centro de masa

Estas formulaciones pueden utilizarse junto con el principio de trabajo y energía para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y desplazamiento.	$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$
Ecuaciones de movimiento Existen tres ecuaciones escalares de movimiento de traslación de un cuerpo rígido que se desplaza en tres dimensiones. Las tres ecuaciones escalares de movimiento de rotación dependen del movimiento de la referencia x, y, z. Con mucha frecuencia, estos ejes están orientados de modo que son ejes de inercia principales. Si los ejes están fijos en y se mueven junto con el cuerpo de modo que $\Omega = \omega$, entonces las ecuaciones se conocen como ecuaciones de movimiento de Euler. Un diagrama de cuerpo libre siempre deberá acompañar a la aplicación de las ecuaciones de movimiento.	$\Sigma F_x = m(a_G)_x$ $\Sigma F_y = m(a_G)_y$ $\Sigma F_z = m(a_G)_z$ $\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z$ $\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x$ $\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y$ $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$ $\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - I_y\Omega_z\omega_y + I_z\Omega_y\omega_z$ $\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - I_z\Omega_x\omega_z + I_x\Omega_z\omega_x$ $\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - I_x\Omega_y\omega_x + I_y\Omega_x\omega_y$ $\boldsymbol{\Omega} \neq \boldsymbol{\omega}$
Movimiento giroscópico El movimiento angular de un giroscopio se describe mejor por medio de los tres ángulos de Euler ϕ, θ y ψ. Las componentes de la velocidad angular se llaman precesión $\dot{\phi}$, nutación $\dot{\theta}$ y rotación $\dot{\psi}$. Si $\dot{\theta} = 0$ y $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ son constantes, entonces el movimiento se conoce como precesión constante. La rotación de un rotor de giro es la responsable de evitar que el rotor caiga, y en cambio hace que precese respecto de un eje vertical. Este fenómeno se llama efecto giroscópico.	 $\Sigma M_x = -I\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + I_z\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})$ $\Sigma M_y = 0,\ \Sigma M_z = 0$
Movimiento sin par de torsión Un cuerpo sometido a sólo una fuerza de gravitación no tendrá momentos actuando en él con respecto a su centro de masa, y por tanto el movimiento se describe como movimiento sin par de torsión. La cantidad de movimiento angular del cuerpo con respecto a su centro de masa permanecerá constante. Esto hace que el cuerpo tenga tanto rotación como precesión. El movimiento depende de la magnitud del momento de inercia de un cuerpo simétrico con respecto al eje de rotación I_z, *versus* aquél con respecto a un eje perpendicular I.	$\theta = \text{constante}$ $\dot{\phi} = \dfrac{H_G}{I}$ $\dot{\psi} = \dfrac{I - I_z}{II_z} H_G \cos\theta$



Las suspensiones de resorte inducen vibraciones en vehículos en movimiento, como en este carro de ferrocarril. Para predecir su comportamiento debemos analizar las vibraciones.

Vibraciones

22

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Analizar la vibración de un grado de libertad no amortiguada de un cuerpo rígido por medio de la ecuación de movimiento y métodos de energía.
- Analizar la vibración forzada no amortiguada y la vibración forzada viscosa amortiguada.

*22.1 Vibración libre no amortiguada

Una *vibración* es el movimiento periódico de un cuerpo o sistema de cuerpos conectados desplazados de una posición de equilibrio. En general, existen dos tipos de vibración, libre y forzada. La *vibración libre* ocurre cuando el movimiento se mantiene por fuerzas gravitacionales o elásticas, como el movimiento oscilatorio de un péndulo o la vibración de una barra elástica. La *vibración forzada* es provocada por una fuerza externa periódica o intermitente aplicada al sistema. Ambos tipos de vibración pueden ser amortiguados o no amortiguados. Las vibraciones *no amortiguadas* pueden continuar por tiempo indefinido porque los efectos de fricción se omiten en el análisis. Como en realidad tanto las fuerzas de fricción internas como las externas están presentes, el movimiento de todos los cuerpos vibratorios de hecho es *amortiguado*.

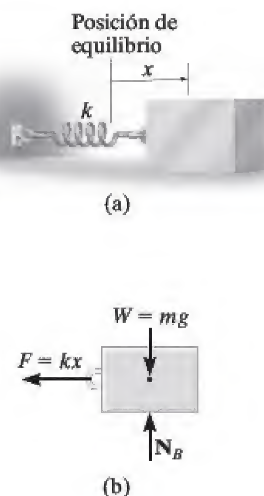


Fig. 22-1

El tipo más simple de movimiento vibratorio es la vibración libre no amortiguada representada por el modelo de bloque y resorte que se ilustra en la figura 22-1*a*. El movimiento de vibración ocurre cuando el bloque se suelta desde una posición desplazada x de modo que el resorte tira del bloque. Éste alcanzará una velocidad de modo que dejará su posición de equilibrio cuando $x = 0$, y siempre que la superficie de soporte esté lisa, el bloque oscilará de un lado a otro.

La trayectoria del movimiento dependiente del tiempo del bloque puede determinarse con la ecuación de movimiento al bloque cuando está en la posición desplazada x. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 22-1*b*. La fuerza de restauración elástica $F = kx$ siempre está dirigida hacia la posición de equilibrio, mientras que se supone que la aceleración $\mathbf{a}$ actúe en la dirección del *desplazamiento positivo*. Como $a = d^2x/dt^2 = \ddot{x}$, tenemos

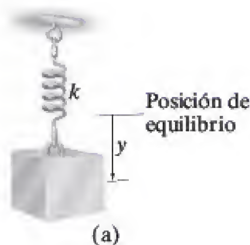
$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad -kx = m\ddot{x}$$

Observe que la aceleración es proporcional al desplazamiento del bloque. El movimiento descrito de esta manera se llama *movimiento armónico simple*. Al reordenar los términos en una "forma estándar" obtenemos

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{22-1}$$

La constante ω_n se llama *frecuencia natural*, y en este caso

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{22-2}$$



La ecuación 22-1 también puede obtenerse si consideramos que el bloque está colgado de modo que el desplazamiento y se mide a partir de la *posición de equilibrio* del bloque, figura 22-2*a*. Cuando el bloque está en equilibrio, el resorte ejerce una fuerza dirigida hacia arriba de $F = W = mg$ en el bloque. Por consiguiente, cuando el bloque se desplaza una distancia y hacia abajo de esta posición, la magnitud de la fuerza del resorte es $F = W + ky$, figura 22-2*b*. Al aplicar la ecuación de movimiento obtenemos

F = W + ky
W
(b)

Fig. 22-2

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad -W - ky + W = m\ddot{y}$$

o bien

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = 0$$

la cual es de la misma forma que la ecuación 22-1, con ω_n es definida por la ecuación 22-2.

La ecuación 22-1 es una ecuación diferencial lineal de segundo grado homogénea con coeficientes constantes. Se puede demostrar, por medio de los métodos de ecuaciones diferenciales, que la solución general es

$$x = A \operatorname{sen} \omega_n t + B \cos \omega_n t \tag{22-3}$$

Aquí A y B representan dos constantes de integración. La velocidad y aceleración del bloque se determinan por el cálculo de derivadas con respecto al tiempo sucesivas, de lo cual resulta

$$v = \dot{x} = A\omega_n \cos \omega_n t - B\omega_n \operatorname{sen} \omega_n t \tag{22-4}$$

$$a = \ddot{x} = -A\omega_n^2 \operatorname{sen} \omega_n t - B\omega_n^2 \cos \omega_n t \tag{22-5}$$

Cuando las ecuaciones 22-3 y 22-5 se sustituyen en la ecuación 22-1, la ecuación diferencial se satisface, lo que demuestra que la ecuación 22-3 sí es la solución de la ecuación 22-1.

Las constantes de integración en la ecuación 22-3 en general se determinan a partir de las condiciones iniciales del problema. Por ejemplo, suponga que el bloque de la figura 22-1*a* se ha desplazado una distancia x_1 a la derecha de su posición de equilibrio y que eso le imprime una velocidad inicial (positiva) $\mathbf{v}_1$ dirigida a la derecha. Al sustituir $x = x_1$ cuando $t = 0$ en la ecuación 22-3 se obtiene $B = x_1$. Y como $v = v_1$ cuando $t = 0$, utilizando la ecuación 22-4 obtenemos $A = v_1/\omega_n$. Si estos valores se sustituyen en la ecuación 22-3, la ecuación que describe el movimiento se hace

$$x = \frac{v_1}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t + x_1 \cos \omega_n t \tag{22-6}$$

La ecuación 22-3 también puede expresarse en función de un movimiento senoidal simple. Para demostrar esto, sea

$$A = C \cos \phi \tag{22-7}$$

y

$$B = C \operatorname{sen} \phi \tag{22-8}$$

donde C y ϕ son constantes nuevas que se determinarán en lugar de A y B. Al sustituir en la ecuación 22-3 obtenemos

$$x = C \cos \phi \operatorname{sen} \omega_n t + C \operatorname{sen} \phi \cos \omega_n t$$

Y como $\operatorname{sen}(\theta + \phi) = \operatorname{sen} \theta \cos \phi + \cos \theta \operatorname{sen} \phi$, entonces

$$x = C \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \tag{22-9}$$

22

Si esta ecuación se traza sobre un eje x *versus* $\omega_n t$, se obtiene la gráfica que se muestra en la figura 22-3. El desplazamiento máximo del

bloque a partir de su posición de equilibrio se define como la *amplitud* de vibración. De acuerdo con la figura o la ecuación 22-9 la amplitud es C. El ángulo ϕ se llama *ángulo de fase* puesto que representa la cantidad en la que la curva está desplazada del origen cuando $t = 0$. Podemos relacionar estas dos constantes con A y B por medio de las ecuaciones 22-7 y 22-8. Al elevar al cuadrado y sumar estas dos ecuaciones, la amplitud es

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \tag{22-10}$$

Si la ecuación 22-8 se divide entre la ecuación 22-7, el ángulo de fase es por tanto

$$\phi = \tan^{-1}\frac{B}{A} \tag{22-11}$$

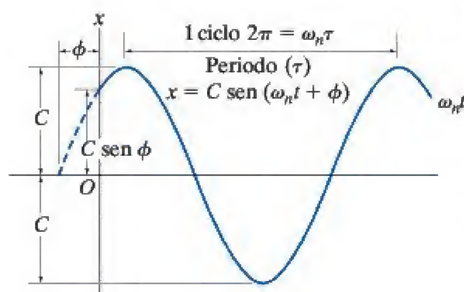


Fig. 22-3

Observe que la curva seno, ecuación 22-9, completa un *ciclo* en el tiempo $t = \tau$ (tau) cuando $\omega_n\tau = 2\pi$, o

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} \tag{22-12}$$

Este intervalo se llama *periodo*, figura 22-3. Con la ecuación 22-2, el periodo también puede representarse como

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{22-13}$$

Por último, la *frecuencia* f se define como el número de ciclos completados por unidad de tiempo, lo cual es el recíproco del periodo; es decir,

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_n}{2\pi} \tag{22-14}$$

o

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{22-15}$$

La frecuencia se expresa en ciclos/s. Esta relación de unidades se llama *hertz* (Hz), donde 1 Hz = 1 ciclo/s = 2π rad/s.

Cuando un cuerpo o sistema de cuerpos conectados experimenta un desplazamiento inicial a partir de su posición de equilibrio y se deja libre, vibrará con una *frecuencia natural*, ω_n. Siempre que el sistema tenga un grado de libertad, es decir, que se requiera sólo una coordenada para especificar por completo la posición del sistema en cualquier momento, entonces el movimiento vibratorio tendrá las mismas características que el movimiento armónico simple del bloque y resorte que se acaban de presentar. En consecuencia, una ecuación diferencial de la misma "forma estándar" que la ecuación 22-1 describe el movimiento, es decir,

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{22-16}$$

Por consiguiente, si se conoce la frecuencia natural ω_n, el periodo de vibración τ, la frecuencia natural f y otras características de vibración pueden establecerse con las ecuaciones 22-3 a 22-15.

Puntos importantes

- La vibración libre ocurre cuando el movimiento se mantiene por fuerzas gravitacionales o de restauración elástica.
- La amplitud es el desplazamiento máximo del cuerpo.
- El periodo es el tiempo requerido para completar un ciclo.
- La frecuencia es el número de ciclos por unidad de tiempo, donde 1 Hz = 1 ciclo/s.
- Sólo se requiere una coordenada de posición para describir la ubicación de un sistema de un grado de libertad.

Procedimiento para el análisis

Como en el caso del bloque y el resorte, la frecuencia natural ω_n de un cuerpo o sistema de cuerpos conectados que tiene un grado único de libertad se determina por el siguiente procedimiento:

Diagrama de cuerpo libre.

- Trace el diagrama de cuerpo libre del cuerpo cuando éste está desplazado una *pequeña cantidad* de su posición de equilibrio.
- Localice el cuerpo con respecto a su posición de equilibrio por medio de una *coordenada inercial* q apropiada. La aceleración del centro de masa del cuerpo $\mathbf{a}_G$ o la aceleración angular del cuerpo $\boldsymbol{\alpha}$ deberán tener un sentido de dirección supuesto, el cual está en la *dirección positiva* de la coordenada de posición.
- Si se tiene que utilizar la ecuación de movimiento de rotación $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$, entonces puede ser útil dibujar además el diagrama cinético puesto que gráficamente incluye los componentes $m(\mathbf{a}_G)_x$, $m(\mathbf{a}_G)_y$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$, lo cual hace que sea conveniente para visualizar los términos requeridos en la suma de momentos $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$.

Ecuación de movimiento.

- Aplique la ecuación de movimiento para relacionar las fuerzas de *restauración* elásticas o gravitacionales y los momentos de par que actúan en el cuerpo con su movimiento acelerado.

Cinemática.

- Exprese con cinemática el movimiento acelerado del cuerpo en función de la segunda derivada con respecto al tiempo de la coordenada de posición, $\ddot{q}$.
- Sustituya el resultado en la ecuación de movimiento y determine ω_n al reordenar los términos de modo que la ecuación resultante tenga la "forma estándar" $\ddot{q} + \omega_n^2 q = 0$.

22

EJEMPLO 22.1



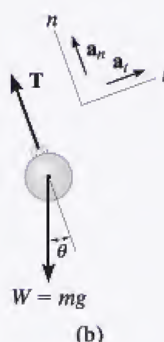


Fig. 22-4

Determine el periodo de oscilación del péndulo simple que se muestra en la figura 22-4*a*. La bola tiene una masa *m* y está atada a una cuerda de longitud *l*. Ignore el tamaño de la bola.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. El movimiento del sistema se relacionará con la coordenada de posición $(q =)\theta$, figura 22-4*b*. Cuando la bola se desplaza un pequeño ángulo θ, la *fuerza de restauración* que actúa en ella es creada por la componente tangencial de su peso, mg sen θ. Además, $\mathbf{a}_t$ actúa en la dirección de *s creciente* (o θ).

Ecuación de movimiento. Al aplicar la ecuación de movimiento en la *dirección tangencial*, ya que implica la fuerza de restauración, obtenemos

$$+\nearrow\Sigma F_t = ma_t; \qquad -mg\,\text{sen}\,\theta = ma_t \tag{1}$$

Cinemática. $a_t = d^2s/dt^2 = \ddot{s}$. Además, s puede relacionarse con θ por medio de la ecuación $s = l\theta$, de modo que $a_t = l\ddot{\theta}$. Por consiguiente, la ecuación 1 se reduce a

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\text{sen}\,\theta = 0 \tag{2}$$

La solución de esta ecuación implica el uso de una integral elíptica. Para *desplazamientos pequeños*, sin embargo, sen $\theta \approx \theta$, en cuyo caso

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{3}$$

Al comparar esta ecuación con la ecuación 22-16 ($\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$), se ve que $\omega_n = \sqrt{g/l}$. Según la ecuación 22-12, el periodo requerido para que la bola realice una oscilación completa es por consiguiente

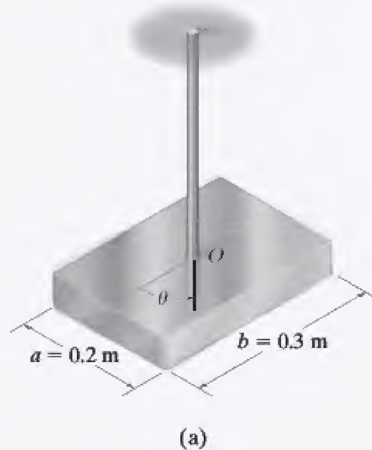
$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Este interesante resultado, descubierto originalmente por Galileo Galilei mediante experimentos, indica que el periodo depende sólo de la longitud de la cuerda y no de la masa de la bola del péndulo o del ángulo θ.

NOTA: la solución de la ecuación 3 la da la ecuación 22-3, donde $\omega_n = \sqrt{g/l}$ y θ se sustituye por x. Al igual que el bloque y el resorte, las constantes A y B en este problema pueden determinarse si, por ejemplo, conocemos el desplazamiento y velocidad de la bola en un instante dado.

EJEMPLO 22.2

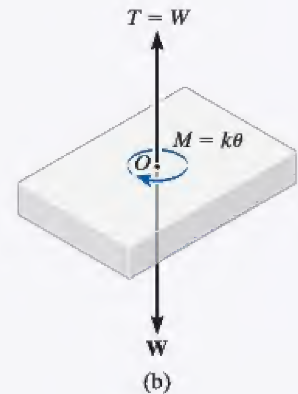
La placa rectangular de 10 kg que se muestra en la figura 22-5*a* está suspendida por su centro de una barra cuya rigidez torsional es $k = 1.5\ \text{N}\cdot\text{m/rad}$. Determine el periodo natural de vibración de la placa cuando experimenta un pequeño desplazamiento angular θ su plano.



(a)

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Figura 22-5*b*. Como la placa se desplaza en su propio plano, el momento de *restauración* torsional creado por la barra es $M = k\theta$. Este momento actúa en la dirección opuesta al desplazamiento angular θ. La aceleración angular $\ddot{\theta}$ actúa en la dirección de θ *positivo*.



(b)

Fig. 22-5

Ecuación de movimiento.

$$\Sigma M_O = I_O\alpha; \qquad -k\theta = I_O\ddot{\theta}$$

o

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{I_O}\theta = 0$$

Como esta ecuación está en la "forma estándar", la frecuencia natural es $\omega_n = \sqrt{k/I_O}$.

Según la tabla en la cubierta posterior interna, el momento de inercia de la placa con respecto a un eje que coincide con la barra es $I_O = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$. Por consiguiente,

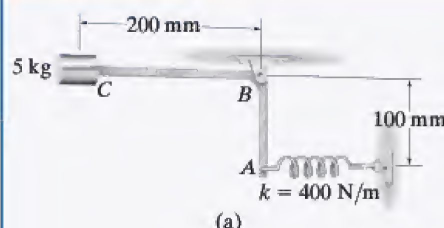
$$I_O = \frac{1}{12}(10\ \text{kg})[(0.2\ \text{m})^2 + (0.3\ \text{m})^2] = 0.1083\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

El periodo natural de vibración es por consiguiente,

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.1083}{1.5}} = 1.69\ \text{s} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

22

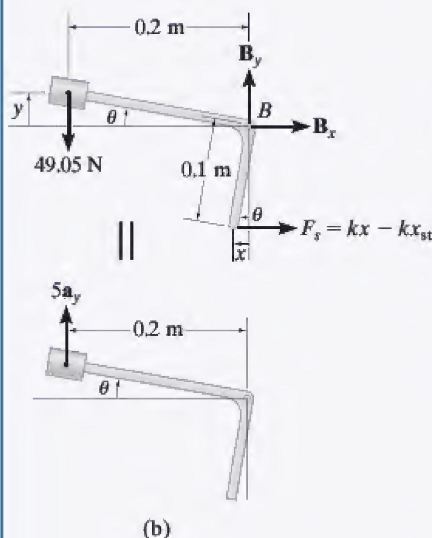
EJEMPLO 22.3



La barra acodada que se muestra en la figura 22-6*a* tiene una masa insignificante y sostiene un collarín de 5 kg en su extremo. Si la barra está en la posición de equilibrio mostrada, determine el periodo de vibración natural para el sistema.

SOLUCIÓN

Diagramas de cuerpo libre y cinético. Figura 22-6*b*. Aquí la barra aparece desplazada un pequeño ángulo θ de la posición de equilibrio. Como el resorte se somete a una compresión inicial x_{st} en la posición de equilibrio, entonces cuando experimenta el desplazamiento $x > x_{st}$ el resorte ejerce una fuerza $F_s = kx - kx_{st}$ en la barra. Para obtener la "forma estándar", ecuación 22-16, $5\mathbf{a}_y$ debe actuar *hacia arriba*, lo cual concuerda con el desplazamiento θ positivo.



Ecuación de movimiento. Los momentos se sumarán con respecto al punto B para eliminar la reacción desconocida en este punto. Como θ es pequeño,

$$\circlearrowleft+\Sigma M_B = \Sigma(\mathcal{M}_k)_B;$$

$$kx(0.1\text{ m}) - kx_{st}(0.1\text{ m}) + 49.05\text{ N}(0.2\text{ m}) = -(5\text{ kg})a_y(0.2\text{ m})$$

El segundo término del lado izquierdo, $-kx_{st}(0.1\text{ m})$, representa el momento creado por la fuerza del resorte, la cual es necesaria para mantener el collarín en *equilibrio*, es decir, en $x = 0$. Como este momento es igual y opuesto al momento de 49.05 N(0.2 m) creado por el peso del collarín, estos dos términos se eliminan en la ecuación anterior, de modo que

$$kx(0.1) = -5a_y(0.2) \tag{1}$$

Cinemática. La deformación del resorte y la posición del collarín pueden relacionarse con el ángulo θ, figura 22-6*c*. Como θ es pequeño, $x = (0.1\text{ m})\theta$ y $y = (0.2\text{ m})\theta$. Por consiguiente, $a_y = \ddot{y} = 0.2\ddot{\theta}$. Sustituyendo en la ecuación 1 obtenemos

$$400(0.1\theta)\,0.1 = -5(0.2\ddot{\theta})0.2$$

Al reescribir esta ecuación en la "forma estándar" obtenemos

$$\ddot{\theta} + 20\theta = 0$$

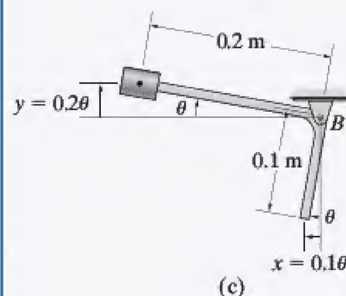


Fig. 22-6

Comparada con $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$ (ecuación 22-16), tenemos

$$\omega_n^2 = 20 \qquad \omega_n = 4.47\text{ rad/s}$$

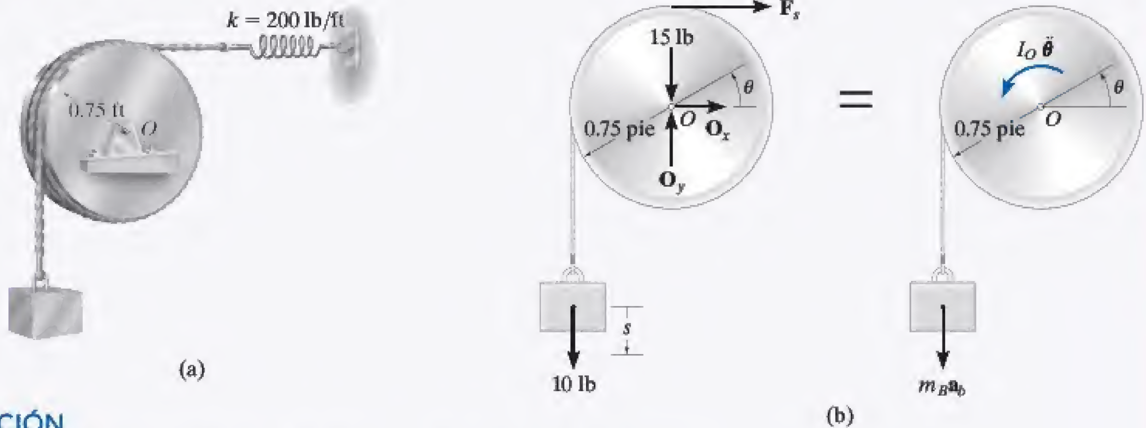
El periodo natural de vibración es por consiguiente,

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{4.47} = 1.40\text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

22

EJEMPLO 22.4

Se suspende un bloque de 10 lb de una cuerda que pasa sobre un disco de 15 lb como se muestra en la figura 22-7*a*. El resorte tiene una rigidez $k = 200$ lb/pie. Determine el periodo natural de vibración para el sistema.



SOLUCIÓN

Diagramas de cuerpo libre y cinético. Figura 22-7*b*. El *sistema* se compone del disco, el cual experimenta una rotación definida por el ángulo θ, y el bloque, el cual se traslada en una cantidad s. El vector $I_O\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ actúa en la dirección de θ *positivo*, y por consiguiente, $m_B\mathbf{a}_b$ actúa dirigida hacia abajo en la dirección de s *positivo*.

Ecuación de movimiento. Al sumar los momentos con respecto al punto O para eliminar las reacciones $\mathbf{O}_x$ y $\mathbf{O}_y$, y habida cuenta de que $I_O = \frac{1}{2}mr^2$, obtenemos

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O;$$

$$10\text{ lb}(0.75\text{ pie}) - F_s(0.75\text{ pie})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{15\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}\right)(0.75\text{ pie})^2\ddot{\theta} + \left(\frac{10\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}\right)a_b(0.75\text{ pie}) \qquad (1)$$

Cinemática. Como se muestra en el diagrama cinemático en la figura 22-7*c*, un pequeño desplazamiento positivo θ del disco hace que el bloque baje una cantidad $s = 0.75\theta$, por consiguiente, $a_b = \ddot{s} = 0.75\ddot{\theta}$. Cuando $\theta = 0°$, la fuerza del resorte requerida para el *equilibrio* del disco es de 10 lb dirigida a la derecha. En la posición θ, la fuerza del resorte es $F_s = (200\text{ lb/pie})(0.75\theta\text{ pie}) + 10\text{ lb}$. Al sustituir estos resultados en la ecuación 1 y simplificar, obtenemos

$$\ddot{\theta} + 368\theta = 0$$

En consecuencia,

$$\omega_n^2 = 368 \qquad \omega_n = 19.18\text{ rad/s}$$

Por tanto, el periodo natural de vibración es

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{19.18} = 0.328\text{ s} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

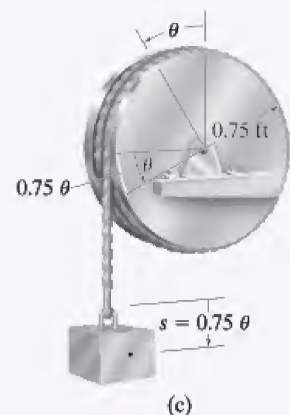


Fig. 22-7

PROBLEMAS

•**22-1.** Un resorte es alargado 175 mm por un bloque de 8 kg. Si el bloque se desplaza 100 mm hacia abajo desde su posición de equilibrio y se le imprime una velocidad dirigida hacia abajo de 1.50 m/s, determine la ecuación diferencial que describe el movimiento. Suponga que el desplazamiento positivo es hacia abajo. Además, determine la posición del bloque cuando $t = 0.22$ s.

22-2. Cuando se suspende un bloque de 2 kg de un resorte, éste se alarga una distancia de 40 mm. Determine la frecuencia y el periodo de vibración de un bloque de 0.5 kg unido al mismo resorte.

22-3. Un bloque de 8 lb está suspendido de un resorte cuya rigidez es $k = 40$ lb/pie. Si el bloque es empujado $y = 0.2$ pie hacia arriba de su posición de equilibrio y luego se suelta del reposo, determine la ecuación que describe el movimiento. ¿Cuáles son la amplitud y frecuencia natural de la vibración? Suponga que el desplazamiento positivo es hacia abajo.

***22-4.** La rigidez de un resorte es de 800 N/m. Si se conecta un bloque de 2 kg al resorte y luego es empujado 50 mm por encima de su posición de equilibrio y se suelta del reposo, determine la ecuación que describe el movimiento del bloque. Suponga que el desplazamiento es positivo hacia abajo.

•**22-5.** Un bloque de 2 kg se suspende de un resorte cuya rigidez es de 800 N/m. Si al bloque se le imprime una velocidad hacia arriba de 2 m/s cuando está desplazado 150 mm hacia abajo de su posición de equilibrio, determine la ecuación que describe el movimiento. ¿Cuál es la amplitud del movimiento? Suponga que el desplazamiento positivo es hacia abajo.

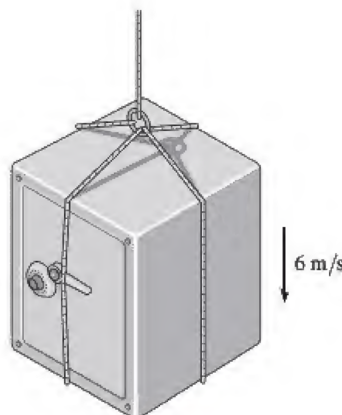
22-6. Un resorte es alargado 200 mm por un bloque de 15 kg. Si el bloque se desplaza 100 mm hacia abajo de su posición de equilibrio y se le imprime una velocidad hacia abajo de 0.75 m/s, determine la ecuación que describe el movimiento. ¿Cuál es el ángulo de fase? Suponga que el desplazamiento positivo es hacia abajo.

22-7. Se suspende un bloque de 6 kg de un resorte cuya rigidez es de $k = 200$ N/m. Si al bloque se le imprime una velocidad hacia arriba de 0.4 m/s cuando está a 75 mm por encima de su posición de equilibrio, determine la ecuación que describe el movimiento y el desplazamiento máximo hacia arriba del bloque medido con respecto a la posición de equilibrio. Suponga que el desplazamiento positivo es hacia abajo.

22

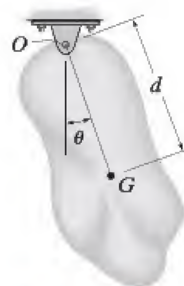
***22-8.** Se suspende un bloque de 3 kg de un resorte cuya rigidez es de $k = 200$ N/m. Si el bloque es empujado 50 mm hacia arriba de su posición de equilibrio y luego se suelta del reposo, determine la ecuación que describe el movimiento. ¿Cuáles son la amplitud y la frecuencia de la vibración? Suponga que el desplazamiento positivo es hacia abajo.

•**22-9.** Se utiliza un cable para suspender la caja fuerte de 800 kg. Si la caja se baja a 6 m/s cuando el motor que controla el cable se detiene de repente, determine la tensión máxima en el cable y la frecuencia de vibración de la caja fuerte. Ignore la masa del cable y suponga que es elástico, de modo que se alarga 20 mm cuando se somete a una tensión de 4 kN.



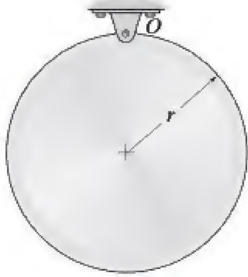
Prob. 22-9

22-10. El cuerpo de forma irregular tiene una masa m, su centro de masa en G y un radio de giro con respecto a G de k_G. Si se desplaza una pequeña cantidad θ de su posición de equilibrio y se suelta, determine el periodo natural de vibración.



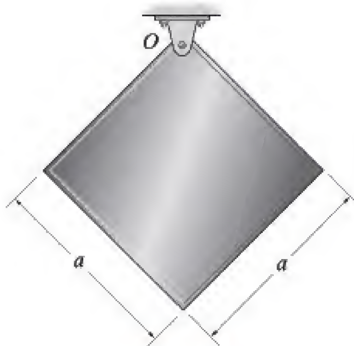
Prob. 22-10

22-11. El disco tiene una masa m y está sujeto en O por medio de un pasador. Determine el periodo natural de vibración si se desplaza una pequeña cantidad y se suelta.



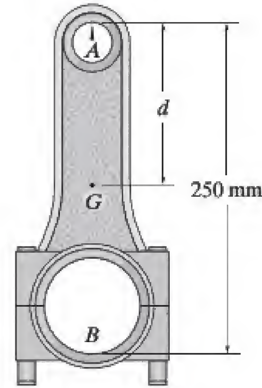
Prob. 22-11

***22-12.** La placa cuadrada tiene una masa m y cuelga de su esquina de un pasador O. Determine el periodo natural de vibración si se desplaza una pequeña cantidad y se suelta.



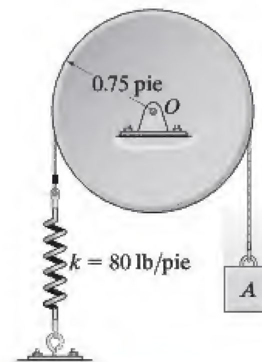
Prob. 22-12

•**22-13.** La biela está sostenida por una cuña o fiel de soporte en A y el periodo de vibración es $\tau_A = 3.38$ s. Luego se retira y se le hace girar 180° de modo que esté sostenida por la cuña en B. En este caso el periodo de vibración es $\tau_B = 3.96$ s. Determine la ubicación de d del centro de gravedad G, y calcule el radio de giro k_G.



Prob. 22-13

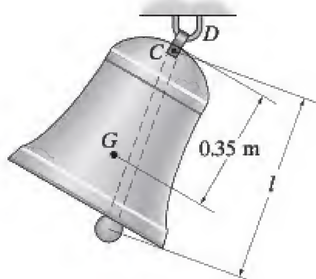
22-14. El disco que pesa 15 lb está conectado por un pasador en su centro O y sostiene el bloque A que pesa 3 lb. Si la banda que pasa sobre el disco no se desliza en su superficie de contacto, determine el periodo natural de vibración del sistema.



Prob. 22-14

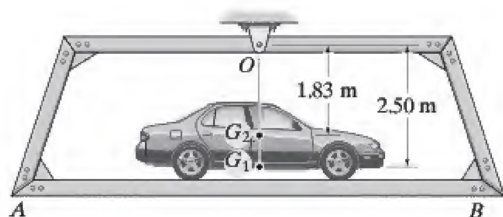
22

22-15. La campana tiene una masa de 375 kg, un centro de masa en G y un radio de giro con respecto al punto D de $k_D = 0.4$ m. El badajo es una barra delgada sujeta en la parte interna de la campana en C. Si se fija una masa de 8 kg en el extremo de la barra, determine su longitud l de modo que la campana "repique silenciosa", es decir, de modo que el periodo natural de vibración del badajo sea el mismo que el de la campana. Para el cálculo, ignore la pequeña distancia entre C y D e ignore la masa de la barra.



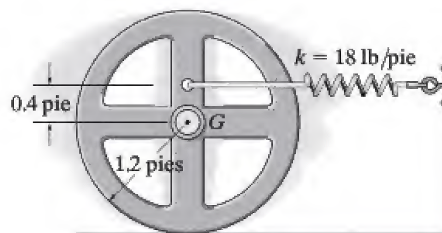
Prob. 22-15

*22-16. Cuando la plataforma AB está vacía tiene una masa de 400 kg, centro de masa en G_1 y periodo natural de oscilación $\tau_1 = 2.38$ s. Si un automóvil de 1.2 Mg de masa y centro de masa en G_2, se coloca sobre la plataforma, el periodo natural de oscilación cambia a $\tau_2 = 3.16$ s. Determine el momento de inercia del automóvil con respecto a un eje que pasa por G_2.



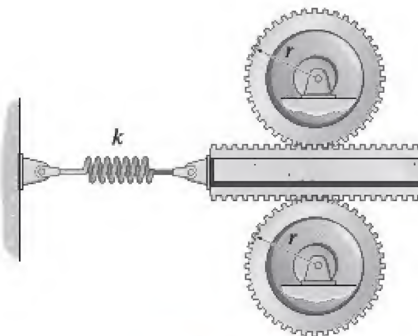
Prob. 22-16

•22-17. La rueda de 50 lb tiene un radio de giro con respecto a su centro de masa G de $k_G = 0.7$ pie. Determine la frecuencia de vibración si se desplaza un poco de la posición de equilibrio y se suelta. Suponga que no hay deslizamiento.



Prob. 22-17

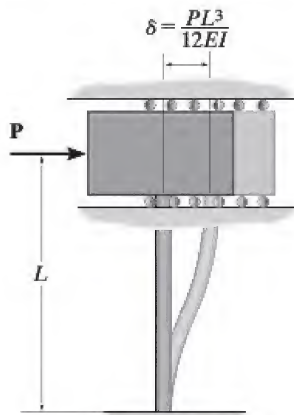
22-18. Cada uno de los dos engranes idénticos tiene una masa m y un radio de giro con respecto a su centro de masa de k_0. Están acoplados con la cremallera, cuya masa es M y está conectada a un resorte de rigidez k. Si la cremallera se desplaza un poco horizontalmente, determine el periodo natural de oscilación.



Prob. 22-18

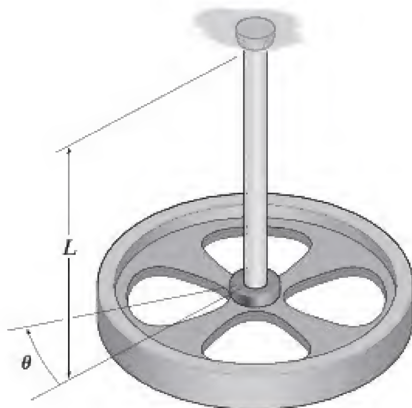
22

22-19. En la "teoría de la masa concentrada" un edificio de un piso puede ser modelado de tal modo que toda su masa esté concentrada en su techo, el cual está soportado por una columna en voladizo de masa insignificante como se muestra. Cuando se aplica una fuerza horizontal **P** al modelo, la columna se flexiona una cantidad $\delta = PL^3/12EI$, donde L es la longitud efectiva de la columna, E es el módulo de Young de elasticidad para el material e I es el momento de inercia de la sección transversal de la columna. Si la masa concentrada es m, determine la frecuencia de vibración en función de estos parámetros.



Prob. 22-19

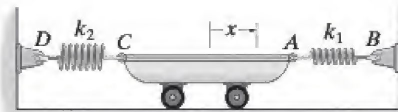
***22-20.** Un volante de masa m, con radio de giro con respecto a su centro de masa de k_O, está suspendido de una flecha circular que tiene una resistencia torsional de $M = C\theta$. Si el volante experimenta un desplazamiento angular de θ y se deja libre, determine el periodo natural de oscilación.



Prob. 22-20

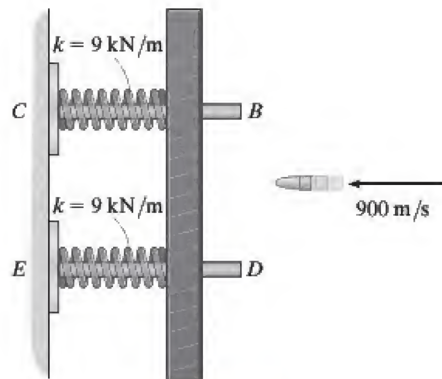
•22-21. La carretilla tiene una masa de m y está conectada a dos resortes, cada uno con rigidez de $k_1 = k_2 = k$, longitud no alargada de l_0 y longitud alargada de l cuando la carretilla está en la posición de equilibrio. Si la carretilla se desplaza una distancia $x = x_0$ de modo que ambos resortes permanecen sometidos a tensión ($x_0 < l - l_0$), determine la frecuencia natural de oscilación.

22-22. La carretilla tiene una masa de m y está conectada a dos resortes, cada uno con rigidez de k_1 y k_2, respectivamente. Si ambos resortes no están alargados cuando la carretilla está en la posición de equilibrio mostrada, determine la frecuencia natural de oscilación.



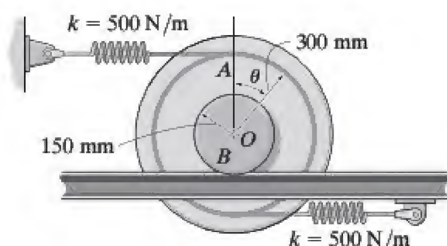
Probs. 22-21/22

22-23. El blanco de 3 kg se desliza libremente a lo largo de las guías horizontales lisas BC y DE, las cuales están "anidadas" en resortes, cada uno con rigidez de $k = 9$ kN/m. Si se dispara una bala de 60 g con una velocidad de 900 m/s y se incrusta en el blanco, determine la amplitud y frecuencia de oscilación del blanco.



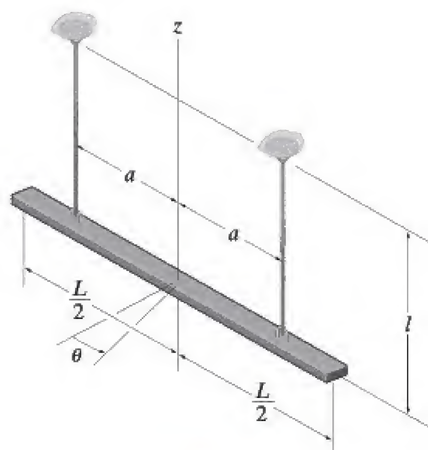
Prob. 22-23

***22-24.** Si el carrete experimenta un pequeño desplazamiento angular de θ y luego se deja libre, determine la frecuencia de oscilación. La masa del carrete es de 50 kg y su radio de giro con respecto a su centro de masa O es de $k_O = 250$ mm. El carrete rueda sin deslizarse.



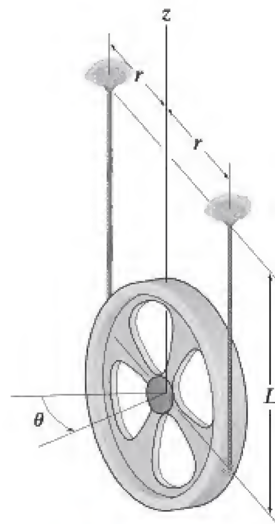
Prob. 22-24

•22-25. La barra delgada de masa m está sostenida por dos cuerdas de longitud igual. Si se le imparte un pequeño desplazamiento angular de θ con respecto al eje vertical y se suelta, determine el periodo natural de oscilación.



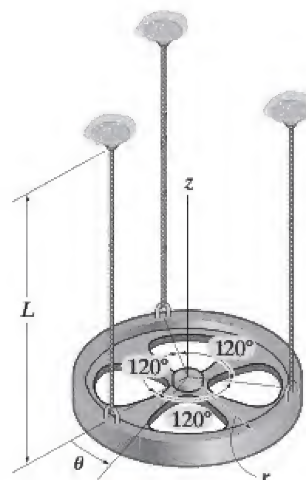
Prob. 22-25

22-26. Una rueda de masa m está suspendida de dos cuerdas de igual longitud como se muestra. Cuando se le imparte un pequeño desplazamiento angular de θ con respecto al eje z y deja libre, se observa que el periodo de oscilación es τ. Determine el radio de giro de la rueda respecto del eje z.



Prob. 22-26

22-27. Una rueda de masa m está suspendida de tres cuerdas de longitud igual. Cuando experimenta un pequeño desplazamiento angular de θ con respecto al eje z y se deja libre, se observa que el periodo de oscilación es τ. Determine el radio de giro de la rueda con respecto al eje z.



Prob. 22-27

*22.2 Métodos de energía

El movimiento armónico simple de un cuerpo, estudiado en la sección anterior, se debe sólo a fuerzas de restauración gravitacional y elásticas que actúan en el cuerpo. Como estas fuerzas son *conservadoras*, también es posible utilizar la ecuación de conservación de la energía para obtener la frecuencia natural de oscilación o periodo de vibración del cuerpo. Para demostrar cómo se hace esto, considere de nueva cuenta el modelo de bloque y resorte de la figura 22-8. Cuando el bloque se desplaza una distancia x de la posición de equilibrio, la energía cinética es $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ y la energía potencial es $V = \frac{1}{2}kx^2$. Como la energía se conserva, es necesario que

$$T + V = \text{constante}$$

$$\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \text{constante} \qquad (22\text{-}17)$$

La ecuación diferencial que describe el *movimiento acelerado* del bloque se obtiene por *diferenciación* de esta ecuación con respecto al tiempo, es decir,

$$m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

$$\dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0$$

Como la velocidad $\dot{x}$ no *siempre* es cero en un sistema sometido a vibración,

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad \omega_n = \sqrt{k/m}$$

la cual es la misma que la ecuación 22-1.

Si la ecuación de conservación de la energía se escribe para un *sistema de cuerpos conectados*, la frecuencia natural o la ecuación de movimiento también se determina mediante diferenciación con respecto al tiempo. *No* es *necesario* desmembrar el sistema para mostrar las fuerzas internas porque no realizan trabajo.

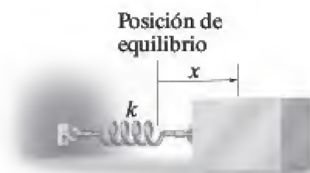


Fig. 22-8



La suspensión de un carro de ferrocarril se compone de un conjunto de resortes montados entre el armazón del carro y el porta ruedas. La suspensión le imprime al carro una frecuencia natural de vibración, que se puede determinar.

Procedimiento para el análisis

La frecuencia natural ω_n de un cuerpo o sistema de cuerpos conectados se determina al aplicar la ecuación de conservación de la energía por el siguiente procedimiento.

Ecuación de energía.

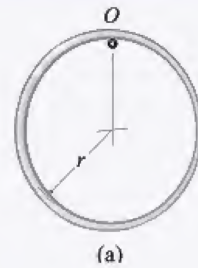
- Trace el cuerpo cuando está desplazado en una *pequeña cantidad* de su posición de equilibrio y defina la ubicación del cuerpo con respecto a su posición de equilibrio por medio de una coordenada de posición apropiada q.
- Formule la conservación de energía del cuerpo, $T + V =$ constante, en función de la coordenada de posición.
- En general, la energía cinética debe incluir tanto el movimiento de traslación como el de rotación del cuerpo, $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$, ecuación 18-2.
- La energía potencial es la suma de las energías gravitacional, elástica y potencial del cuerpo, $V = V_g + V_e$, ecuación 18-17. En particular, V_g deberá medirse con respecto a un plano de referencia para el cual $q = 0$ (posición de equilibrio).

Derivada con respecto al tiempo.

- Calcule la derivada con respecto al tiempo de la ecuación de energía con la regla de la cadena del cálculo y factorice los términos comunes. La ecuación diferencial resultante representa la ecuación de movimiento para el sistema. La frecuencia natural de ω_n se obtiene después de reordenar los términos en la "forma estándar" $\ddot{q} + \omega_n^2 q = 0$.

EJEMPLO 22.5

El aro delgado que se muestra en la figura 22-9*a* está sostenido por la clavija en O. Determine el periodo natural de oscilación para pequeñas amplitudes de oscilación. El aro tiene una masa m.

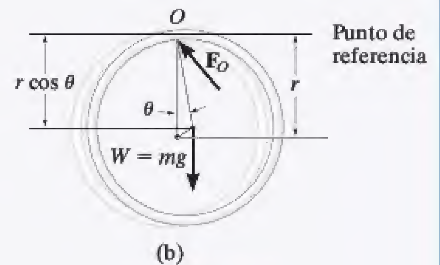


(a)

SOLUCIÓN

Ecuación de energía. En la figura 22-9*b* se muestra un diagrama del aro desplazado una pequeña cantidad $(q =)\theta$ de la posición de equilibrio. Con la tabla que aparece en la cubierta posterior interna y el teorema de ejes paralelos para determinar I_O, la energía cinética es

$$T = \tfrac{1}{2}I_O\omega_n^2 = \tfrac{1}{2}[mr^2 + mr^2]\dot{\theta}^2 = mr^2\dot{\theta}^2$$



(b)

Fig. 22-9

Si se coloca un plano de referencia horizontal a través del punto O, y luego en la posición desplazada, la energía potencial es

$$V = -mg(r\cos\theta)$$

La energía total en el sistema es

$$T + V = mr^2\dot{\theta}^2 - mgr\cos\theta$$

Derivada con respecto al tiempo.

$$mr^2(2\dot{\theta})\ddot{\theta} + mgr\,\text{sen}\,\theta\dot{\theta} = 0$$
$$mr\dot{\theta}(2r\ddot{\theta} + g\,\text{sen}\,\theta) = 0$$

Como $\dot{\theta}$ no siempre es igual a cero, con los términos entre paréntesis,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{2r}\text{sen}\,\theta = 0$$

Para un ángulo pequeño θ, sen $\theta \approx \theta$.

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{2r}\theta = 0$$
$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{2r}}$$

de modo que

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{2r}{g}} \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 22.6

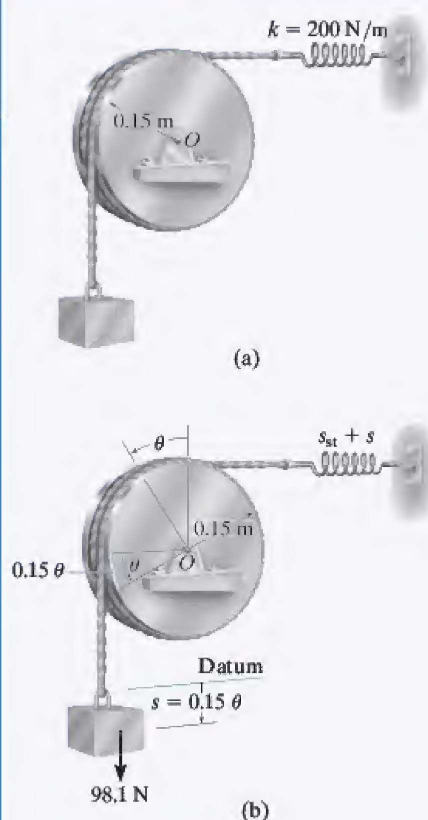


Fig. 22-10

Un bloque de 10 kg está suspendido de una cuerda enrollada alrededor de un disco de 5 kg como se muestra en la figura 22-10*a*. Si el resorte tiene una rigidez $k = 200$ N/m, determine el periodo natural de vibración para el sistema.

SOLUCIÓN

Ecuación de energía. En la figura 22-10*b* se muestra un diagrama del bloque y disco cuando están desplazados en cantidades respectivas s y θ de la posición de equilibrio. Como $s = (0.15 \text{ m})\theta$, entonces $v_b \approx \dot{s} = (0.15 \text{ m})\dot{\theta}$. Por tanto, la energía cinética del sistema es

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}m_b v_b^2 + \tfrac{1}{2}I_O\omega_d^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(10 \text{ kg})[(0.15 \text{ m})\dot{\theta}]^2 + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}(5 \text{ kg})(0.15 \text{ m})^2\right](\dot{\theta})^2 \\ &= 0.1406(\dot{\theta})^2 \end{aligned}$$

Si se establece el plano de referencia en la posición de equilibrio del bloque y se tiene en cuenta que el resorte se alarga s_{st} cuando está en equilibrio, la energía potencial es

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{2}k(s_{st} + s)^2 - Ws \\ &= \tfrac{1}{2}(200 \text{ N/m})[s_{st} + (0.15 \text{ m})\theta]^2 - 98.1 \text{ N}[(0.15 \text{ m})\theta] \end{aligned}$$

La energía total del sistema es por consiguiente,

$$T + V = 0.1406(\dot{\theta})^2 + 100(s_{st} + 0.15\theta)^2 - 14.715\theta$$

Derivada con respecto al tiempo.

$$0.28125(\dot{\theta})\ddot{\theta} + 200(s_{st} + 0.15\theta)0.15\dot{\theta} - 14.72\dot{\theta} = 0$$

Como $s_{st} = 98.1/200 = 0.4905$ m, la ecuación anterior se reduce a la "forma estándar"

$$\ddot{\theta} + 16\theta = 0$$

de modo que

$$\omega_n = \sqrt{16} = 4 \text{ rad/s}$$

Por tanto,

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{4} = 1.57 \text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

22

PROBLEMAS

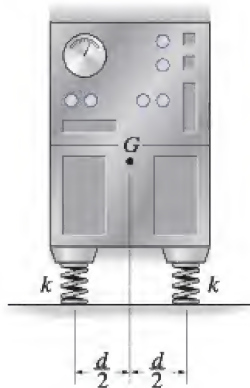
*22-28. Resuelva el problema 22-10 por medio de métodos de energía.

•22-29. Resuelva el problema 22-11 por medio de métodos de energía.

22-30. Resuelva el problema 22-12 por medio de métodos de energía.

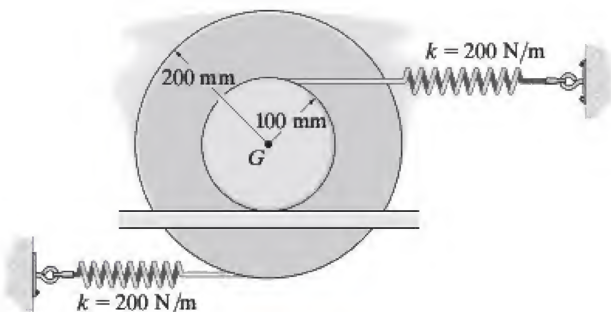
22-31. Resuelva el problema 22-14 por medio de métodos de energía.

*22-32. La máquina tiene una masa m y está sostenida de manera uniforme por *cuatro* resortes, cada uno con rigidez k. Determine el periodo natural de vibración vertical.



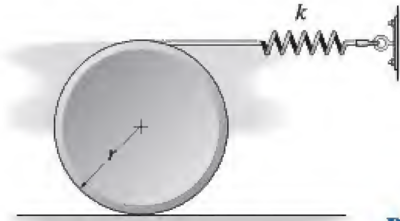
Prob. 22-32

•22-33. Determine la ecuación diferencial de movimiento del carrete de 15 kg. Suponga que no se desliza en la superficie de contacto cuando oscila. El radio de giro del carrete con respecto a su centro de masa es $k_G = 125$ mm. Originalmente los resortes no están alargados.



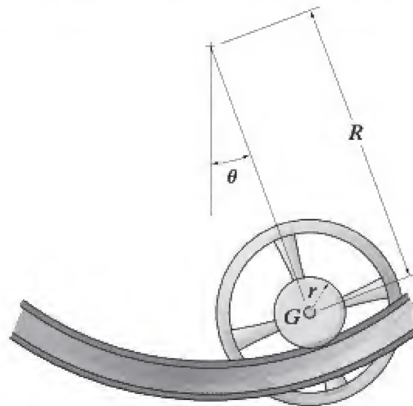
Prob. 22-33

22-34. Determine el periodo natural de vibración del disco de masa m y radio r. Suponga que no se desliza sobre la superficie de contacto cuando oscila.



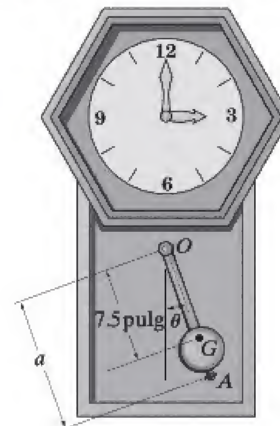
Prob. 22-34

22-35. Si la rueda experimenta un ligero desplazamiento angular de θ y se deja libre del reposo, se observa que oscila con un periodo natural de τ. Determine el radio de giro de la rueda con respecto a su centro de masa G. Su masa es m y rueda sobre los rieles sin deslizarse.



Prob. 22-35

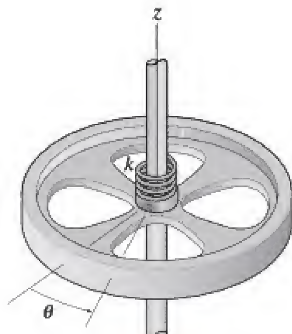
*22-36. Sin un tornillo ajustable, A, el péndulo de 1.5 lb tiene un centro de gravedad en G. Si se requiere que oscile con un periodo de 1 s, determine la distancia a del pasador O al tornillo. El radio de giro del péndulo con respecto a O es $k_O = 8.5$ pulg y el tornillo pesa 0.05 lb.



Prob. 22-36

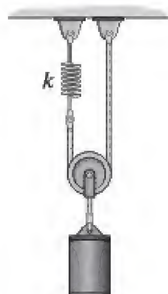
22

•**22-37.** Un resorte torsional de rigidez k está conectado a una rueda de masa M. Si la rueda experimenta un pequeño desplazamiento angular de θ respecto del eje z, determine el periodo natural de oscilación. El radio de giro de la rueda con respecto al eje z es k_z.



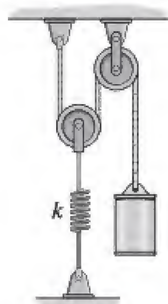
Prob. 22-37

22-38. Determine la frecuencia de oscilación del cilindro de masa m cuando se tira de él hacia abajo y luego se deja libre. Ignore la masa de la polea.



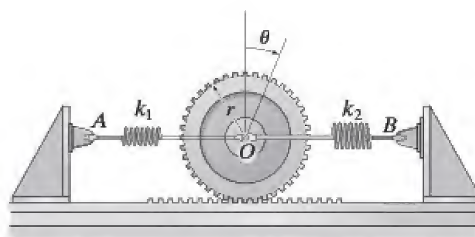
Prob. 22-38

22-39. Determine la frecuencia de oscilación del cilindro de masa m cuando se tira de él hacia abajo y se deja libre. Ignore la masa de las poleas pequeñas.



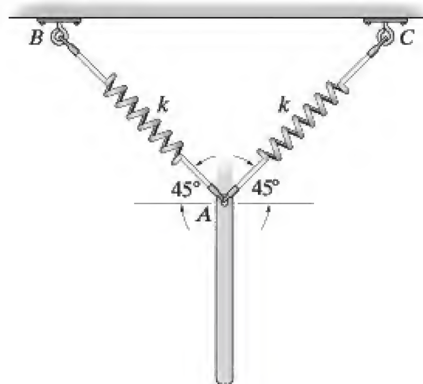
Prob. 22-39

***22-40.** El engrane de masa m tiene un radio de giro con respecto a su centro de masa O de k_O. La rigidez de los resortes es k_1 y k_2, respectivamente, y no están alargados cuando el engrane está en una posición de equilibrio. Si el engrane experimenta un pequeño desplazamiento angular de θ y luego se deja libre, determine su periodo natural de oscilación.



Prob. 22-40

22-41. La barra tiene una masa de 8 kg y está suspendida de dos resortes, de modo que cuando está en equilibrio los resortes forman un ángulo de 45° con la horizontal, como se muestra. Determine el periodo natural de vibración si la barra es jalada hacia abajo una corta distancia y luego se le deja libre. Cada resorte tiene una rigidez de $k = 40$ N/m.



Prob. 22-41

22

*22.3 Vibración forzada no amortiguada

Se considera que la vibración forzada no amortiguada es uno de los tipos más importantes de movimiento vibratorio en el campo de la ingeniería. Sus principios pueden utilizarse para describir el movimiento de muchos tipos de máquinas y estructuras.

Fuerza periódica. El bloque y resorte que se muestran en la figura 22-11*a* constituyen un modelo conveniente para representar las características vibratorias de un sistema sometido a una fuerza periódica $F = F_0 \operatorname{sen} \omega_0 t$. Esta fuerza tiene una amplitud de F_0 y una *frecuencia forzada* ω_0. El diagrama de cuerpo libre del bloque desplazado una distancia x se muestra en la figura 22-11*b*. Al aplicar la ecuación de movimiento, tenemos

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad F_0 \operatorname{sen} \omega_0 t - kx = m\ddot{x}$$

o bien

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\operatorname{sen} \omega_0 t \qquad (22\text{-}18)$$

Esta ecuación es una ecuación diferencial de segundo grado no homogénea. La solución general consta de una solución complementaria, x_c, *más* una solución particular, x_p.

La *solución complementaria* se determina al establecer el término del lado derecho de la ecuación 22-18 igual a cero y resolver la ecuación homogénea resultante. La ecuación 22-9 define la solución, es decir,

$$x_c = C \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \qquad (22\text{-}19)$$

donde ω_n es la frecuencia natural, $\omega_n = \sqrt{k/m}$, ecuación 22-2.

Como el movimiento es periódico, la *solución particular* de la ecuación 22-18 puede determinarse si se supone una solución de la forma

$$x_p = X \operatorname{sen} \omega_0 t \qquad (22\text{-}20)$$

donde X es una constante. Si calculamos la segunda derivada con respecto al tiempo y sustituimos en la ecuación 22-18 obtenemos

$$-X\omega_0^2 \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{k}{m}(X \operatorname{sen} \omega_0 t) = \frac{F_0}{m}\operatorname{sen} \omega_0 t$$

Al factorizar $\operatorname{sen} \omega_0 t$ y resolver para X obtenemos

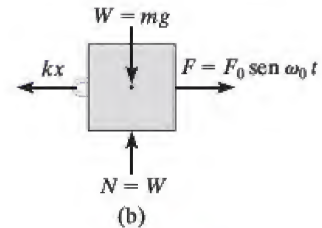
$$X = \frac{F_0/m}{(k/m) - \omega_0^2} = \frac{F_0/k}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2} \qquad (22\text{-}21)$$

Sustituimos en la ecuación 22-20, y obtenemos la solución particular

$$x_p = \frac{F_0/k}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2}\operatorname{sen} \omega_0 t \qquad (22\text{-}22)$$

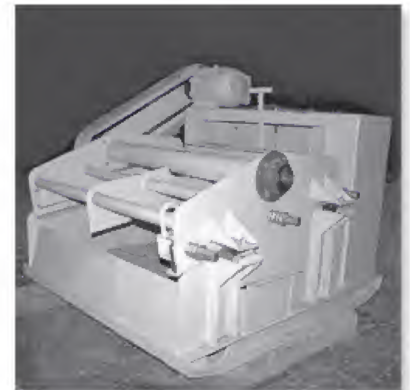


(a)



(b)

Fig. 22-11



Las mesas sacudidoras o trepidantes producen vibración forzada y se utilizan para separar materiales granulados.

22

La *solución general* es, por consiguiente, la suma de dos funciones seno de frecuencias diferentes.

$$x = x_c + x_p = C\,\text{sen}(\omega_n t + \phi) + \frac{F_0/k}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2}\text{sen}\,\omega_0 t \qquad (22\text{-}23)$$

La *solución complementaria* x_c define la *vibración libre*, la cual depende de la frecuencia natural $\omega_n = \sqrt{k/m}$ y las constantes C y ϕ. La *solución particular* x_p describe la *vibración forzada* del bloque provocada por la fuerza aplicada $F = F_0$ sen $\omega_0 t$. Como todos los sistemas vibratorios se someten a *fricción*, la vibración libre, x_c, se amortiguará al paso del tiempo. Por eso la vibración libre se conoce como *transitoria* y la vibración forzada se conoce como de *estado continuo*, puesto que es la única vibración que permanece.

Según la ecuación 22-21, la *amplitud* de la vibración forzada o de estado continuo depende de la *relación de frecuencia* ω_0/ω_n. Si el *factor de amplificación* MF se define como la relación de la amplitud de la vibración de estado continuo, X, a la deflexión estática F_0/k, producida por la amplitud de la fuerza periódica F_0, entonces, según la ecuación 22-21.



El compactador de suelo opera por vibración forzada desarrollada por un motor interno. Es importante que la frecuencia forzadora no se aproxime a la frecuencia natural de vibración del compactador, la cual puede determinarse cuando se apaga el motor; de lo contrario habrá resonancia y la máquina se volverá incontrolable.

$$\text{MF} = \frac{X}{F_0/k} = \frac{1}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2} \qquad (22\text{-}24)$$

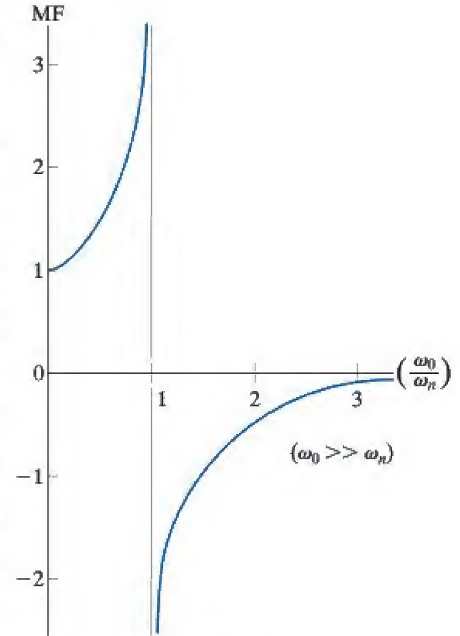


Fig. 22-12

Esta ecuación se grafica en la figura 22-12. Observe que si la fuerza o desplazamiento se aplica con una frecuencia próxima a la frecuencia natural del sistema, es decir, $\omega_0/\omega_n \approx 1$, la amplitud de vibración del bloque llega a ser extremadamente grande. Esto ocurre porque la fuerza **F** se aplica al bloque de modo que siempre siga el movimiento de éste. Esta condición se llama *resonancia*; en la práctica, las vibraciones resonantes pueden dar lugar a esfuerzos tremendos y a la rápida falla de las partes.*

Desplazamiento periódico del soporte.

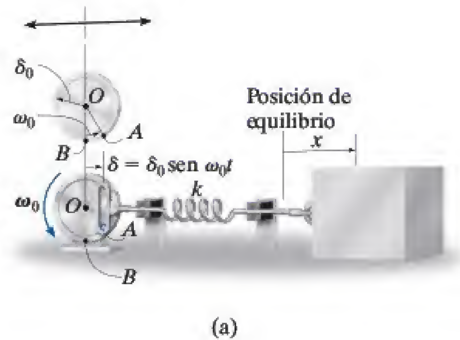
Las vibraciones forzadas también pueden ser originadas por la excitación periódica del soporte de un sistema. El modelo de la figura 22-13*a* representa la vibración periódica de un bloque provocada por movimiento armónico $\delta = \delta_0 \operatorname{sen} \omega_0 t$ del soporte. El diagrama de cuerpo libre del bloque en este caso se muestra en la figura 22-13*b*. El desplazamiento δ del soporte se mide con respecto al punto de desplazamiento cero, es decir, cuando la línea radial OA coincide con OB. Por consiguiente, la deformación general del resorte es $(x - \delta_0 \operatorname{sen} \omega_0 t)$. Aplicamos la ecuación de movimiento y obtenemos

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad -k(x - \delta_0 \operatorname{sen} \omega_0 t) = m\ddot{x}$$

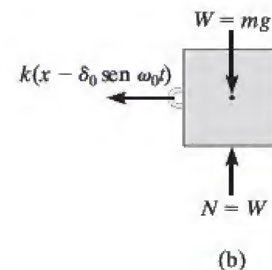
o bien

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k\delta_0}{m}\operatorname{sen} \omega_0 t \qquad (22\text{-}25)$$

Por comparación, esta ecuación es idéntica a la ecuación 22-18, *siempre que* F_0 sea *reemplazada* por $k\delta_0$. Si esta sustitución se hace en las soluciones definidas por las ecuaciones 22-21 a 22-23, los resultados son apropiados para describir el movimiento del bloque cuando se somete al desplazamiento del soporte $\delta = \delta_0 \operatorname{sen} \omega_0 t$.



(a)



(b)

Fig. 22-13

*Un columpio tiene periodo natural de vibración, como se determinó en el ejemplo 22.1. Si alguien lo empuja, sólo cuando alcanza su punto más alto, e ignora la resistencia al avance o la resistencia del viento, habrá resonancia puesto que las frecuencias natural y forzadora son las mismas.

EJEMPLO 22.7

El instrumento que se muestra en la figura 22-14 está rígidamente montado en una plataforma P, la cual a su vez está sostenida por *cuatro* resortes, cada uno con una rigidez $k = 800$ N/m. Si el piso se somete a un desplazamiento vertical $\delta = 10 \text{ sen } (8t)$ mm, donde t está en segundos, determine la amplitud de la vibración de estado continuo. ¿Cuál es la frecuencia de la vibración del piso requerida para provocar resonancia? El instrumento y la plataforma tienen una masa total de 20 kg.



Fig. 22-14

SOLUCIÓN

La frecuencia natural es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4(800 \text{ N/m})}{20 \text{ kg}}} = 12.65 \text{ rad/s}$$

La amplitud de la vibración de estado continuo se determina con la ecuación 22-21, con $k\delta_0$ al reemplazar a F_0.

$$X = \frac{\delta_0}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2} = \frac{10}{1 - [(8 \text{ rad/s})/(12.65 \text{ rad/s})]^2} = 16.7 \text{ mm} \quad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Ocurrirá resonancia cuando la amplitud de vibración X provocada por el desplazamiento del piso tienda a infinito. Esto requiere

$$\omega_0 = \omega_n = 12.6 \text{ rad/s} \quad \textbf{\textit{Resp.}}$$

*22.4 Vibración libre viscosa amortiguada

El análisis de vibración considerado hasta ahora no ha incluido los efectos de fricción o amortiguación en el sistema y, en consecuencia, las soluciones obtenidas no corresponden del todo al movimiento real. Como todas las vibraciones cesan con el tiempo, en el análisis deberán incluirse las fuerzas de amortiguación.

En muchos casos la amortiguación se atribuye a la resistencia creada por la sustancia, agua, aceite o aire, en la cual vibre el sistema. Siempre que el cuerpo se mueva lentamente a través de esta sustancia, la resistencia al movimiento es directamente proporcional a la rapidez del cuerpo. El tipo de fuerza desarrollada en estas condiciones se llama *fuerza de amortiguación viscosa*. La magnitud de esta fuerza se expresa por medio de una ecuación de la forma

$$F = c\dot{x} \qquad (22\text{-}26)$$

donde la constante c se llama *coeficiente de amortiguación viscosa* y sus unidades son N · s/m o lb · s/pie.

El movimiento vibratorio de un cuerpo o sistema que tiene amortiguación viscosa se puede caracterizar por el bloque y el resorte que se ilustran en la figura 22-15*a*. El efecto de amortiguación lo proporciona el *amortiguador* conectado al bloque del lado derecho. La amortiguación ocurre cuando el pistón P se mueve a la derecha o izquierda dentro del cilindro cerrado. El cilindro contiene un fluido, y el movimiento del pistón se retarda puesto que el líquido debe fluir alrededor de, o a través de, un pequeño orificio en el pistón. Se supone que el amortiguador tiene un coeficiente de amortiguación viscosa c.

Si el bloque se desplaza una distancia x de su posición de equilibrio, el diagrama de cuerpo libre resultante se muestra en la figura 22-15*b*. Tanto la fuerza del resorte como la fuerza de amortiguación se oponen al movimiento de avance del bloque, de modo que al aplicar la ecuación de movimiento se obtiene

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad -kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

o

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad (22\text{-}27)$$

La solución de esta ecuación diferencial homogénea lineal de segundo grado tiene la forma

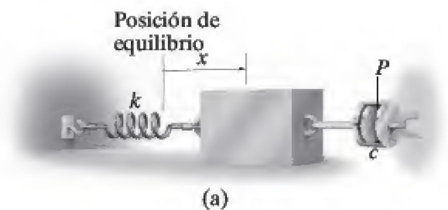
$$x = e^{\lambda t}$$

donde e es la base del logaritmo natural y λ (lambda) es una constante. El valor de λ se obtiene al sustituir esta solución y sus derivadas con respecto al tiempo en la ecuación 22-27, lo cual da

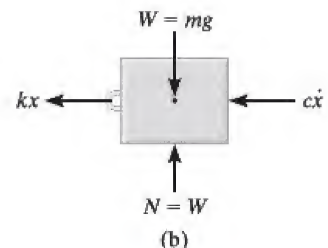
$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + c\lambda e^{\lambda t} + ke^{\lambda t} = 0$$

o

$$e^{\lambda t}(m\lambda^2 + c\lambda + k) = 0$$



(a)



(b)

Fig. 22-15

Como $e^{\lambda t}$ nunca puede ser cero, una solución es posible siempre que

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

Por consiguiente, según la fórmula cuadrática, los dos valores de λ son

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$
$$\lambda_2 = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \qquad (22\text{-}28)$$

La solución general de la ecuación 22-27 es por consiguiente una combinación de exponenciales que implica estas dos raíces. Existen tres posibles combinaciones de λ_1 y λ_2 las cuales se deben considerar. Antes de analizar estas combinaciones, sin embargo, primero definiremos el coeficiente de amortiguación crítica c_c como el valor de c que hace que el radical presente en las ecuaciones 22-28 sea igual a cero, es decir,

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$$

o bien

$$\boxed{c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n} \qquad (22\text{-}29)$$

Sistema sobreamortiguado. Cuando $c > c_c$, las raíces λ_1 y λ_2 son reales. Entonces la solución general de la ecuación 22-27 puede escribirse como

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \qquad (22\text{-}30)$$

El movimiento correspondiente a esta solución es *no vibratorio*. El efecto de amortiguación es tan fuerte que cuando el bloque se desplaza y queda libre, simplemente regresa a su posición original sin oscilar. Se dice que el sistema está *sobreamortiguado*.

Sistema críticamente amortiguado. Si $c = c_c$, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = -c_c/2m = -\omega_n$. Esta situación se conoce como *amortiguación crítica*, puesto que representa una condición en la que c tiene el valor mínimo necesario para hacer que el sistema sea no vibratorio. Con los métodos de ecuaciones diferenciales puede demostrarse que la solución de la ecuación 22-27 con amortiguación crítica es

$$x = (A + Bt)e^{-\omega_n t} \qquad (22\text{-}31)$$

Sistema subamortiguado. Con mucha frecuencia $c < c_c$, en cuyo caso el sistema se conoce como *subamortiguado*. En este caso, las raíces λ_1 y λ_2 son números complejos, y puede demostrarse que la solución general de la ecuación 22-27 puede escribirse como

$$x = D[e^{-(c/2m)t}\,\text{sen}(\omega_d t + \phi)] \tag{22-32}$$

donde D y ϕ son constantes, por lo general determinadas a partir de las condiciones iniciales del problema. La constante ω_d se llama *frecuencia natural amortiguada* del sistema. Su valor es

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \omega_n\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2} \tag{22-33}$$

donde la relación c/c_c se llama *factor de amortiguación*.

En la figura 22-16 se muestra la gráfica de la ecuación 22-32. El límite inicial del movimiento D, se reduce con cada ciclo de vibración, puesto que el movimiento está confinado dentro de los límites de la curva exponencial. Si utilizamos la frecuencia natural amortiguada ω_d, el periodo de vibración amortiguada puede escribirse como

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \tag{22-34}$$

Como $\omega_d < \omega_n$, ecuación 22-33, el periodo de vibración amortiguada, τ_d, será mayor que el de vibración libre, $\tau = 2\pi/\omega_n$.

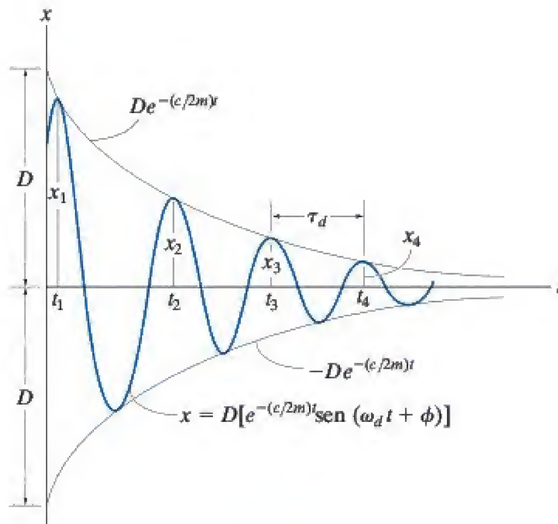


Fig. 22-16

*22.5 Vibración forzada viscosa amortiguada

El caso más general de movimiento vibratorio de un solo grado de libertad ocurre cuando el sistema incluye los efectos de movimiento forzado y amortiguación inducida. El análisis de este tipo particular de vibración es de valor práctico cuando se aplica a sistemas con características de amortiguación significativas.

Si se conecta un amortiguador al bloque y el resorte que se muestran en la figura 22-11*a*, la ecuación diferencial que describe el movimiento es

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \operatorname{sen} \omega_0 t \tag{22-35}$$

Para un bloque y resorte que experimenten desplazamiento periódico de sus soportes puede escribirse una ecuación similar, figura 22-13*a*, la cual incluya los efectos de amortiguación. En ese caso, sin embargo, a F_0 la reemplaza $k\delta_0$. Como la ecuación 22-35 es no homogénea, la solución general es la suma de una solución complementaria x_c y una solución particular x_p. La solución complementaria, x_c, se determina al igualar a cero el lado derecho de la ecuación 22-35 y resolver la ecuación homogénea, la cual es equivalente a la ecuación 22-27. Las ecuaciones 22-30, 22-31 o 22-32, por consiguiente, dan la solución, según los valores de λ_1 y λ_2. Como todos los sistemas se someten a fricción, en ese caso esta solución se amortiguará con el tiempo. Sólo permanecerá la solución particular que describe la *vibración de estado continuo* del sistema. Como la función forzadora es armónica, el movimiento de estado continuo también será armónico. Por consiguiente, la solución particular será de la forma

$$X_P = X' \operatorname{sen}(\omega_0 t - \phi') \tag{22-36}$$

Las constantes X' y ϕ' se determinan al calcular la primera y segunda derivadas con respecto al tiempo y sustituirlas en la ecuación 22-35, la cual después de simplificarla resulta

$$-X'm\omega_0^2 \operatorname{sen}(\omega_0 t - \phi') + X'c\omega_0 \cos(\omega_0 t - \phi') + X'k \operatorname{sen}(\omega_0 t - \phi') = F_0 \operatorname{sen} \omega_0 t$$

Como esta ecuación es válida todo el tiempo, los coeficientes constantes se obtienen con $\omega_0 t - \phi' = 0$ y $\omega_0 t - \phi' = \pi/2$, lo que hace que la ecuación anterior se escriba como

$$X'c\omega_0 = F_0 \operatorname{sen} \phi'$$
$$-X'm\omega_0^2 + X'k = F_0 \cos \phi'$$

La amplitud se obtiene al elevar al cuadrado estas ecuaciones, sumar los resultados y utilizar la identidad $\operatorname{sen}^2\phi' + \cos^2\phi' = 1$, lo cual da

$$X' = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega_0^2)^2 + c^2\omega_0^2}} \tag{22-37}$$

Si dividimos la primera ecuación entre la segunda obtenemos

$$\phi' = \tan^{-1}\left[\frac{c\omega_0}{k - m\omega_0^2}\right] \tag{22-38}$$

Como $\omega_n = \sqrt{k/m}$ y $c_c = 2m\omega_n$, entonces las ecuaciones anteriores también pueden escribirse como

$$X' = \frac{F_0/k}{\sqrt{[1 - (\omega_0/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega_0/\omega_n)]^2}}$$

$$\phi' = \tan^{-1}\left[\frac{2(c/c_c)(\omega_0/\omega_n)}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2}\right] \tag{22-39}$$

El ángulo ϕ' representa la diferencia de fase entre la fuerza aplicada y la vibración de estado continuo resultante del sistema amortiguado.

El *factor de amplificación* MF se definió en la sección 22.3 como la relación de la amplitud de deflexión provocada por la vibración forzada a la deflexión provocada por la fuerza estática F_0. Por tanto,

$$\text{MF} = \frac{X'}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega_0/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega_0/\omega_n)]^2}} \tag{22-40}$$

El MF se traza en la figura 22-17 *versus* la relación de frecuencia ω_0/ω_n para varios valores del factor de amortiguación c/c_c. En esta gráfica se ve que la amplificación de la amplitud se incrementa a medida que se reduce el factor de amortiguación. Obviamente, ocurre resonancia cuando el factor de amortiguación es cero y la relación de frecuencia es igual a 1.

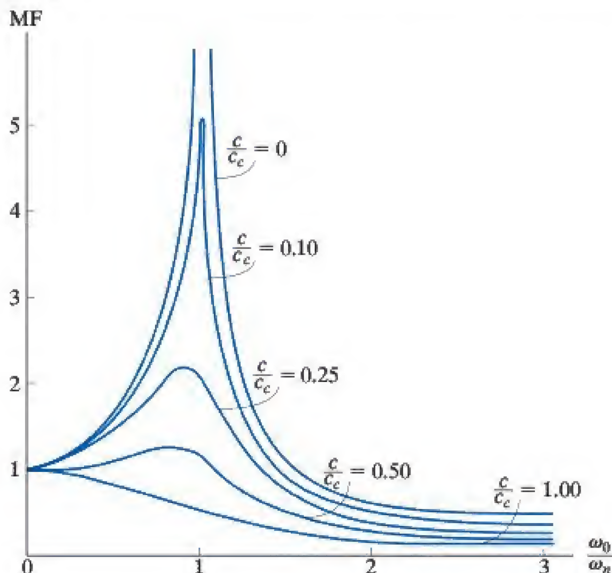


Fig. 22-17

EJEMPLO 22.8

El motor eléctrico de 30 kg que se ilustra en la figura 22-18 está sostenido por *cuatro* resortes, cada uno con una rigidez de 200 N/m. Si el rotor se desbalancea de modo que su efecto equivalga a una masa de 4 kg situada a 60 mm del eje de rotación, determine la amplitud de la vibración cuando el rotor gira a $\omega_0 = 10$ rad/s. El factor de amortiguación es $c/c_c = 0.15$.



Fig. 22-18

SOLUCIÓN

La fuerza periódica que hace que el motor vibre es la fuerza centrífuga a consecuencia del rotor desbalanceado. Esta fuerza tiene una magnitud constante de

$$F_0 = ma_n = mr\omega_0^2 = 4\text{ kg}(0.06\text{ m})(10\text{ rad/s})^2 = 24\text{ N}$$

Como $F = F_0 \operatorname{sen} \omega_0 t$, donde $\omega_0 = 10$ rad/s, entonces

$$F = 24 \operatorname{sen} 10t$$

La rigidez de todo el sistema de cuatro resortes es $k = 4(200\text{ N/m}) = 800\text{ N/m}$. Por consiguiente, la frecuencia natural de vibración es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{800\text{ N/m}}{30\text{ kg}}} = 5.164\text{ rad/s}$$

Como se conoce el factor de amortiguación, la amplitud de estado continuo se determina con la primera de las ecuaciones 22-39, es decir,

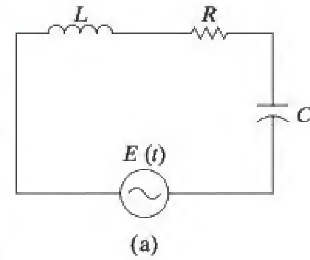
$$X' = \frac{F_0/k}{\sqrt{[1 - (\omega_0/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega_0/\omega_n)]^2}}$$

$$= \frac{24/800}{\sqrt{[1 - (10/5.164)^2]^2 + [2(0.15)(10/5.164)]^2}}$$

$$= 0.0107\text{ m} = 10.7\text{ mm}$$ ***Resp.***

22

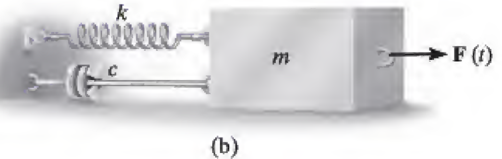
*22.6 Análogos de un circuito eléctrico



(a)

Las características de un sistema mecánico vibratorio pueden representarse por medio de un circuito eléctrico. Considere el circuito que se muestra en la figura 22-19*a*, el cual consta de un inductor L, un resistor R y un capacitor C. Cuando se aplica un voltaje $E(t)$, hace que una corriente de magnitud i fluya a través del circuito. Cuando la corriente fluye más allá del inductor la caída de voltaje es $L(di/dt)$, cuando fluye a través del resistor la caída es Ri, y cuando llega al capacitor la caída es $(1/C)\int i\,dt$. Como la corriente no puede fluir más allá del capacitor, sólo es posible medir la carga q que actúa en el capacitor. La carga, sin embargo, puede relacionarse con la corriente por medio de la ecuación $i = dq/dt$. Por tanto, las caídas de voltaje que ocurren a través del inductor, resistor y capacitor son $L\,d^2q/dt^2$, $R\,dq/dt$, y q/C, respectivamente. De acuerdo con la ley del voltaje de Kirchhoff, el voltaje aplicado es igual a la suma de las caídas de voltaje alrededor del circuito. Por consiguiente,

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t) \tag{22-41}$$



(b)

Fig. 22-19

Considere ahora el modelo de un sistema mecánico de un solo grado de libertad, figura 22-19*b*, sometido tanto a una función forzadora general $F(t)$ como de amortiguación. La ecuación de movimiento para este sistema se estableció en la sección previa y puede escribirse como

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \tag{22-42}$$

Por comparación, se ve que las ecuaciones 22-41 y 22-42 tienen la misma forma, y por tanto matemáticamente el procedimiento de analizar un circuito eléctrico es igual al de analizar un sistema mecánico vibratorio. Los análogos entre las dos ecuaciones se dan en la tabla 22-1.

Esta analogía tiene una importante aplicación en el trabajo experimental, ya que es más fácil simular la vibración de un sistema mecánico complejo por medio de un circuito eléctrico, el cual puede construirse con una computadora analógica, que construir un modelo mecánico de resorte y amortiguador equivalente.

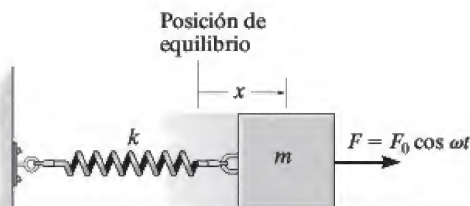
TABLA 22-1 Análogos eléctricos-mecánicos

Eléctricos		Mecánicos	
Carga eléctrica	q	Desplazamiento	x
Corriente eléctrica	i	Velocidad	dx/dt
Voltaje	$E(t)$	Fuerza aplicada	$F(t)$
Inductancia	L	Masa	m
Resistencia	R	Coeficiente de amortiguación viscosa	c
Recíproco de capacitancia	$1/C$	Rigidez de resorte	k

22

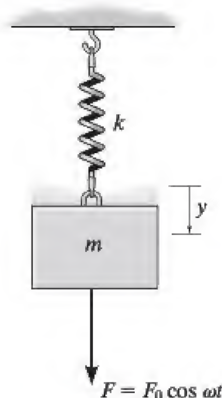
PROBLEMAS

22-42. Si el modelo de bloque y resorte se somete a la fuerza periódica $F = F_0 \cos \omega t$, demuestre que la ecuación diferencial de movimiento es $\ddot{x} + (k/m)x = (F_0/m) \cos \omega t$, donde x se mide con respecto a la posición de equilibrio del bloque. ¿Cuál es la solución general de esta ecuación?



Prob. 22-42

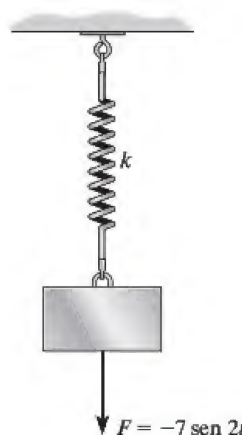
22-43. Si el bloque se somete a la fuerza periódica $F = F_0 \cos \omega t$, demuestre que la ecuación diferencial de movimiento es $\ddot{y} + (k/m)y = (F_0/m) \cos \omega t$, donde y se mide con respecto a la posición de equilibrio del bloque. ¿Cuál es la solución general de esta ecuación?



Prob. 22-43

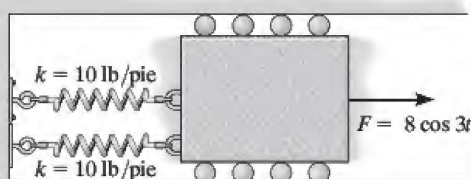
***22-44.** Un bloque de 0.8 kg de masa se suspende de un resorte cuya rigidez es de 120 N/m. Si un amortiguador genera una fuerza de amortiguación de 2.5 N cuando la velocidad del bloque es de 0.2 m/s, determine el periodo de vibración libre.

•22-45. El resorte que se muestra se alarga 6 pulg cuando se carga con un peso de 50 lb. Determine la ecuación que describe la posición del peso como una función del tiempo si el peso es jalado 4 pulg por debajo de su posición de equilibrio y se libra del reposo cuando $t = 0$. El peso se somete a la fuerza periódica $F = (-7 \text{ sen } 2t)$ lb, donde t está en segundos.



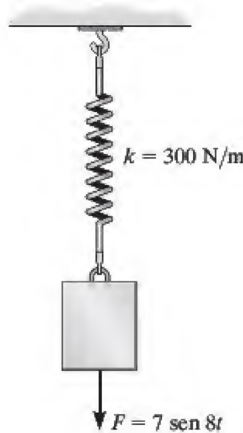
Prob. 22-45

22-46. El bloque de 30 lb está unido a dos resortes con rigidez de 10 lb/pie. Una fuerza periódica $F = (8 \cos 3t)$ lb, donde t está en segundos, se aplica al bloque. Determine la rapidez máxima del bloque después de que las fuerzas de fricción hagan que cesen las vibraciones libres.



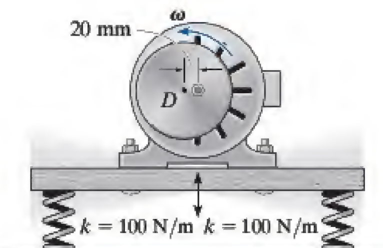
Prob. 22-46

22-47. Se suspende un bloque de 5 kg de un resorte que tiene una rigidez de 300 N/m. Si en el bloque actúa una fuerza periódica vertical $F = (7 \text{ sen } 8t)$ N, donde t está en segundos, determine la ecuación que describe el movimiento del bloque cuando se le jala hacia abajo 100 mm de la posición de equilibrio y se libra del reposo cuando $t = 0$. Considere positivo el desplazamiento hacia abajo.



Prob. 22-47

*22-48. El motor eléctrico tiene una masa de 50 kg y está sostenido por *cuatro resortes* que tienen una rigidez de 100 N/m. Si el motor hace girar un disco D el cual está montado excéntricamente a 20 mm de su centro, determine la velocidad angular ω a la cual ocurre la resonancia. Suponga que el motor sólo vibra en la dirección vertical.

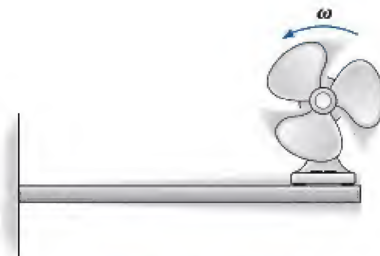


Prob. 22-48

•**22-49.** El ventilador tiene una masa de 25 kg y está fijo en el extremo de una viga horizontal de masa insignificante. Las aspas del ventilador están montadas excéntricamente en la flecha de modo que equivalen a una masa desbalanceada de 3.5 kg localizada a 100 mm del eje de rotación. Si la deflexión estática de la viga es de 50 mm a consecuencia del peso del ventilador, determine la velocidad angular de sus aspas a la cual ocurrirá la resonancia. *Sugerencia:* consulte la primera parte del ejemplo 22.8.

22-50. El ventilador tiene una masa de 25 kg y está fijo en el extremo de una viga horizontal de masa insignificante. Las aspas del ventilador están montadas excéntricamente en la flecha de modo que equivalen a una masa desbalanceada de 3.5 kg localizada a 100 mm del eje de rotación. Si la deflexión estática de la viga es de 50 mm a consecuencia del peso del ventilador, determine la amplitud de la vibración de estado continuo del ventilador si la velocidad angular de las aspas es de 10 rad/s. *Sugerencia:* consulte la primera parte del ejemplo 22.8.

22-51. ¿Cuál será la amplitud de la vibración de estado continuo del ventilador del problema 22-50 si la velocidad angular de sus aspas es de 18 rad/s? *Sugerencia:* consulte la primera parte del ejemplo 22.8.

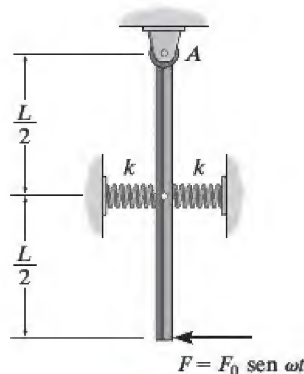


Probs. 22-49/50/51

*22-52. Un bloque de 7 lb está suspendido de un resorte que tiene una rigidez de $k = 75$ lb/pie. Al soporte al cual está conectado el resorte se le imprime un movimiento armónico, el cual puede ser expresado como $\delta = (0.15 \text{ sen } 2t)$ pies, donde t está en segundos. Si el factor de amortiguación es $c/c_c = 0.8$, determine el ángulo de fase ϕ de la vibración forzada.

•**22-53.** Determine el factor de amplificación de la combinación de bloque, resorte y amortiguador del problema 22-52.

22-54. La barra uniforme tiene una masa de m. Si en ella actúa una fuerza periódica $F = F_0 \operatorname{sen} \omega t$, determine la amplitud de la vibración de estado continuo.

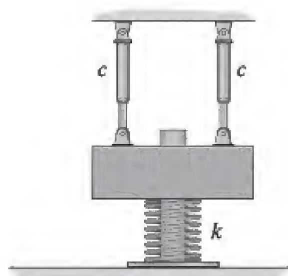


Prob. 22-54

22-55. El movimiento de un sistema subamortiguado puede ser descrito por la gráfica que aparece en la figura 20-16. Demuestre que la relación entre dos picos de vibración sucesivos está dada por $\ln(x_n/x_{n+1}) = 2\pi(c/c_c)/\sqrt{1-(c/c_c)^2}$, donde c/c_c es el *factor de amortiguación* y a $\ln(x_n/x_{n+1})$ se le llama *decremento logarítmico*.

***22-56.** Se observa que dos amplitudes sucesivas de un sistema vibratorio subamortiguado de resorte-bloque son de 100 mm y 75 mm. Determine el coeficiente de amortiguación del sistema. El bloque tiene una masa de 10 kg y el resorte tiene una rigidez de $k = 1000$ N/m. Use el resultado del problema 22-55.

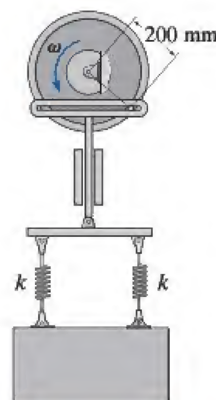
•22-57. Dos amortiguadores idénticos se disponen paralelos entre sí, como se muestra. Demuestre que si el coeficiente de amortiguación $c < \sqrt{mk}$, entonces el bloque de masa m vibrará como un sistema subamortiguado.



Prob. 22-57

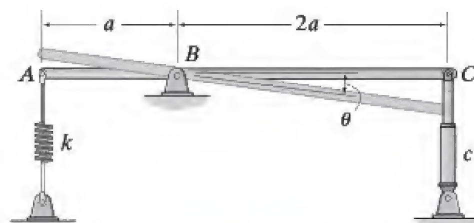
22-58. El sistema de resortes está conectado a un cruceta que oscila verticalmente cuando la rueda gira a una velocidad angular constante de $\boldsymbol{\omega}$. Si la amplitud de la vibración de estado continuo es de 400 mm y cada uno de los resortes tiene una rigidez de $k = 2500$ N/m, determine los dos posibles valores de $\boldsymbol{\omega}$ a que debe girar la rueda. La masa del bloque es de 50 kg.

22-59. El sistema de resortes está conectado a un cruceta que oscila verticalmente cuando la rueda gira a una velocidad angular constante de $\omega = 5$ rad/s. Si la amplitud de la vibración de estado continuo es de 400 mm , determine los dos posibles valores de la rigidez k de los resortes. La masa del bloque es de 50 kg.



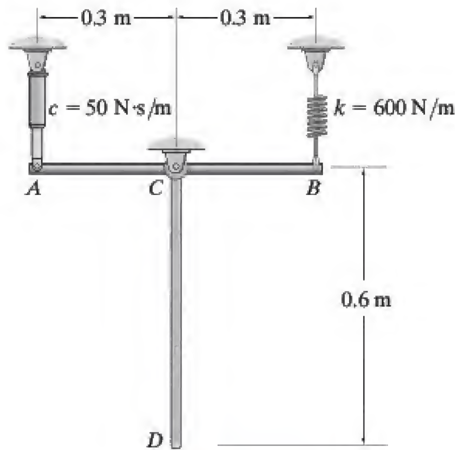
Probs. 22-58/59

***22-60.** Determine la ecuación diferencial para oscilaciones pequeñas en función de θ para la barra uniforme de masa m. Además, demuestre que si $c < \sqrt{mk}/2$, entonces el sistema permanece subamortiguado. La barra está en una posición horizontal cuando está en equilibrio.



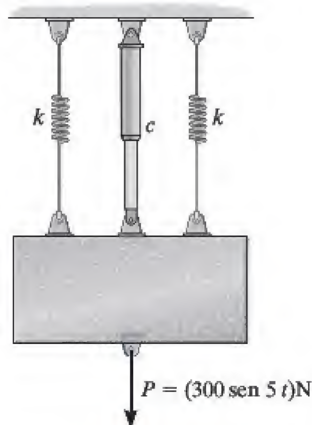
Prob. 22-60

•**22-61.** Si el amortiguador tiene un coeficiente de amortiguación de $c = 50$ N · s/m, y la rigidez del resorte es de $k = 600$ N/m, demuestre que el sistema está subamortiguado y luego determine el periodo de oscilación del péndulo. Las barras uniformes tienen una masa por unidad de longitud de 10 kg/m.



Prob. 22-61

22-62. Si el bloque de 30 kg se somete a una fuerza periódica de $P = (300 \text{ sen } 5t)$ N, $k = 1500$ N/m y $c = 300$ N · s/m, determine la ecuación que describe la vibración de estado continuo en función del tiempo.



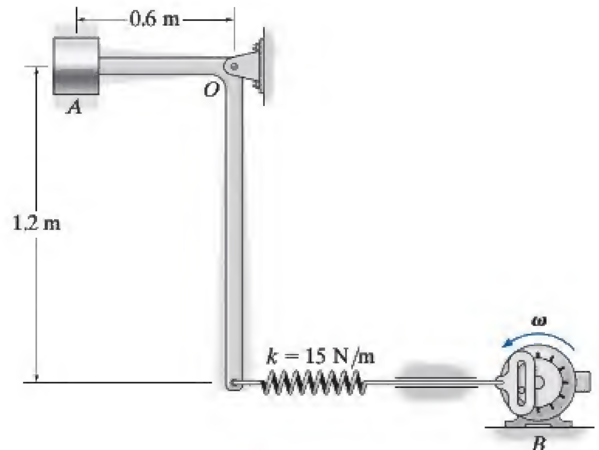
Prob. 22-62

22-63. El bloque, con un peso de 15 lb, se sumerge en un líquido de modo que la fuerza de amortiguación que actúa en el bloque tenga una magnitud de $F = (0.8|v|)$ lb, donde v es la velocidad del bloque en pies/s. Si el bloque es jalado hacia abajo 0.8 pies y se libra del reposo, determine su posición en función del tiempo. El resorte tiene una rigidez de $k = 40$ lb/pie. Considere que el desplazamiento positivo es hacia abajo.



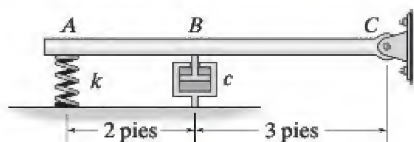
Prob. 22-63

***22-64.** El pequeño bloque en A tiene una masa de 4 kg y está montado en la barra acodada de masa insignificante. Si el rotor B crea movimiento armónico $\delta_B = (0.1 \cos 15t)$ m, donde t está en segundos, determine la amplitud de vibración de estado continuo del bloque.



Prob. 22-64

•**22-65.** La barra pesa 6 lb, la rigidez del resorte es de $k = 8$ lb/pie y el amortiguador tiene un coeficiente de amortiguación $c = 60$ lb · s/pie; determine la ecuación diferencial que describe el movimiento en función del ángulo θ de rotación de la barra. Además, ¿cuál debería ser el coeficiente de amortiguación del amortiguador si la barra ha de estar críticamente amortiguada?

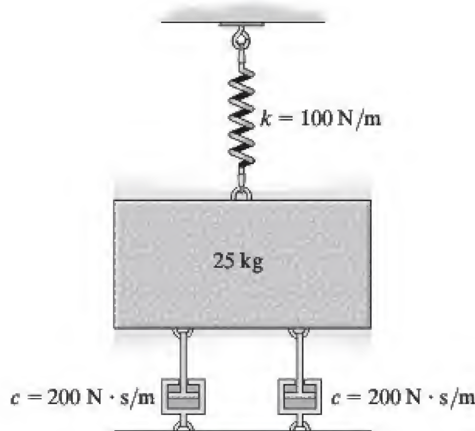


Prob. 22-65

22-66. Un bloque de 7 kg de masa está suspendido de un resorte que tiene una rigidez $k = 600$ N/m. Si al bloque se le imparte una velocidad hacia arriba de 0.6 m/s a partir de su posición cuando $t = 0$, determine la posición en función del tiempo. Suponga que el desplazamiento positivo del bloque es hacia abajo y que el movimiento se desarrolla en un medio que genera una fuerza de amortiguación $F = (50|v|)$ N, donde v es la velocidad del bloque en m/s.

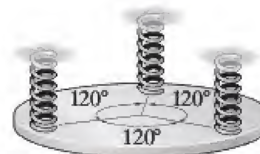
22-67. Se une un peso de 4 lb a un resorte cuya rigidez es $k = 10$ lb/pie. El peso es jalado hacia abajo una distancia de 4 pulg y se libra del reposo. Si el soporte se mueve con un desplazamiento vertical $\delta = (0.5 \text{ sen } 4t)$ pulg, donde t está en segundos, determine la ecuación que describe la posición del peso como función del tiempo.

***22-68.** Determine la ecuación diferencial de movimiento para el sistema vibratorio amortiguado que se muestra. ¿Qué tipo de movimiento ocurre?



Prob. 22-68

•**22-69.** El disco circular de 4 kg está unido a tres resortes, cada uno de los cuales tiene una rigidez $k = 180$ N/m. Si el disco se sumerge en un fluido y se le imprime una velocidad hacia abajo de 0.3 m/s en la posición de equilibrio, determine la ecuación que describe el movimiento. Considere que el desplazamiento positivo se mide hacia abajo y que la resistencia del fluido que actúa en el disco genera una fuerza de amortiguación de magnitud $F = (60|v|)$ N, donde v es la velocidad del bloque en m/s.



Prob. 22-69

22-70. Con un modelo de bloque y resorte, como el de la figura 22-13*a*, pero suspendido en posición vertical y sometido a un desplazamiento periódico de su soporte de $\delta = \delta_0 \cos \omega_0 t$, determine la ecuación de movimiento del sistema y obtenga su solución general. Defina el desplazamiento y medido a partir de la posición de equilibrio estático del bloque cuando $t = 0$.

22-71. El motor eléctrico hace girar un volante excéntrico, el cual equivale a un peso desbalanceado de 0.25 lb situado a 10 pulg del eje de rotación. Si la deflexión estática de la viga es de 1 pulg a causa del peso del motor, determine la velocidad angular del volante a la cual ocurrirá la resonancia. El motor pesa 150 lb. Ignore la masa de la viga.

***22-72.** ¿Cuál será la amplitud de la vibración de estado continuo del motor del problema 22-71 si la velocidad angular del volante es de 20 rad/s?

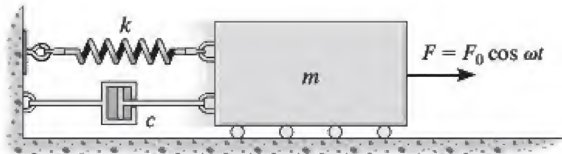
•**22-73.** Determine la velocidad angular del volante del problema 22-71 que producirá una amplitud de vibración de 0.25 pulg.



Probs. 22-71/72/73

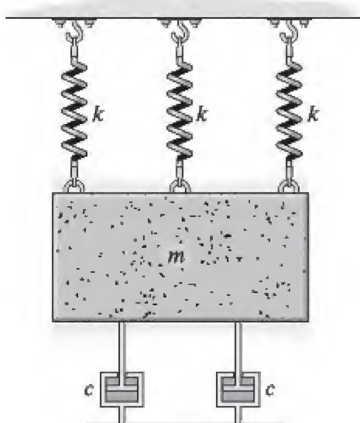
22

22-74. Trace el circuito eléctrico equivalente al sistema mecánico que se muestra. Determine la ecuación diferencial que describe la carga q en el circuito.



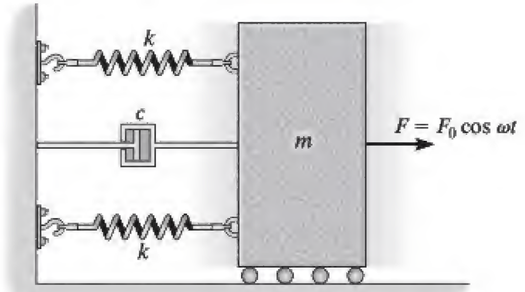
Prob. 22-74

22-75. Determine la ecuación diferencial de movimiento del sistema vibratorio amortiguado que se muestra. ¿Qué tipo de movimiento ocurre? Considere $k = 100$ N/m, $c = 200$ N · s/m, $m = 25$ kg.



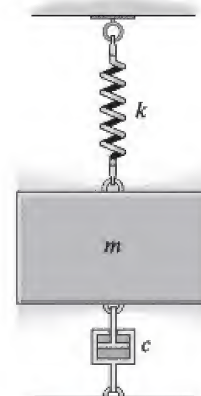
Prob. 22-75

***22-76.** Trace el circuito eléctrico equivalente al sistema mecánico que se muestra. ¿Cuál es la ecuación diferencial que describe la carga q en el circuito?



Prob. 22-76

•**22-77.** Trace el circuito eléctrico equivalente al sistema mecánico que se muestra. Determine la ecuación diferencial que describe la carga q en el circuito.



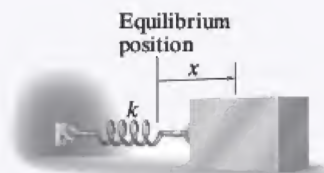
Prob. 22-77

REPASO DEL CAPÍTULO

Vibración libre no amortiguada

Un cuerpo experimenta vibración libre cuando fuerzas de restauración gravitacional y elásticas provocan el movimiento. Este movimiento es no amortiguado cuando las fuerzas de fricción se ignoran. El movimiento periódico de un cuerpo no amortiguado que vibra libremente puede estudiarse al desplazar el cuerpo de la posición de equilibrio y luego aplicar la ecuación de movimiento a lo largo de la trayectoria.

Para un sistema de un grado de libertad, la ecuación diferencial resultante puede escribirse en función de su frecuencia natural ω_n.



$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad \tau = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

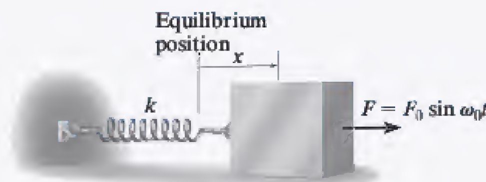
Métodos de energía

Siempre que las fuerzas de restauración que actúan en el cuerpo son gravitacionales y elásticas, entonces también puede utilizarse para determinar el movimiento armónico simple. Para hacer esto, el cuerpo se desplaza una pequeña distancia de su posición de equilibrio y se escribe una expresión para su energía cinética y potencial. La derivada con respecto al tiempo de esta ecuación puede reordenarse entonces en la forma estándar $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$.

Vibración forzada no amortiguada

Cuando se aplica la ecuación de movimiento a un cuerpo, el cual está sometido a una fuerza periódica, o el soporte se desplaza con una frecuencia ω_0, entonces la solución de la ecuación diferencial consiste en una solución complementaria y una solución particular. La solución complementaria es provocada por la vibración libre y puede ser ignorada. La solución particular es provocada por la vibración forzada.

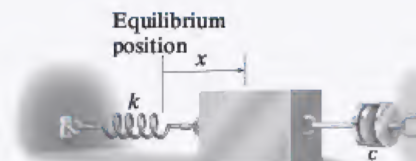
Ocurrirá resonancia si la frecuencia natural de vibración ω_n es igual a la frecuencia forzadora ω_0. Esto debe evitarse, puesto que el movimiento tenderá a volverse ilimitado.



$$x_p = \frac{F_0/k}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2} \operatorname{sen} \omega_0 t$$

Vibración libre viscosa amortiguada

Una fuerza de amortiguación viscosa es provocada por la resistencia al avance de un fluido en el sistema cuando vibra. Si el movimiento es lento, esa fuerza de resistencia al avance será proporcional a la velocidad, es decir, $F = c\dot{x}$. Donde c es el coeficiente de amortiguación viscosa. Al comparar su valor con el coeficiente de amortiguación crítica, $c_c = 2m\omega_n$, podemos especificar el tipo de vibración que ocurre. Si $c > c_c$, es un sistema sobreamortiguado; si $c = c_c$, es un sistema críticamente amortiguado; si $c < c_c$, es un sistema subamortiguado.



Vibración forzada viscosa amortiguada

El tipo más general de vibración de un sistema de un grado de libertadas ocurre cuando el sistema está amortiguado y se somete a movimiento forzado periódico. La solución da una idea sobre cómo influyen en la vibración el factor de amortiguación, c/c_c, y la relación de frecuencia ω_0/ω_n.

La resonancia se evita siempre que $c/c_c \neq 0$ y $\omega_0/\omega_n \neq 1$.

Análogos de un circuito eléctrico

El movimiento vibratorio de un sistema mecánico complejo puede estudiarse si se modela como un circuito eléctrico. Esto es posible puesto que las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de cada sistema son las mismas.

APÉNDICE A Expresiones matemáticas

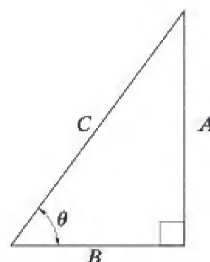
Fórmula cuadrática

Si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Funciones hiperbólicas

$\text{senh}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \dfrac{\text{senh}\, x}{\cosh x}$

Identidades trigonométricas



$\text{sen}\, \theta = \dfrac{A}{C}$, $\csc \theta = \dfrac{C}{A}$

$\cos \theta = \dfrac{B}{C}$, $\sec \theta = \dfrac{C}{B}$

$\tan \theta = \dfrac{A}{B}$, $\cot \theta = \dfrac{B}{A}$

$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$\text{sen}(\theta \pm \phi) = \text{sen}\, \theta \cos \phi \pm \cos \theta\, \text{sen}\, \phi$

$\text{sen}\, 2\theta = 2\, \text{sen}\, \theta \cos \theta$

$\cos(\theta \pm \phi) = \cos \theta \cos \phi \mp \text{sen}\, \theta\, \text{sen}\, \phi$

$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta$

$\cos \theta = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos 2\theta}{2}}$, $\text{sen}\, \theta = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}}$

$\tan \theta = \dfrac{\text{sen}\, \theta}{\cos \theta}$

$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \qquad 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

Expansiones en series de potencias

$\text{sen}\, x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \text{senh}\, x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots \qquad \cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots$

Derivadas

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec u) = \tan u \sec u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}\, u) = \cos u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\text{sen}\, u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{senh}\, u) = \cosh u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh u) = \text{senh}\, u\frac{du}{dx}$$

Integrales

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx) + C$$

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{-ba}}\ln\left[\frac{a+x\sqrt{-ab}}{a-x\sqrt{-ab}}\right] + C,\ ab < 0$$

$$\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\ln(bx^2+a) + C,$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{a+bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b\sqrt{ab}}\tan^{-1}\frac{x\sqrt{ab}}{a} + C,\ ab > 0$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left[\frac{a+x}{a-x}\right] + C,\ a^2 > x^2$$

$$\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3} + C$$

$$\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{-2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2} + C$$

$$\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3} + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\,\text{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right] + C,\ a > 0$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} + C$$

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{x}{4}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\,\text{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right) + C,\ a > 0$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right] + C$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + C$$

$$\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} \mp \frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\sqrt{a+bx}}{b} + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left[\sqrt{a+bx+cx^2} + x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right] + C,\ c > 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}}\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{-2cx-b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right) + C,\ c > 0$$

$$\int \text{sen}\,x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \text{sen}\,x + C$$

$$\int x\cos(ax)\,dx = \frac{1}{a^2}\cos(ax) + \frac{x}{a}\text{sen}(ax) + C$$

$$\int x^2\cos(ax)\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos(ax) + \frac{a^2x^2-2}{a^3}\text{sen}(ax) + C$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C$$

$$\int \text{senh}\,x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,dx = \text{senh}\,x + C$$

A

APÉNDICE

B Análisis vectorial

El siguiente análisis es un breve repaso del análisis vectorial. Un tratamiento más detallado de estos temas se da en *Ingeniería Mecánica: Estática*.

Vector. Un vector **A**, es una cantidad que tiene magnitud y dirección y se suma de acuerdo con la ley del paralelogramo. Como se muestra en la figura B-1, **A** = **B** + **C**, donde **A** es el *vector resultante* y **B** y **C** son *vectores componentes.*

Vector unitario. Un vector unitario, $\mathbf{u}_A$, tiene una magnitud de una unidad "sin unidades" y actúa en la misma dirección que **A**. Se determina al dividir **A** entre su magnitud A, es decir,

$$\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} \quad \text{(B-1)}$$

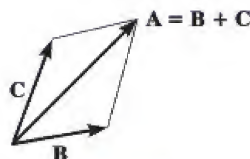


Fig. B-1

Notación vectorial cartesiana. Las direcciones de los ejes x, y, z positivos se definen mediante los vectores unitarios cartesianos $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, respectivamente.

Como se muestra en la figura B-2, el vector $\mathbf{A}$ se formula por medio de la adición de sus componentes x, y, z como

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \tag{B-2}$$

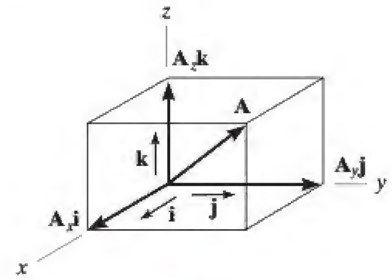


Fig. B-2

La *magnitud* de $\mathbf{A}$ se determina con

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{B-3}$$

La *dirección* de $\mathbf{A}$ se define en función de sus *ángulos de dirección de las coordenadas*, α, β, γ, medidos de la *cola* de $\mathbf{A}$ a los ejes x, y, z *positivos*, figura B-3. Estos ángulos se determinan con los *cosenos de dirección* que representan las componentes $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ del vector unitario $\mathbf{u}_A$; es decir, de acuerdo con las ecuaciones B-1 y B-2.

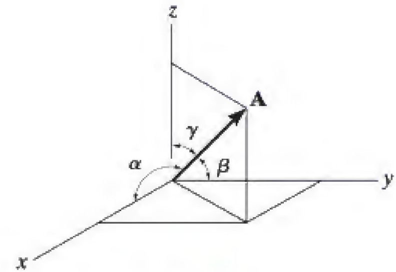


Fig. B-3

$$\mathbf{u}_A = \frac{A_x}{A}\mathbf{i} + \frac{A_y}{A}\mathbf{j} + \frac{A_z}{A}\mathbf{k} \tag{B-4}$$

de modo que los cosenos de dirección son

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} \qquad \cos\beta = \frac{A_y}{A} \qquad \cos\gamma = \frac{A_z}{A} \tag{B-5}$$

Por consiguiente, $\mathbf{u}_A = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$, y con la ecuación B-3, se ve que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{B-6}$$

Producto vectorial. El producto vectorial de dos vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, que da el vector resultante $\mathbf{C}$, se escribe como

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \tag{B-7}$$

y se lee $\mathbf{C}$ es igual a $\mathbf{A}$ "cruz" $\mathbf{B}$. La *magnitud* de $\mathbf{C}$ es

$$C = AB\,\text{sen}\,\theta \tag{B-8}$$

donde θ es el ángulo formado entre la *cola* de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ ($0° \leq \theta \leq 180°$). La *dirección* de $\mathbf{C}$ se determina con la regla de la mano derecha, por la cual los dedos de la mano derecha se cierran *de* $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ y el pulgar apunta en la dirección de $\mathbf{C}$, figura B-4. Este vector es perpendicular al plano que contiene los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

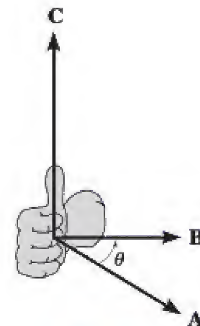


Fig. B-4

B

El producto cruz vectorial *no* es conmutativo, es decir, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$. Más bien,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \tag{B-9}$$

La ley distributiva es válida; es decir,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{D} \tag{B-10}$$

Y el producto vectorial puede multiplicarse por un escalar m de cualquier manera; es decir,

$$m(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})m \tag{B-11}$$

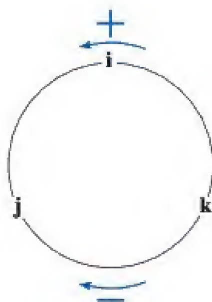


Fig. B-5

La ecuación B-7 puede utilizarse para determinar el producto vectorial de cualquier par de vectores unitarios cartesianos. Por ejemplo, para determinar $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, la magnitud es $(i)(j)\text{sen } 90° = (1)(1)(1) = 1$, y su dirección $+\mathbf{k}$ se determina con la regla de la mano derecha, aplicada a $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, figura B-2. Un esquema simple que se muestra en la figura B-5 puede ser útil para obtener éste y otros resultados cuando se requiera. Si el círculo se construye como se muestra, y luego se "cruzan" (se multiplican vectorialmente) dos de los vectores unitarios en *sentido contrario al de las manecillas del reloj* alrededor del círculo se obtiene un tercer vector unitario *positivo*, por ejemplo, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$. Al moverse *en el sentido de las manecillas del reloj* se obtiene un vector unitario *negativo*, por ejemplo, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$.

Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ están expresados en forma de componentes cartesianos, entonces el producto vectorial, ecuación B-7, se evalúa al expandir la determinante

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{B-12}$$

la cual resulta

$$\mathbf{C} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k}$$

Recuerde que el producto vectorial se utiliza en estática para definir el momento de una fuerza $\mathbf{F}$ con respecto a un punto O, en cuyo caso

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{B-13}$$

donde $\mathbf{r}$ es un vector de posición dirigido del punto O a *cualquier punto* sobre la línea de acción de $\mathbf{F}$.

Producto punto. El producto punto (escalar) de dos vectores **A** y **B**, que da un escalar, se define como

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta \tag{B-14}$$

y se lee **A** "punto" **B**. El ángulo θ se forma entre las *colas* de **A** y **B** ($0° \leq \theta \leq 180°$).

El producto punto es conmutativo; es decir,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \tag{B-15}$$

La ley distributiva es válida; es decir,

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} \tag{B-16}$$

Y la multiplicación escalar puede realizarse de cualquier manera, es decir,

$$m(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})m \tag{B-17}$$

Con la ecuación B-14 puede determinarse el producto punto entre dos vectores cartesianos cualesquiera. Por ejemplo, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = (1)(1)\cos 0° = 1$ e $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = (1)(1)\cos 90° = 0$.

Si **A** y **B** están expresados en forma de componentes cartesianos, entonces el producto punto, ecuación B-14, se determina con

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z} \tag{B-18}$$

El producto punto puede utilizarse para determinar el *ángulo θ formado entre dos vectores*. Según la ecuación B-14,

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB}\right) \tag{B-19}$$

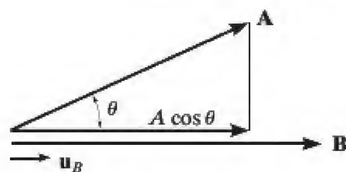


Fig. B-6

También es posible determinar la *componente de un vector en una dirección dada* con el producto punto. Por ejemplo, la magnitud de la componente (o proyección) del vector **A** en la dirección de **B**, figura B-6, se define por $A \cos \theta$. Según la ecuación B-14, esta magnitud es

$$A \cos \theta = \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{B}}{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_B \tag{B-20}$$

donde $\mathbf{u}_B$ representa un vector unitario que actúa en la dirección de **B**, figura B-6.

Diferenciación e integración de funciones vectoriales.

Las reglas para la diferenciación e integración de las sumas y productos de funciones escalares también son válidas para funciones vectoriales. Considere, por ejemplo, las dos funciones vectoriales $\mathbf{A}(s)$ y $\mathbf{B}(s)$. Siempre que estas funciones sean uniformes y continuas con todos los valores de s, entonces

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{ds} + \frac{d\mathbf{B}}{ds} \tag{B-21}$$

$$\int (\mathbf{A} + \mathbf{B})\, ds = \int \mathbf{A}\, ds + \int \mathbf{B}\, ds \tag{B-22}$$

Para el producto vectorial,

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \left(\frac{d\mathbf{A}}{ds} \times \mathbf{B}\right) + \left(\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{ds}\right) \tag{B-23}$$

Asimismo, para el producto punto,

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{ds} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds} \tag{B-24}$$

APÉNDICE C

Regla de la cadena

La regla de la cadena del cálculo se utiliza para determinar la derivada con respecto al tiempo de una función compuesta. Por ejemplo, si y es una función de x y x es una función de t, entonces podemos determinar la derivada de y con respecto a t como sigue

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \tag{C-1}$$

En otras palabras, para determinar $\dot{y}$ consideramos la derivada común (dy/dx) y la multiplicamos por la derivada con respecto al tiempo de (dx/dt).

Si algunas variables son funciones del tiempo y están multiplicadas entre sí, entonces debe utilizarse la regla del producto $d(uv) = du\, v + u\, dv$ junto con la regla de la cadena cuando se consideren las derivadas con respecto al tiempo. He aquí algunos ejemplos.

EJEMPLO C-1

Si $y = x^3$ y $x = t^4$, determine $\ddot{y}$, la segunda derivada de y con respecto al tiempo.

SOLUCIÓN

Con la regla de la cadena, ecuación C-1,

$$\dot{y} = 3x^2\dot{x}$$

Para obtener la segunda derivada con respecto al tiempo, debemos utilizar la regla del producto, puesto que x y $\dot{x}$ son funciones del tiempo y, además, para $3x^2$ debe aplicarse la regla de la cadena. Por tanto, con $u = 3x^2$ y $v = \dot{x}$, tenemos

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= [6x\dot{x}]\dot{x} + 3x^2[\ddot{x}] \\ &= 3x[2\dot{x}^2 + x\ddot{x}] \end{aligned}$$

Como $x = t^4$, entonces $\dot{x} = 4t^3$ y $\ddot{x} = 12t^2$ de modo que

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= 3(t^4)[2(4t^3)^2 + t^4(12t^2)] \\ &= 132t^{10} \end{aligned}$$

Observe que este resultado también puede obtenerse al combinar las funciones y luego considerar las derivadas con respecto al tiempo, es decir,

$$\begin{aligned} y &= x^3 = (t^4)^3 = t^{12} \\ \dot{y} &= 12t^{11} \\ \ddot{y} &= 132t^{10} \end{aligned}$$

EJEMPLO C-2

Si $y = xe^x$, determine $\ddot{y}$.

SOLUCIÓN

Como x y e^x son funciones del tiempo, deben aplicarse las reglas de la cadena y del producto. Hagamos que $u = x$ y $v = e^x$.

$$\dot{y} = [\dot{x}]e^x + x[e^x\dot{x}]$$

La segunda derivada con respecto al tiempo también requiere la aplicación de las reglas del producto y de la cadena. Observe que la regla del producto se aplica a tres variables con respecto al tiempo del último término, es decir, x, e^x, y $\dot{x}$.

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \{[\ddot{x}]e^x + \dot{x}[e^x\dot{x}]\} + \{[\dot{x}]e^x\dot{x} + x[e^x\dot{x}]\dot{x} + xe^x[\ddot{x}]\} \\ &= e^x[\ddot{x}(1 + x) + \dot{x}^2(2 + x)] \end{aligned}$$

Si $x = t^2$ entonces $\dot{x} = 2t$, $\ddot{x} = 2$, así que en función de t tenemos

$$\ddot{y} = e^{t^2}[2(1 + t^2) + 4t^2(2 + t^2)]$$

C

EJEMPLO C-3

Si la trayectoria en coordenadas radicales se da como $r = 5\theta^2$, donde θ es una función conocida de tiempo, determine $\ddot{r}$.

SOLUCIÓN

En primer lugar, con la regla de la cadena y luego las reglas de la cadena y del producto donde $u = 10\theta$ y $v = \dot{\theta}$, tenemos

$$r = 5\theta^2$$
$$\dot{r} = 10\theta\dot{\theta}$$
$$\ddot{r} = 10[(\dot{\theta})\dot{\theta} + \theta(\ddot{\theta})]$$
$$= 10\dot{\theta}^2 + 10\theta\ddot{\theta}$$

EJEMPLO C-4

Si $r^2 = 6\theta^3$, determine $\ddot{r}$.

SOLUCIÓN

En este caso, las reglas de la cadena y del producto se aplican como sigue.

$$r^2 = 6\theta^3$$
$$2r\dot{r} = 18\theta^2\dot{\theta}$$
$$2[(\dot{r})\dot{r} + r(\ddot{r})] = 18[(2\theta\dot{\theta})\dot{\theta} + \theta^2(\ddot{\theta})]$$
$$\dot{r}^2 + r\ddot{r} = 9(2\theta\dot{\theta}^2 + \theta^2\ddot{\theta})$$

Para determinar $\ddot{r}$ con un valor especificado de θ el cual es una función conocida del tiempo, primero podemos determinar $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$. A continuación, con estos valores evaluamos r con la primera ecuación, $\dot{r}$ con la segunda y $\ddot{r}$ con la última.

Problemas fundamentales
Soluciones parciales y respuestas

Capítulo 12

F12-1. $v = v_0 + a_c t$

$10 = 35 + a_c(15)$

$a_c = -1.67\text{ m/s}^2 = 1.67\text{ m/s}^2 \leftarrow$ ***Resp.***

F12-2. $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_c t^2$

$0 = 0 + 15t + \frac{1}{2}(-9.81)t^2$

$t = 3.06\text{ s}$ ***Resp.***

F12-3. $ds = v\,dt$

$$\int_0^s ds = \int_0^t (4t - 3t^2)dt$$

$s = (2t^2 - t^3)\text{ m}$

$s = 2(4^2) - 4^3$

$= -32\text{ m} = 32\text{ m} \leftarrow$ ***Resp.***

F12-4. $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(0.5t^3 - 8t)$

$a = (1.5t^2 - 8)\text{ m/s}^2$

Cuando $t = 2\text{ s}$,

$a = 1.5(2^2) - 8 = -2\text{ m/s}^2 = 2\text{ m/s}^2 \leftarrow$ ***Resp.***

F12-5. $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^2 - 8t + 6) = (4t - 8)\text{ m/s}$

$v = 0 = (4t - 8)$

$t = 2\text{ s}$ ***Resp.***

$s|_{t=0} = 2(0^2) - 8(0) + 6 = 6\text{ m}$

$s|_{t=2} = 2(2^2) - 8(2) + 6 = -2\text{ m}$

$s|_{t=3} = 2(3^2) - 8(3) + 6 = 0\text{ m}$

$(\Delta s)_{\text{Tot}} = 8\text{ m} + 2\text{ m} = 10\text{ m}$ ***Resp.***

F12-6. $\int v\,dv = \int a\,ds$

$$\int_{5\text{ m/s}}^{v} v\,dv = \int_0^s (10 - 0.2s)ds$$

$v = \left(\sqrt{20s - 0.2s^2 + 25}\right)\text{ m/s}$

En $s = 10\text{ m}$,

$v = \sqrt{20(10) - 0.2(10^2) + 25} = 14.3\text{ m/s}$ ***Resp.***

F12-7. $v = \int (4t^2 - 2)\,dt$

$v = \frac{4}{3}t^3 - 2t + C_1$

$s = \int \left(\frac{4}{3}t^3 - 2t + C_1\right)dt$

$s = \frac{1}{3}t^4 - t^2 + C_1 t + C_2$

$t = 0, s = -2, C_2 = -2$

$t = 2, s = -20, C_1 = -9.67$

$t = 4, s = 28.7\text{ m}$ ***Resp.***

F12-8. $a = v\frac{dv}{ds}$

$= (20 - 0.05s^2)(-0.1s)$

En $s = 15\text{ m}$,

$a = -13.1\text{ m/s}^2 = 13.1\text{ m/s}^2 \leftarrow$ ***Resp.***

F12-9. $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(0.5t^3) = 1.5t^2$

$v|_{t=6\text{ s}} = 1.5(6^2) = 54\text{ m/s}$

$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(108) = 0$ ***Resp.***

F12-10. $ds = v\,dt$

$$\int_0^s ds = \int_0^t (-4t + 80)\,dt$$

$s = -2t^2 + 80t$

$s = -2(20)^2 + 80(20) = 800\text{ pies}$

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-4t + 80) = -4\text{ pies/s}^2 = 4\text{ pies/s}^2 \leftarrow$

Además,

$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 80\text{ pies/s}}{20\text{ s} - 0} = -4\text{ pies/s}^2$

F12-11. $a\,ds = v\,dv$

$a = v\frac{dv}{ds} = 0.25s\frac{d}{ds}(0.25s) = 0.0625s$

$a|_{s=40\text{ m}} = 0.0625(40\text{ m}) = 2.5\text{ m/s}^2 \rightarrow$

F12-12. $0 \le t < 5\text{ s}$,

$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2) = (6t)\text{ m/s}$

$v|_{t=5\text{ s}} = 6(5) = 30\text{ m/s}$

$5\text{ s} < t \le 10\text{ s}$,

$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(30t - 75) = 30\text{ m/s}$

$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{225\text{ m} - 75\text{ m}}{10\text{ m} - 5\text{ m}} = 30\text{ m/s}$

$0 \le t < 5\text{ s}$,

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(6t) = 6\text{ m/s}^2$

$5\text{ s} < t \le 10\text{ s}$,

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(30) = 0$

$0 \le t < 5\text{ s}, a = \Delta v/\Delta t = 6\text{ m/s}^2$

$5\text{ s} < t \le 10\text{ s}, a = \Delta v/\Delta t = 0$

F12-13. $0 \leq t < 5$ s,

$dv = a\,dt \qquad \int_0^v dv = \int_0^t 20\,dt$

$v = (20t)$ m/s

$v = 20(5) = 100$ m/s

$5\text{ s} < t \leq t'$,

$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad dv = a\,dt \qquad \int_{100\text{ m/s}}^{v} dv = \int_{5\text{s}}^{t} -10\,dt$

$v = (150 - 10t)$ m/s,

$0 = 150 - 10t'$

$t' = 15$ s

Además,

$\Delta v = 0 =$ Área bajo la gráfica a-t

$0 = (20\text{ m/s}^2)(5\text{ s}) + [-(10\text{ m/s})(t' - 5)\text{ s}]$

$t' = 15$ s

F12-14. $0 \leq t \leq 5$ s,

$ds = v\,dt \qquad \int_0^s ds = \int_0^t 30t\,dt$

$s|_0^s = 15t^2|_0^t$

$s = (15t^2)$ m

$s = 15(5^2) = 375$ m

$5\text{ s} < t \leq 15$ s,

$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad ds = v\,dt; \qquad \int_{375\text{ m}}^{s} ds = \int_{5\text{s}}^{t} (-15t + 225)dt$

$s = (-7.5t^2 + 225t - 562.5)$ m

$s = (-7.5)(15)^2 + 225(15) - 562.5$ m

$= 1125$ m **Resp.**

Además,

$\Delta s =$ Área bajo la gráfica v-t

$= \frac{1}{2}(150\text{ m/s})(15\text{ s})$

$= 1125$ m **Resp.**

F12-15. $\int_0^x dx = \int_0^t 32t\,dt$

$x = (16t^2)$ m (1)

$\int_0^y dy = \int_0^t 8\,dt$

$t = \frac{y}{8}$ (2)

Se sustituye la ecuación (2) en la ecuación (1),

$y^2 = 4x$ **Resp.**

F12-16. $y = 0.75(8t) = 6t$

$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(8t) = 8\text{ m/s} \rightarrow$

$v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(6t) = 6\text{ m/s} \uparrow$

La magnitud de la velocidad de la partícula es

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(8\text{ m/s})^2 + (6\text{ m/s})^2}$

$= 10$ m/s **Resp.**

F12-17. $y = (4t^2)$ m

$v_x = \dot{x} = \frac{d}{dt}(4t^4) = (16t^3)\text{ m/s} \rightarrow$

$v_y = \dot{y} = \frac{d}{dt}(4t^2) = (8t)\text{ m/s} \uparrow$

Cuando $t = 0.5$ s,

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2\text{ m/s})^2 + (4\text{ m/s})^2}$

$= 4.47$ m/s **Resp.**

$a_x = \dot{v}_x = \frac{d}{dt}(16t^3) = (48t^2)\text{ m/s}^2$

$a_y = \dot{v}_y = \frac{d}{dt}(8t) = 8\text{ m/s}^2$

Cuando $t = 0.5$ s,

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(12\text{ m/s}^2)^2 + (8\text{ m/s}^2)^2}$

$= 14.4\text{ m/s}^2$ **Resp.**

F12-18. $y = 0.5x$

$\dot{y} = 0.5\dot{x}$

$v_y = t^2$

Cuando $t = 4$ s,

$v_x = 32$ m/s $\qquad v_y = 16$ m/s

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 35.8$ m/s **Resp.**

$a_x = \dot{v}_x = 4t$

$a_y = \dot{v}_y = 2t$

Cuando $t = 4$ s,

$a_x = 16\text{ m/s}^2 \qquad a_y = 8\text{ m/s}^2$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{16^2 + 8^2} = 17.9\text{ m/s}^2$ **Resp.**

F12-19. $y = (t^4)$ m

$v_x = \dot{x} = (4t)$ m/s $\qquad v_y = \dot{y} = (4t^3)$ m/s

Cuando $t = 2$ s,

$v_x = 8$ m/s $\qquad v_y = 32$ m/s

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 33.0$ m/s **Resp.**

$a_x = \dot{v}_x = 4\text{ m/s}^2$

$a_y = \dot{v}_y = (12t^2)\text{ m/s}^2$

Cuando $t = 2$ s,

$a_x = 4\text{ m/s}^2 \qquad a_y = 48\text{ m/s}^2$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4^2 + 48^2} = 48.2\text{ m/s}^2$ **Resp.**

F12-20. $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = [4\cos 2t\,\mathbf{i} - 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} - 4t\mathbf{k}]$ pies/s
Cuando $t = 2$ s,
$= \{-2.61\mathbf{i} - 1.82\mathbf{j} - 8\mathbf{k}\}$ pies/s **Resp.**
$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \{-8\,\text{sen}\,2t\,\mathbf{i} - 2\cos t\,\mathbf{j} - 4\,\mathbf{k}\}$ pies/s^2
Cuando $t = 2$ s,
$\mathbf{a} = [6.05\mathbf{i} + 0.832\mathbf{j} - 4\mathbf{k}]$ pies/s^2 **Resp.**

F12-21. $(v_B)_y^2 = (v_A)_y^2 + 2a_y(y_B - y_A)$
$0^2 = (5\text{ m/s})^2 + 2(-9.81\text{ m/s}^2)(h - 0)$
$h = 1.27$ m **Resp.**

F12-22. $y_C = y_A + (v_A)_y t_{AC} + \frac{1}{2}a_y t_{AC}^2$
$0 = 0 + (5\text{ m/s})t_{AC} + \frac{1}{2}(-9.81\text{ m/s}^2)t_{AC}^2$
$t_{AC} = 1.0194$ s
$(v_C)_y = (v_A)_y + a_y t_{AC}$
$(v_C)_y = 5\text{ m/s} + (-9.81\text{ m/s}^2)(1.0194\text{ s})$
$= -5\text{ m/s} = 5\text{ m/s}\downarrow$
$v_C = \sqrt{(v_C)_x^2 + (v_C)_y^2}$
$= \sqrt{(8.660\text{ m/s})^2 + (5\text{ m/s})^2} = 10\text{ m/s}$ **Resp.**
$R = x_A + (v_A)_x t_{AC} = 0 + (8.660\text{ m/s})(1.0194\text{ s})$
$= 8.83$ m **Resp.**

F12-23. $s = s_0 + v_0 t$
$10 = 0 + v_A\cos 30^\circ t$
$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_c t^2$
$3 = 1.5 + v_A\,\text{sen}\,30^\circ t + \frac{1}{2}(-9.81)t^2$
$t = 0.9334, \quad v_A = 12.4\text{ m/s}$ **Resp.**

F12-24. $s = s_0 + v_0 t$
$R\left(\frac{4}{5}\right) = 0 + 20\left(\frac{3}{5}\right)t$
$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_c t^2$
$-R\left(\frac{3}{5}\right) = 0 + 20\left(\frac{4}{5}\right)t + \frac{1}{2}(-9.81)t^2$
$t = 5.10$ s
$R = 76.5$ m **Resp.**

F12-25. $x_B = x_A + (v_A)_x t_{AB}$
12 pies $= 0 + (0.8660\,v_A)t_{AB}$
$v_A t_{AB} = 13.856$ (1)
$y_B = y_A + (v_A)_y t_{AB} + \frac{1}{2}a_y t_{AB}^2$
$(8 - 3)$ pies $= 0 + 0.5v_A t_{AB} + \frac{1}{2}(-32.2\text{ pies/s}^2)t_{AB}^2$
Con la ecuación (1),
$5 = 0.5(13.856) - 16.1\,t_{AB}^2$
$t_{AB} = 0.3461$ s
$v_A = 40.4$ pies/s **Resp.**

F12-26. $y_B = y_A + (v_A)_y t_{AB} + \frac{1}{2}a_y t_{AB}^2$
$-150\text{ m} = 0 + (90\text{ m/s})t_{AB} + \frac{1}{2}(-9.81\text{ m/s}^2)t_{AB}^2$
$t_{AB} = 19.89$ s
$x_B = x_A + (v_A)_x t_{AB}$
$R = 0 + 120\text{ m/s}(19.89\text{ s}) = 2386.37$ m
$= 2.39$ km **Resp.**

F12-27. $a_t = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(0.0625t^2) = (0.125t)\text{ m/s}^2\big|_{t=10\text{ s}}$
$= 1.25\text{ m/s}^2$
$a_n = \dfrac{v^2}{\rho} = \dfrac{(0.0625t^2)^2}{40\text{ m}} = \left[97.656(10^{-6})t^4\right]\text{m/s}^2\big|_{t=10\text{ s}}$
$= 0.9766\text{ m/s}^2$
$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(1.25\text{ m/s}^2)^2 + (0.9766\text{ m/s}^2)^2}$
$= 1.59\text{ m/s}^2$ **Resp.**

F12-28. $dt = \dfrac{ds}{v} \qquad \displaystyle\int_0^{3\text{ s}} dt = \int_0^s \frac{ds}{(300/s)}$
$t\big|_0^{3\text{ s}} = \frac{1}{600}s^2\big|_0^s$
$3 = \frac{1}{600}s^2$
$s = 42.43$ m
$v = \left(\frac{300}{42.43}\right)\text{m/s} = 7.071\text{ m/s}$
$a_n = \dfrac{v^2}{\rho} = \dfrac{(7.071\text{ m/s})^2}{100\text{ m}} = 0.5\text{ m/s}^2$
$a_t = v\frac{dv}{ds} = \left(\dfrac{300}{s}\right)\left(-\dfrac{300}{s^2}\right)\text{m/s}^2$
En $s = 43.43$ m,
$a_t = -1.179\text{ m/s}^2$
$a = \sqrt{{a_t}^2 + {a_n}^2} = \sqrt{\left(0.5\text{ m/s}^2\right)^2 + \left(-1.179\text{ m/s}^2\right)^2}$
$= 1.28\text{ m/s}^2$ **Resp.**

F12-29. $v_C^2 = v_A^2 + 2a_t(s_C - s_A)$
$(15\text{ m/s})^2 = (25\text{ m/s})^2 + 2a_t(300\text{ m} - 0)$
$a_t = -0.6667\text{ m/s}^2$
$v_B^2 = v_A^2 + 2a_t(s_B - s_A)$
$v_B^2 = (25\text{ m/s})^2 + 2(-0.6667\text{ m/s}^2)(250\text{ m} - 0)$
$v_B = 17.08$ m/s
$(a_B)_n = \dfrac{v_B^2}{\rho} = \dfrac{(17.08\text{ m/s})^2}{300\text{ m}} = 0.9722\text{ m/s}^2$
$a_B = \sqrt{(a_B)_t^2 + (a_B)_n^2}$
$= \sqrt{(-0.6667\text{ m/s}^2)^2 + (0.9722\text{ m/s}^2)^2}$
$= 1.18\text{ m/s}^2$ **Resp.**

F12-30. $\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{24}x^2\right) = \frac{1}{12}x$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{12}x\right)\Big|_{x=10\text{ pies}}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{10}{12}\right) = 39.81° = 39.8° \quad \textit{Resp.}$$

$$\rho = \frac{\left[1 + (dy/dx)^2\right]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|} = \frac{\left[1 + \left(\frac{1}{12}x\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{1}{12}\right|}\Bigg|_{x=10\text{ pies}}$$

$$= 26.468 \text{ pies}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(20 \text{ pies/s})^2}{26.468 \text{ pies}} = 15.11 \text{ pies/s}^2$$

$$a = \sqrt{(a_t)^2 + (a_n)^2} = \sqrt{(6 \text{ pies/s}^2)^2 + (15.11 \text{ pies/s}^2)^2}$$

$$= 16.3 \text{ pies/s}^2 \quad \textit{Resp.}$$

F12-31. $(a_B)_t = -0.001s = (-0.001)(300 \text{ m})\left(\frac{\pi}{2}\text{ rad}\right) \text{ m/s}^2$

$$= -0.4712 \text{ m/s}^2$$

$$v\,dv = a_t\,ds$$

$$\int_{25 \text{ m/s}}^{v_B} v\,dv = \int_0^{150\pi \text{ m}} -0.001s\,ds$$

$$v_B = 20.07 \text{ m/s}$$

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(20.07 \text{ m/s})^2}{300 \text{ m}} = 1.343 \text{ m/s}^2$$

$$a_B = \sqrt{(a_B)_t^2 + (a_B)_n^2}$$

$$= \sqrt{(-0.4712 \text{ m/s}^2)^2 + (1.343 \text{ m/s}^2)^2}$$

$$= 1.42 \text{ m/s}^2 \quad \textit{Resp.}$$

F12-32. $a_t\,ds = v\,dv$

$$a_t = v\frac{dv}{ds} = (0.2s)(0.2) = (0.04s) \text{ m/s}^2$$

$$a_t = 0.04(50 \text{ m}) = 2 \text{ m/s}^2$$

$$v = 0.2\,(50 \text{ m}) = 10 \text{ m/s}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(10 \text{ m/s})^2}{500 \text{ m}} = 0.2 \text{ m/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(2 \text{ m/s}^2)^2 + (0.2 \text{ m/s}^2)^2}$$

$$= 2.01 \text{ m/s}^2 \quad \textit{Resp.}$$

F12-33. $v_r = \dot{r} = 0$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = (400\dot{\theta}) \text{ pies/s}$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$

$$55 \text{ pies/s} = \sqrt{0^2 + [(400\dot{\theta}) \text{ pies/s}]^2}$$

$$\dot{\theta} = 0.1375 \text{ rad/s} \quad \textit{Resp.}$$

F12-34. $r = 0.1t^3\big|_{t=1.5\text{ s}} = 0.3375 \text{ m}$

$$\dot{r} = 0.3t^2\big|_{t=1.5\text{ s}} = 0.675 \text{ m/s}$$

$$\ddot{r} = 0.6t\big|_{t=1.5\text{ s}} = 0.900 \text{ m/s}^2$$

$$\theta = 4t^{3/2}\big|_{t=1.5\text{ s}} = 7.348 \text{ rad}$$

$$\dot{\theta} = 6t^{1/2}\big|_{t=1.5\text{ s}} = 7.348 \text{ rad/s}$$

$$\ddot{\theta} = 3t^{-1/2}\big|_{t=1.5\text{ s}} = 2.449 \text{ rad/s}^2$$

$$v_r = \dot{r} = 0.675 \text{ m/s}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = (0.3375 \text{ m})(7.348 \text{ rad/s}) = 2.480 \text{ m/s}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$= (0.900 \text{ m/s}^2) - (0.3375 \text{ m})(7.348 \text{ rad/s})^2$$

$$= -17.325 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (0.3375 \text{ m})(2.449 \text{ rad/s}^2)$$

$$+ 2(0.675 \text{ m/s})(7.348 \text{ rad/s}) = 10.747 \text{ m/s}^2$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$

$$= \sqrt{(0.675 \text{ m/s})^2 + (2.480 \text{ m/s})^2}$$

$$= 2.57 \text{ m/s} \quad \textit{Resp.}$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

$$= \sqrt{(-17.325 \text{ m/s}^2)^2 + (10.747 \text{ m/s}^2)^2}$$

$$= 20.4 \text{ m/s}^2 \quad \textit{Resp.}$$

F12-35. $r = 2\theta$

$$\dot{r} = 2\dot{\theta}$$

$$\ddot{r} = 2\ddot{\theta}$$

En $\theta = \pi/4$ rad,

$$r = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\dot{r} = 2(3 \text{ rad/s}) = 6 \text{ pies/s}$$

$$\ddot{r} = 2(1 \text{ rad/s}) = 2 \text{ pies/s}^2$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 2 \text{ pies/s}^2 - \left(\frac{\pi}{2}\text{ pies}\right)(3 \text{ rad/s})^2$$

$$= -12.14 \text{ pies/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\text{ pies}\right)(1 \text{ rad/s}^2) + 2(6 \text{ pies/s})(3 \text{ rad/s})$$

$$= 37.57 \text{ pies/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

$$= \sqrt{(-12.14 \text{ pies/s}^2)^2 + (37.57 \text{ pies/s}^2)^2}$$

$$= 39.5 \text{ pies/s}^2 \quad \textit{Resp.}$$

F12-36. $r = e^{\theta}$

$\dot{r} = e^{\theta}\dot{\theta}$

$\ddot{r} = e^{\theta}\ddot{\theta} + e^{\theta}\dot{\theta}^2$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = (e^{\theta}\ddot{\theta} + e^{\theta}\dot{\theta}^2) - (e^{\theta}\dot{\theta}^2 = e^{\pi/4}(4)$

$= 8.77 \text{ m/s}^2$ ***Resp.***

$a_{\theta} = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (e^{\theta}\ddot{\theta}) + (2(e^{\theta}\dot{\theta})\dot{\theta}) = e^{\theta}(\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}^2)$

$= e^{\pi/4}(4 + 2(2)^2)$

$= 26.3 \text{ m/s}^2$ ***Resp.***

F12-37. $r = [0.2(1 + \cos\theta)] \text{ m}\big|_{\theta=30°} = 0.3732 \text{ m}$

$\dot{r} = \left[-0.2\,(\text{sen }\theta)\dot{\theta}\right] \text{ m/s}\big|_{\theta=30°}$

$= -0.2 \text{ sen } 30°(3 \text{ rad/s})$

$= -0.3 \text{ m/s}$

$v_r = \dot{r} = -0.3 \text{ m/s}$

$v_{\theta} = r\dot{\theta} = (0.3732 \text{ m})(3 \text{ rad/s}) = 1.120 \text{ m/s}$

$v = \sqrt{v_r^2 + v_{\theta}^2} = \sqrt{(-0.3 \text{ m/s})^2 + (1.120 \text{ m/s})^2}$

$= 1.16\text{m}$ ***Resp.***

F12-38. $30 \text{ m} = r \text{ sen } \theta$

$r = \left(\frac{30 \text{ m}}{\text{sen } \theta}\right) = (30 \csc\theta) \text{ m}$

$r = (30 \csc\theta)\big|_{\theta=45°} = 42.426 \text{ m}$

$\dot{r} = -30 \csc\theta \text{ ctn } \theta\,\dot{\theta}\big|_{\theta=45°} = -\left(42.426\dot{\theta}\right) \text{ m/s}$

$v_r = \dot{r} = -(42.426\dot{\theta}) \text{ m/s}$

$v_{\theta} = r\dot{\theta} = (42.426\dot{\theta}) \text{ m/s}$

$v = \sqrt{v_r^2 + v_{\theta}^2}$

$2 = \sqrt{(-42.426\dot{\theta})^2 + (42.426\dot{\theta})^2}$

$\dot{\theta} = 0.0333 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

F12-39. $l_T = 3s_D + s_A$

$0 = 3v_D + v_A$

$0 = 3v_D + 3 \text{ m/s}$

$v_D = -1 \text{ m/s} = 1 \text{ m/s} \uparrow$ ***Resp.***

F12-40. $s_B + 2s_A + 2h = l$

$v_B + 2v_A = 0$

$6 + 2v_A = 0 \quad v_A = -3 \text{ pies/s} = 3 \text{ pies/s} \uparrow$ ***Resp.***

F12-41. $3s_A + s_B = l$

$3v_A + v_A = 0$

$3v_A + 1.5 = 0 \quad v_A = -0.5 \text{ m/s} = 0.5 \text{ m/s} \uparrow$ ***Resp.***

F12-42. $l_T = 4\,s_A + s_F$

$0 = 4\,v_A + v_F$

$0 = 4\,v_A + 3 \text{ m/s}$

$v_A = -0.75 \text{ m/s} = 0.75 \text{ m/s} \uparrow$ ***Resp.***

F12-43. $s_A + 2(s_A - a) + (s_A - s_P) = l$

$4s_A - s_P = l + 2a$

$4v_A - v_P = 0$

$4v_A - 4 = 0 \qquad v_A = 1 \text{ m/s}$ ***Resp.***

F12-44. $s_C + s_B = l_{CED}$ (1)

$(s_A - s_C) + (s_B - s_C) + s_B = l_{ACDF}$

$s_A + 2s_B - 2s_C = l_{ACDF}$ (2)

Por tanto,

$v_C + v_B = 0$

$v_A + 2v_B - 2v_C = 0$

Al eliminar v_C,

$v_A + 4v_B = 0$

Por tanto,

$4 \text{ pies/s} + 4v_B = 0$

$v_B = -1 \text{ pie/s} = 1 \text{ pie/s} \uparrow$ ***Resp.***

F12-45. $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$

$100\mathbf{i} = 80\mathbf{j} + \mathbf{v}_{B/A}$

$\mathbf{v}_{B/A} = 100\mathbf{i} - 80\mathbf{j}$

$\mathbf{v}_{B/A} = \sqrt{(v_{B/A})_x^2 + (v_{B/A})_y^2}$

$= \sqrt{(100 \text{ km/h})^2 + (-80 \text{ km/h})^2}$

$= 128 \text{ km/h}$ ***Resp.***

$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{(v_{B/A})_y}{(v_{B/A})_x}\right] = \tan^{-1}\left(\frac{80 \text{ km/h}}{100 \text{ km/h}}\right) = 38.7°$ ***Resp.***

F12-46. $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$

$(-400\mathbf{i} - 692.82\mathbf{j}) = (650\mathbf{i}) + \mathbf{v}_{B/A}$

$\mathbf{v}_{B/A} = [-1050\mathbf{i} - 692.82\mathbf{j}] \text{ km/h}$

$\mathbf{v}_{B/A} = \sqrt{(v_{B/A})_x^2 + (v_{B/A})_y^2}$

$= \sqrt{(1050 \text{ km/h})^2 + (692.82 \text{ km/h})^2}$

$= 1258 \text{ km/h}$ ***Resp.***

$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{(v_{B/A})_y}{(v_{B/A})_x}\right] = \tan^{-1}\left(\frac{692.82 \text{ km/h}}{1050 \text{ km/h}}\right) = 33.4°$

Resp.

F12-47. $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$

$(5\mathbf{i} + 8.660\mathbf{j}) = (12.99\mathbf{i} + 7.5\mathbf{j}) + \mathbf{v}_{B/A}$

$\mathbf{v}_{B/A} = [-7.990\mathbf{i} + 1.160\mathbf{j}] \text{ m/s}$

$v_{B/A} = \sqrt{(-7.990 \text{ m/s})^2 + (1.160 \text{ m/s})^2}$

$= 8.074 \text{ m/s}$ ***Resp.***

$d_{AB} = v_{B/A}t = (8.074 \text{ m/s})(4 \text{ s}) = 32.3 \text{ m}$ ***Resp.***

F12-48. $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$

$-20 \cos 45°\mathbf{i} + 20 \text{ sen } 45°\mathbf{j} = 65\mathbf{i} + \mathbf{v}_{A/B}$

$\mathbf{v}_{A/B} = -79.14\mathbf{i} + 14.14\mathbf{j}$

$v_{A/B} = \sqrt{(-79.14)^2 + (14.14)^2}$

$= 80.4 \text{ km/h}$ ***Resp.***

$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B}$

$\frac{(20)^2}{0.1} \cos 45°\mathbf{i} + \frac{(20)^2}{0.1} \text{sen } 45°\mathbf{j} = 1200\mathbf{i} + \mathbf{a}_{A/B}$

$\mathbf{a}_{A/B} = 1628\mathbf{i} + 2828\mathbf{j}$

$a_{A/B} = \sqrt{(1628)^2 + (2828)^2}$

$= 3.26(10^3) \text{ km/h}^2$ ***Resp.***

Capítulo 13

F13-1. $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$

$6 \text{ m} = 0 + 0 + \frac{1}{2} a(3 \text{ s})^2$

$a = 1.333 \text{ m/s}^2$

$\Sigma F_y = ma_y; \quad N_A - 20(9.81) \text{ N} \cos 30° = 0$

$N_A = 169.91 \text{ N}$

$\Sigma F_x = ma_x; \quad T - 20(9.81) \text{ N sen } 30°$

$- 0.3(169.91 \text{ N}) = (20 \text{ kg})(1.333 \text{ m/s}^2)$

$T = 176 \text{ N}$ ***Resp.***

F13-2. $(F_f)_{máx} = \mu_s N_A = 0.3(245.25 \text{ N}) = 73.575 \text{ N}$. Como $F = 100 \text{ N} > (F_f)_{máx}$ cuando $t = 0$, el embalaje comenzará a moverse inmediatamente después de que se aplique **F**.

$+\uparrow \Sigma F_y = ma_y; \quad N_A - 25(9.81) \text{ N} = 0$

$N_A = 245.25 \text{ N}$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = ma_x;$

$10t^2 + 100 - 0.25(245.25 \text{ N}) = (25 \text{ kg})a$

$a = (0.4t^2 + 1.5475) \text{ m/s}^2$

$dv = a\,dt$

$\int_0^v dv = \int_0^{4\text{ s}} (0.4t^2 + 1.5475) dt$

$v = 14.7 \text{ m/s} \rightarrow$ ***Resp.***

F13-3. $\xrightarrow{+} \Sigma F_x = ma_x;$

$\left(\frac{4}{5}\right)500 \text{ N} - (500s)\text{N} = (10 \text{ kg})a$

$a = (40 - 50s) \text{ m/s}^2$

$v\,dv = a\,ds$

$\int_0^v v\,dv = \int_0^{0.5\text{ m}} (40 - 50s)\,ds$

$\frac{v^2}{2}\Big|_0^v = \left(40s - 25s^2\right)\Big|_0^{0.5\text{ m}}$

$v = 5.24 \text{ m/s}$ ***Resp.***

F13-4. $\xrightarrow{+} \Sigma F_x = ma_x \quad (100s) \text{ N} = (2000 \text{ kg})a$

$a = (0.05s) \text{ m/s}^2$

$v\,dv = a\,ds$

$\int_0^v v\,dv = \int_0^{10\text{ m}} 0.05\,s\,ds$

$v = 2.24 \text{ m/s}$

F13-5. $F_{sp} = k(l - l_0) = (200 \text{ N/m})(0.5 \text{ m} - 0.3 \text{ m})$

$= 40 \text{ N}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0.3 \text{ m}}{0.4 \text{ m}}\right) = 36.86°$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = ma_x;$

$100 \text{ N} - (40 \text{ N})\cos 36.86° = (25 \text{ kg})a$

$a = 2.72 \text{ m/s}^2$

F13-6. Bloques A y B:

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = ma_x; \; 6 = \frac{70}{32.2} a; \; a = 2.76 \text{ pies/s}^2$

Compruebe si ocurre deslizamiento entre A y B.

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = ma_x; \; 6 - F = \frac{20}{32.2}(2.76);$

$F = 4.29 \text{ lb} < 0.4(20) = 8 \text{ lb}$

$a_A = a_B = 2.76 \text{ pies/s}^2$ ***Resp.***

F13-7. $\Sigma F_n = m\frac{v^2}{\rho}; \; (0.3)m(9.81) = m\frac{v^2}{2}$

$v = 2.43 \text{ m/s}$ ***Resp.***

F13-8. $+\downarrow \Sigma F_n = ma_n; \; m(32.2) = m\left(\frac{v^2}{250}\right)$

$v = 89.7 \text{ pies/s}$ ***Resp.***

F13-9. $+\downarrow \Sigma F_n = ma_n; \; 150 + N_p = \frac{150}{32.2}\left(\frac{(120)^2}{400}\right)$

$N_p = 17.7 \text{ lb}$ ***Resp.***

F13-10. $\xleftarrow{+} \Sigma F_n = ma_n;$

$N_c \text{ sen } 30° + 0.2\,N_c \cos 30° = m\frac{v^2}{500}$

$+\uparrow \Sigma F_b = 0;$

$N_c \cos 30° - 0.2N_c \text{ sen } 30° - m(32.2) = 0$

$v = 119 \text{ pies/s}$ ***Resp.***

F13-11. $\Sigma F_t = ma_t; \quad 10(9.81) \text{ N} \cos 45° = (10 \text{ kg})a_t$

$a_t = 6.94 \text{ m/s}^2$ ***Resp.***

$\Sigma F_n = ma_n;$

$T - 10(9.81) \text{ N sen } 45° = (10 \text{ kg})\frac{(3 \text{ m/s})^2}{2 \text{ m}}$

$T = 114 \text{ N}$ ***Resp.***

F13-12. $\Sigma F_n = ma_n;$

$F_n = (500 \text{ kg}) \dfrac{(15 \text{ m/s})^2}{200 \text{ m}} = 562.5 \text{ N}$

$\Sigma F_t = ma_t;$

$F_t = (500 \text{ kg})(1.5 \text{ m/s}^2) = 750 \text{ N}$

$F = \sqrt{F_n^2 + F_t^2} = \sqrt{(562.5 \text{ N})^2 + (750 \text{ N})^2}$

$= 938 \text{ N}$ ***Resp.***

F13-13. $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - (1.5 \text{ m} + (8 \text{ m})\text{sen } 45°)\dot{\theta}^2$

$= (-7.157\,\dot{\theta}^2) \text{ m/s}^2$

$\Sigma F_z = ma_z;$

$T \cos 45° - m(9.81) = m(0) \quad T = 13.87\, m$

$\Sigma F_r = ma_r;$

$-(13.87m) \text{ sen } 45° = m(-7.157\,\dot{\theta}^2)$

$\dot{\theta} = 1.17 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

F13-14. $\theta = \pi t^2\big|_{t=0.5\text{ s}} = (\pi/4) \text{ rad}$

$\dot{\theta} = 2\pi t\big|_{t=0.5\text{ s}} = \pi \text{ rad/s}$

$\ddot{\theta} = 2\pi \text{ rad/s}^2$

$r = 0.6 \text{ sen } \theta\big|_{\theta=\pi/4 \text{ rad}} = 0.4243 \text{ m}$

$\dot{r} = 0.6\,(\cos\theta)\dot{\theta}\big|_{\theta=\pi/4\text{ rad}} = 1.3329 \text{ m/s}$

$\ddot{r} = 0.6\,(\cos\theta)\ddot{\theta} - (\text{sen}\theta)\dot{\theta}^2\big|_{\theta=\pi/4\text{ rad}} = -1.5216 \text{ m/s}^2$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -1.5216 \text{ m/s}^2 - (0.4243 \text{ m})(\pi \text{ rad/s})^2$

$= -5.7089 \text{ m/s}^2$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0.4243 \text{ m}(2\pi \text{ rad/s}^2)$

$+ 2(1.3329 \text{ m/s})(\pi \text{ rad/s})$

$= 11.0404 \text{m/s}^2$

$\Sigma F_r = ma_r;$

$F\cos 45° - N\cos 45° - 0.2(9.81)\cos 45°$

$= 0.2(-5.7089)$

$\Sigma F_\theta = ma_\theta;$

$F\,\text{sen}45° + N\,\text{sen}45° - 0.2(9.81)\text{sen } 45°$

$= 0.2(11.0404)$

$N = 2.37 \text{ N} \qquad F = 2.72 \text{ N}$ ***Resp.***

F13-15. $r = 50e^{2\theta}\big|_{\theta=\pi/6\text{ rad}} = \left[50e^{2(\pi/6)}\right] \text{m} = 142.48 \text{ m}$

$\dot{r} = 50\left(2e^{2\theta}\,\dot{\theta}\right) = 100e^{2\theta}\,\dot{\theta}\big|_{\theta=\pi/6\text{ rad}}$

$= \left[100e^{2(\pi/6)}(0.05)\right] = 14.248 \text{ m/s}$

$\ddot{r} = 100\left((2e^{2\theta}\dot{\theta})\dot{\theta} + e^{2\theta}(\ddot{\theta})\right)\big|_{\theta=\pi/6\text{ rad}}$

$= 100\left[2e^{2(\pi/6)}\,(0.05^2) + e^{2(\pi/6)}(0.01)\right]$

$= 4.274 \text{ m/s}^2$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 4.274 \text{ m/s}^2 - 142.48 \text{ m}(0.05 \text{ rad/s})^2$

$= 3.918 \text{ m/s}^2$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 142.48 \text{ m}(0.01 \text{ rad/s}^2)$

$+ 2(14.248 \text{ m/s})(0.05 \text{ rad/s})$

$= 2.850 \text{ m/s}^2$

$\Sigma F_r = ma_r;$

$F_r = (2000 \text{ kg})(3.918 \text{ m/s}^2) = 7836.55 \text{ N}$

$\Sigma F_\theta = ma_\theta;$

$F_\theta = (2000 \text{ kg})(2.850 \text{ m/s}^2) = 5699.31 \text{ N}$

$F = \sqrt{F_r^2 + F_\theta^2}$

$= \sqrt{(7836.55 \text{ N})^2 + (5699.31 \text{ N})^2}$

$= 9689.87 \text{ N} = 9.69 \text{ kN}$

F13-16. $r = (0.6 \cos 2\theta) \text{ m}\big|_{\theta=0°} = [0.6 \cos 2(0°)] \text{ m} = 0.6 \text{ m}$

$\dot{r} = (-1.2 \text{ sen}2\theta\dot{\theta}) \text{ m/s}\big|_{\theta=0°}$

$= \left[-1.2 \text{ sen}2(0°)(-3)\right] \text{m/s} = 0$

$\ddot{r} = -1.2\left(\text{sen}2\theta\ddot{\theta} + 2\cos2\theta\dot{\theta}^2\right) \text{m/s}^2\big|_{\theta=0°}$

$= -21.6 \text{ m/s}^2$

Por tanto,

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -21.6 \text{ m/s}^2 - 0.6 \text{ m}(-3 \text{ rad/s})^2$

$= -27 \text{ m/s}^2$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta} = 0.6 \text{ m}(0) + 2(0)(-3 \text{ rad/s}) = 0$

$\Sigma F_\theta = ma_\theta; \qquad F - 0.2(9.81) \text{ N} = 0.2 \text{ kg}(0)$

$F = 1.96 \text{ N}$ ***Resp.***

Capítulo 14

F14-1. $T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$0 + \left(\frac{4}{5}\right)(500 \text{ N})(0.5 \text{ m}) - \frac{1}{2}(500 \text{ N/m})(0.5 \text{ m})^2$

$= \frac{1}{2}(10 \text{ kg})v^2$

$v = 5.24 \text{ m/s}$ ***Resp.***

F14-2. $\Sigma F_y = ma_y; \quad N_A - 20(9.81) \text{ N} \cos 30° = 0$

$N_A = 169.91 \text{ N}$

$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$0 + 300 \text{ N}(10 \text{ m}) - 0.3(169.91 \text{ N})\,(10 \text{ m})$

$- 20(9.81)\text{N}\,(10 \text{ m}) \text{ sen } 30°$

$= \frac{1}{2}(20 \text{ kg})v^2$

$v = 12.3 \text{ m/s}$ ***Resp.***

F14-3. $T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$$0 + 2\left[\int_0^{15\text{ m}} (600 + 2s^2)\text{ N } ds\right] - 100(9.81)\text{ N}(15\text{ m}) = \tfrac{1}{2}(100\text{ kg})v^2$$

$v = 12.5$ m/s **Resp.**

F14-4. $T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$$\tfrac{1}{2}(1800\text{ kg})(125\text{ m/s})^2 - \left[\tfrac{(50\,000\text{ N} + 20\,000\text{ N})}{2}(400\text{ m})\right] = \tfrac{1}{2}(1800\text{ kg})v^2$$

$v = 8.33$ m/s **Resp.**

F14-5. $T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$$\tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(5\text{ m/s})^2 + 100\text{ N}s' + [10(9.81)\text{ N}]\, s' \operatorname{sen} 30^\circ - \tfrac{1}{2}(200\text{ N/m})(s')^2 = 0$$

$s' = 2.09$ m

$s = 0.6\text{ m} + 2.09\text{ m} = 2.69$ m **Resp.**

F14-6. $T_A + \Sigma U_{A-B} = T_B$

Considere la diferencia de la longitud de la cuerda $AC - BC$, la cual es la distancia que F recorre.

$$0 + 10\text{ lb}\left(\sqrt{(3\text{ pies})^2 + (4\text{ pies})^2}\right) - 3\text{ pies} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{5}{32.2}\text{ slug}\right)v_B^2$$

$v_B = 16.0$ pies/s **Resp.**

F14-7. $\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = ma_x;$

$30\left(\tfrac{4}{5}\right) = 20a \qquad a = 1.2\text{ m/s}^2 \rightarrow$

$v = v_0 + a_c t$

$v = 0 + 1.2(4) = 4.8$ m/s

$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = F(\cos\theta)v$

$= 30\left(\tfrac{4}{5}\right)(4.8)$

$= 115$ W **Resp.**

F14-8. $\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = ma_x;$

$10s = 20a \qquad a = 0.5s\text{ m/s}^2 \rightarrow$

$v\,dv = a\,ds$

$$\int_0^v v\,dv = \int_0^{5\text{ m}} 0.5\,s\,ds$$

$v = 3.536$ m/s

$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = 10(5)(3.536) = 177$ W **Resp.**

F14-9. $(+\uparrow)\Sigma F_y = 0;$

$T_1 - 100\text{ lb} = 0 \qquad T_1 = 100$ lb

$(+\uparrow)\Sigma F_y = 0;$

$100\text{ lb} + 100\text{ lb} - T_2 = 0 \quad T_2 = 200$ lb

$P_{sal} = \mathbf{T}_B\cdot\mathbf{v}_B = (200\text{ lb})(3\text{ pies/s}) = 1.091$ hp

$$P_{ent} = \frac{P_{sal}}{\varepsilon} = \frac{1.091\text{ hp}}{0.8} = 1.36\text{ hp}$$ **Resp.**

F14-10. $\Sigma F_{y'} = ma_{y'}; \quad N - 20(9.81)\cos 30^\circ = 20(0)$

$N = 169.91$ N

$\Sigma F_{x'} = ma_{x'};$

$F - 20(9.81)\operatorname{sen} 30^\circ - 0.2(169.91) = 0$

$F = 132.08$ N

$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = 132.08(5) = 660$ W **Resp.**

F14-11. $+\uparrow\Sigma F_y = ma_y;$

$T - 50(9.81) = 50(0) \quad T = 490.5$ N

$P_{sal} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{v} = 490.5(1.5) = 735.75$ W

$$P_{ent} = \frac{P_{sal}}{\varepsilon} = \frac{735.75}{0.8} = 920\text{ W}$$ **Resp.**

F14-12. $2s_A + s_P = l$

$2a_A + a_P = 0$

$2a_A + 6 = 0$

$a_A = -3\text{ m/s}^2 = 3\text{ m/s}^2\uparrow$

$\Sigma F_y = ma_y; \quad T_A - 490.5\text{N} = (50\text{ kg})(3\text{m/s}^2)$

$T_A = 640.5$N

$P_{sal} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{v} = (640.5\text{N}/2)(12) = 3843$ W

$$P_{ent} = \frac{P_{sal}}{\varepsilon} = \frac{3843}{0.8} = 4803.75\text{ W} = 4.80\text{ kW}$$ **Resp.**

F14-13. $T_A + V_A = T_B + V_B$

$0 + 2(9.81)(1.5) = \tfrac{1}{2}(2)(v_B)^2 + 0$

$v_B = 5.42$ m/s **Resp.**

$$+\uparrow\Sigma F_n = ma_n;\ T - 2(9.81) = 2\left(\frac{(5.42)^2}{1.5}\right)$$

$T = 58.9$ N **Resp.**

F14-14. $T_A + V_A = T_B + V_B$

$\tfrac{1}{2}m_A v_A^2 + mgh_A = \tfrac{1}{2}m_B v_B^2 + mgh_B$

$$\left[\tfrac{1}{2}(2\text{ kg})(1\text{ m/s})^2\right] + [2\,(9.81)\text{ N}(4\text{ m})] = \left[\tfrac{1}{2}(2\text{ kg})v_B^2\right] + [0]$$

$v_B = 8.915\text{ m/s} = 8.92$ m/s **Resp.**

$$+\uparrow\Sigma F_n = ma_n;\quad N_B - 2(9.81)\text{N} = (2\text{ kg})\left(\frac{(8.915\text{ m/s})^2}{2\text{ m}}\right)$$

$N_B = 99.1$ N **Resp.**

F14-15. $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$\frac{1}{2}(2)(4)^2 + \frac{1}{2}(30)(2-1)^2$

$= \frac{1}{2}(2)(v)^2 - 2(9.81)(1) + \frac{1}{2}(30)(\sqrt{5}-1)^2$

$v = 5.26$ m/s **Resp.**

F14-16. $T_A + V_A = T_B + V_B$

$0 + \frac{1}{2}(4)(2.5-0.5)^2 + 5(2.5)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{32.2}\right)v_B^2 + \frac{1}{2}(4)(1-0.5)^2$

$v_B = 16.0$ pies/s **Resp.**

F14-17. $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 + \frac{1}{2}ks_1^2$

$= \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 + \frac{1}{2}ks_2^2$

$[0] + [0] + [0] = [0] +$

$[-75 \text{ lb}(5 \text{ pies} + s)] + \left[2\left(\frac{1}{2}(1000 \text{ lb/pie})s^2\right)\right.$

$\left. + \frac{1}{2}(1500 \text{ lb/pie})(s - 0.25 \text{ pie})^2\right]$

$s = s_A = s_C = 0.580$ pie **Resp.**

Además,

$s_B = 0.5803 \text{ pie} - 0.25 \text{ pie} = 0.330$ pie **Resp.**

F14-18. $T_A + V_A = T_B + V_B$

$\frac{1}{2}mv_A^2 + \left(\frac{1}{2}ks_A^2 + mgy_A\right)$

$= \frac{1}{2}mv_B^2 + \left(\frac{1}{2}ks_B^2 + mgy_B\right)$

$\frac{1}{2}(4 \text{ kg})(2 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(400 \text{ N/m})(0.1 \text{ m} - 0.2 \text{ m})^2 + 0$

$= \frac{1}{2}(4\text{kg})v_B^2 + \frac{1}{2}(400 \text{ N/m})(\sqrt{(0.4 \text{ m})^2 + (0.3 \text{ m})^2} - 0.2 \text{ m})^2 +$

$[4(9.81) \text{ N}](-(0.1 \text{ m} + 0.3 \text{ m}))$

$v_B = 1.962 \text{ m/s} = 1.96$ m/s **Resp.**

Capítulo 15

F15-1. $(\overset{+}{\rightarrow})\quad m(v_1)_x + \Sigma\int_{t1}^{t2} F_x dt = m(v_2)_x$

$(0.5 \text{ kg})(25 \text{ m/s})\cos 45° - \int F_x\,dt$

$= (0.5 \text{ kg})(10 \text{ m/s})\cos 30°$

$I_x = \int F_x\,dt = 4.509 \text{ N}\cdot\text{s}$

$(+\uparrow)\quad m(v_1)_y + \Sigma\int_{t1}^{t2} F_y\,dt = m(v_2)_y$

$-(0.5 \text{ kg})(25 \text{ m/s})\text{sen } 45° + \int F_y\,dt$

$= (0.5 \text{ kg})(10 \text{ m/s})\text{sen } 30°$

$I_y = \int F_y\,dt = 11.339 \text{ N}\cdot\text{s}$

$I = \int F\,dt = \sqrt{(4.509 \text{ N}\cdot\text{s})^2 + (11.339 \text{ N}\cdot\text{s})^2}$

$= 12.2 \text{ N}\cdot\text{s}$ **Resp.**

F15-2. $(+\uparrow)\quad m(v_1)_y + \Sigma\int_{t1}^{t2} F_y\,dt = m(v_2)_y$

$0 + N(4 \text{ s}) + (100 \text{ lb})(4 \text{ s})\text{sen } 30°$

$- (150 \text{ lb})(4 \text{ s}) = 0$

$N = 100$ lb

$(\overset{+}{\rightarrow})\quad m(v_1)_x + \Sigma\int_{t1}^{t2} F_x dt = m(v_2)_x$

$0 + (100 \text{ lb})(4 \text{ s})\cos 30° - 0.2(100 \text{ lb})(4 \text{ s})$

$= \left(\frac{150}{32.2}\text{ slug}\right)v$

$v = 57.2$ pies/s **Resp.**

F15-3. Tiempo para que se inicie el movimiento.

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\quad N - 25(9.81) \text{ N} = 0 \qquad N = 245.25 \text{ N}$

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\qquad 20t^2 - 0.3(245.25 \text{ N}) = 0 \quad t = 1.918 \text{ s}$

$(\overset{+}{\rightarrow})\quad m(v_1)_x + \Sigma\int_{t1}^{t2} F_x dt = m(v_2)_x$

$0 + \int_{1.918 \text{ s}}^{4 \text{ s}} 20t^2\,dt - (0.25(245.25 \text{ N}))(4 \text{ s} - 1.918 \text{ s})$

$= (25 \text{ kg})v$

$v = 10.1$ m/s **Resp.**

F15-4. $(\overset{+}{\rightarrow})\quad m(v_1)_x + \Sigma\int_{t1}^{t2} F_x\,dt = m(v_2)_x$

$(1500 \text{ kg})(0) + \left[\frac{1}{2}(6000 \text{ N})(2 \text{ s}) + (6000 \text{ N})(6 \text{ s} - 2 \text{ s})\right]$

$= (1500 \text{ kg})\,v$

$v = 20$ m/s **Resp.**

F15-5. Vehículo deportivo utilitario y remolque,

$m(v_1)_{x'} + \Sigma\int_{t1}^{t2} F_{x'}\,dt = m(v_2)_{x'}$

$0 + (9000 \text{ N})(20 \text{ s}) = (1500 \text{ kg} + 2500 \text{ kg})v$

$v = 45.0$ m/s **Resp.**

Remolque,

$m(v_1)_{x'} + \Sigma\int_{t1}^{t2} F_{x'}\,dt = m(v_2)_{x'}$

$0 + T(20 \text{ s}) = (1500 \text{ kg})(45.0 \text{ m/s})$

$T = 3375 \text{ N} = 3.375$ kN **Resp.**

F15-6. Bloque B:

$(+\downarrow)\ mv_1 + \int F\,dt = mv_2$

$0 + 8(5) - T(5) = \frac{8}{32.2}(1)$

$T = 7.95$ lb **Resp.**

Bloque A:

$(\overset{+}{\rightarrow})\ mv_1 + \int F\,dt = mv_2$

$0 + 7.95(5) - \mu_k(10)(5) = \frac{10}{32.2}(1)$

$\mu_k = 0.789$ **Resp.**

F15-7. $(\overset{+}{\rightarrow})\ m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2$

$(20(10^3)\text{ kg})(3\text{ m/s}) + (15(10^3)\text{ kg})(-1.5\text{ m/s})$

$= (20(10^3)\text{ kg})(v_A)_2 + (15(10^3)\text{ kg})(2\text{ m/s})$

$(v_A)_2 = 0.375\text{ m/s} \rightarrow$ **Resp.**

$(\overset{+}{\rightarrow})\ m(v_B)_1 + \Sigma\int_{t1}^{t2} F\,dt = m(v_B)_2$

$(15(10^3)\text{ kg})(-1.5\text{ m/s}) + F_{\text{prom}}(0.5\text{ s})$

$= (15(10^3)\text{ kg}(2\text{ m/s})$

$F_{\text{prom}} = 105(10^3)\text{ N} = 105\text{ kN}$ **Resp.**

F15-8. $(\overset{+}{\rightarrow})\ m_p[(v_p)_1]_x + m_c[(v_c)_1]_x = (m_p + m_c)v_2$

$5\left[10\left(\frac{4}{5}\right)\right] + 0 = (5 + 20)v_2$

$v_2 = 1.6\text{ m/s}$ **Resp.**

F15-9. $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$\frac{1}{2}m_A(v_A)_1^2 + (v_g)_1 = \frac{1}{2}m_A(v_A)_2^2 + (v_g)_2$

$\frac{1}{2}(5)(5)^2 + 5(9.81)(1.5) = \frac{1}{2}(5)(v_A)_2^2$

$(v_A)_2 = 7.378\text{ m/s}$

$(\overset{+}{\rightarrow})\ m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2 = (m_A + m_B)v$

$5(7.378) + 0 = (5 + 8)v$

$v = 2.84\text{ m/s}$ **Resp.**

F15-10. $(\overset{+}{\rightarrow})\ m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_A(v_B)_2$

$0 + 0 = 10(v_A)_2 + 15(v_B)_2$ (1)

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$\frac{1}{2}m_A(v_A)_1^2 + \frac{1}{2}m_B(v_B)_1^2 + (V_e)_1$

$= \frac{1}{2}m_A(v_A)_2^2 + \frac{1}{2}m_B(v_B)_2^2 + (V_e)_2$

$0 + 0 + \frac{1}{2}\left[5\left(10^3\right)\right]\left(0.2^2\right)$

$= \frac{1}{2}(10)(v_A)_2^2 + \frac{1}{2}(15)(v_B)_2^2 + 0$

$5(v_A)_2^2 + 7.5(v_B)_2^2 = 100$ (2)

Al resolver las ecuaciones (1) y (2),

$(v_B)_2 = 2.31\text{ m/s} \rightarrow$ **Resp.**

$(v_A)_2 = -3.464\text{ m/s} = 3.46\text{ m/s} \leftarrow$ **Resp.**

F15-11. $(\overset{+}{\leftarrow})\ m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = (m_A + m_B)v_2$

$0 + 10(15) = (15 + 10)v_2$

$v_2 = 6\text{ m/s}$

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$\frac{1}{2}(m_A + m_B)v_2^2 + (V_e)_2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_3^2 + (V_e)_3$

$\frac{1}{2}(15 + 10)\left(6^2\right) + 0 = 0 + \frac{1}{2}\left[10\left(10^3\right)\right]s_{\text{máx}}^2$

$s_{\text{máx}} = 0.3\text{ m} = 300\text{ mm}$ **Resp.**

F15-12. $(\overset{+}{\rightarrow})\ 0 + 0 = m_p(v_p)_x - m_c v_c$

$0 = (20\text{ kg})(v_p)_x - (250\text{ kg})v_c$

$(v_p)_x = 12.5\,v_c$ (1)

$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_{p/c}$

$(v_p)_x\mathbf{i} + (v_p)_y\mathbf{j} = -v_c\mathbf{i} + [(400\text{ m/s})\cos 30°\mathbf{i}$

$+ (400\text{ m/s})\text{ sen }30°\mathbf{j}]$

$(v_p)_x\mathbf{i} + (v_p)_y\mathbf{j} = (346.41 - v_c)\mathbf{i} + 200\mathbf{j}$

$(v_p)_x = 346.41 - v_c$

$(v_p)_y = 200\text{ m/s}$

$(v_p)_x = 320.75\text{ m/s} \qquad v_c = 25.66\text{ m/s}$

$v_p = \sqrt{(v_p)_x^2 + (v_p)_y^2}$

$= \sqrt{(320.75\text{ m/s})^2 + (200\text{ m/s})^2}$

$= 378\text{ m/s}$ **Resp.**

F15-13. $(\overset{+}{\rightarrow})\ e = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$

$= \dfrac{(9\text{ m/s}) - (1\text{ m/s})}{(8\text{ m/s}) - (-2\text{ m/s})} = 0.8$

F15-14. $(\overset{+}{\rightarrow})\ m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2$

$[15(10^3)\text{ kg}](5\text{ m/s}) + [25(10^3)](-7\text{ m/s})$

$= [15(10^3)\text{ kg}](v_A)_2 + [25(10^3)](v_B)_2$

$15(v_A)_2 + 25(v_B)_2 = -100$ (1)

Con la ecuación del coeficiente de restitución,

$(\overset{+}{\rightarrow})\ e = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$

$0.6 = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{5\text{ m/s} - (-7\text{ m/s})}$

$(v_B)_2 - (v_A)_2 = 7.2$ (2)

Al resolver,

$(v_B)_2 = 0.2\text{ m/s} \rightarrow$ **Resp.**

$(v_A)_2 = -7\text{ m/s} = 7\text{ m/s} \leftarrow$ **Resp.**

F15-15. $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$\frac{1}{2}m(v_A)_1^2 + mg(h_A)_1 = \frac{1}{2}m(v_A)_2^2 + mg(h_A)_2$

$\frac{1}{2}\left(\frac{30}{32.2}\text{ slug}\right)(5\text{ pies/s})^2 + (30\text{ lb})(10\text{ pies})$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{30}{32.2}\text{ slug}\right)(v_A)_2^2 + 0$

$(v_A)_2 = 25.87\text{ pies/s} \leftarrow$

$(\overset{+}{\leftarrow})\quad m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2 = m_A(v_A)_3 + m_B(v_B)_3$

$\left(\frac{30}{32.2}\text{ slug}\right)(25.87\text{ pies/s}) + 0$

$= \left(\frac{30}{32.2}\text{ slug}\right)(v_A)_3 + \left(\frac{80}{32.2}\text{ slug}\right)(v_B)_3$

$30(v_A)_3 + 80(v_B)_3 = 775.95 \qquad (1)$

$(\overset{+}{\leftarrow})\qquad e = \dfrac{(v_B)_3 - (v_A)_3}{(v_A)_2 - (v_B)_2}$

$0.6 = \dfrac{(v_B)_3 - (v_A)_3}{25.87\text{ pies/s} - 0}$

$(v_B)_3 - (v_A)_3 = 15.52 \qquad (2)$

Al resolver las ecuaciones (1) y (2), obtenemos

$(v_B)_3 = 11.3\text{ pies/s} \leftarrow$

$(v_A)_3 = -4.23\text{ pies/s} = 4.23\text{ pies/s} \rightarrow$ ***Resp.***

F15-16. Después de la colisión: $T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$\frac{1}{2}\left(\frac{5}{32.2}\right)(v_A)_2^2 - 0.2(5)\left(\frac{2}{12}\right) = 0$

$(v_A)_2 = 1.465\text{ pies/s}$

$\frac{1}{2}\left(\frac{10}{32.2}\right)(v_B)_2^2 - 0.2(10)\left(\frac{3}{12}\right) = 0$

$(v_B)_2 = 1.794\text{ pies/s}$

$\Sigma mv_1 = \Sigma mv_2$

$\frac{5}{32.2}(v_A)_1 + 0 = \frac{5}{32.2}(1.465) + \frac{10}{32.2}(1.794)$

$(v_A)_1 = 5.054$

$e = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1} = \dfrac{1.794 - 1.465}{5.054 - 0}$

$= 0.0652$ ***Resp.***

F15-17. $(+\uparrow)\quad m[(v_b)_1]_y = m[(v_b)_2]_y$

$[(v_b)_2]_y = [(v_b)_1]_y = (20\text{ m/s})\text{sen}30° = 10\text{ m/s}\uparrow$

$(\overset{+}{\rightarrow})\qquad e = \dfrac{(v_w)_2 - [(v_b)_2]_x}{[(v_b)_1]_x - (v_w)_1}$

$0.75 = \dfrac{0 - [(v_b)_2]_x}{(20\text{ m/s})\cos 30° - 0}$

$[(v_b)_2]_x = -12.99\text{ m/s} = 12.99\text{ m/s} \leftarrow$

$(v_b)_2 = \sqrt{[(v_b)_2]_x^2 + [(v_b)_2]_y^2}$

$= \sqrt{(12.99\text{ m/s})^2 + (10\text{ m/s})^2}$

$= 16.4\text{ m/s}$ ***Resp.***

$\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{[(v_b)_2]_y}{[(v_b)_2]_x}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{10\text{ m/s}}{12.99\text{ m/s}}\right)$

$= 37.6°$ ***Resp.***

F15-18. $\Sigma m(v_x)_1 = \Sigma m(v_x)_2$

$0 + 0 = \frac{2}{32.2}(1) + \frac{11}{32.2}(v_{Bx})_2$

$(v_{Bx})_2 = -0.1818\text{ pie/s}$

$\Sigma m(v_y)_1 = \Sigma m(v_y)_2$

$\frac{2}{32.2}(3) + 0 = 0 + \frac{11}{32.2}(v_{By})_2$

$(v_{By})_2 = 0.545\text{ pie/s}$

$(v_B)_2 = \sqrt{(-0.1818)^2 + (0.545)^2}$

$= 0.575\text{ pie/s}$ ***Resp.***

F15-19. $H_O = \Sigma mvd;$

$H_O = \left[2(10)\left(\frac{4}{5}\right)\right](4) - \left[2(10)\left(\frac{3}{5}\right)\right](3)$

$= 28\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ ↺

F15-20. $H_P = \Sigma mvd;$

$H_P = [2(15)\text{ sen }30°](2) - [2(15)\cos 30°](5)$

$= -99.9\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} = 99.9\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ ↻

F15-21. $(H_z)_1 + \Sigma\int M_z\,dt = (H_z)_2$

$5(2)(1.5) + 5(1.5)(3) = 5v(1.5)$

$v = 5\text{ m/s}$ ***Resp.***

F15-22. $(H_z)_1 + \Sigma\int M_z\,dt = (H_z)_2$

$0 + \int_0^{4\text{ s}}(10t)\left(\frac{4}{5}\right)(1.5)dt = 5v(1.5)$

$v = 12.8\text{ m/s}$ ***Resp.***

F15-23. $(H_z)_1 + \Sigma\int M_z\,dt = (H_z)_2$

$0 + \int_0^{5\text{ s}}0.9t^2\,dt = 2v(0.6)$

$v = 31.2\text{ m/s}$ ***Resp.***

F15-24. $(H_z)_1 + \Sigma\int M_z\,dt = (H_z)_2$

$0 + \int_0^{4\text{ s}}8t\,dt + 2(10)(0.5)(4) = 2[10v(0.5)]$

$v = 10.4\text{ m/s}$ ***Resp.***

Capítulo 16

F16-1. $\theta = (20 \text{ rev})\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right) = 40\pi \text{ rad}$

$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$

$(30 \text{ rad/s})^2 = 0^2 + 2\alpha_c[(40\pi \text{ rad}) - 0]$

$\alpha_c = 3.581 \text{ rad/s}^2 = 3.58 \text{ rad/s}^2$ ***Resp.***

$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$

$30 \text{ rad/s} = 0 + (3.581 \text{ rad/s}^2)t$

$t = 8.38 \text{ s}$ ***Resp.***

F16-2. $\frac{d\omega}{d\theta} = 2(0.005\theta) = (0.01\theta)$

$\alpha = \omega\frac{d\omega}{d\theta} = \left(0.005\,\theta^2\right)(0.01\theta) = 50\left(10^{-6}\right)\theta^3 \text{ rad/s}^2$

Cuando $\theta = 20 \text{ rev}(2\pi \text{ rad}/1 \text{ rev}) = 40\pi \text{ rad}$,

$\alpha = \left[50\left(10^{-6}\right)(40\pi)^3\right] \text{rad/s}^2$

$= 99.22 \text{ rad/s}^2 = 99.2 \text{ rad/s}^2$ ***Resp.***

F16-3. $\omega = 4\theta^{1/2}$

$150 \text{ rad/s} = 4\,\theta^{1/2}$

$\theta = 1406.25 \text{ rad}$

$dt = \frac{d\theta}{\omega}$

$\int_0^t dt = \int_0^\theta \frac{d\theta}{4\theta^{1/2}}$

$t\Big|_0^t = \frac{1}{2}\,\theta^{1/2}\Big|_0^\theta$

$t = \frac{1}{2}\,\theta^{1/2}$

$t = \frac{1}{2}(1406.25)^{1/2} = 18.75 \text{ s}$ ***Resp.***

F16-4. $\omega = \frac{d\theta}{dt} = (1.5t^2 + 15) \text{ rad/s}$

$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = (3t) \text{ rad/s}$

$\omega = [1.5(3^2) + 15] \text{ rad/s} = 28.5 \text{ rad/s}$

$\alpha = 3(3) \text{ rad/s}^2 = 9 \text{ rad/s}^2$.

$v = \omega r = (28.5 \text{ rad/s})(0.75 \text{ pie}) = 21.4 \text{ pies/s}$ ***Resp.***

$a = \alpha r = (9 \text{ rad/s}^2)(0.75 \text{ pie}) = 6.75 \text{ pies/s}^2$ ***Resp.***

F16-5. $\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta$

$\int_0^\omega \omega\, d\omega = \int_0^\theta 0.5\theta\, d\theta$

$\frac{\omega^2}{2}\Big|_0^\omega = 0.25\theta^2\Big|_0^\theta$

$\omega = (0.7071\theta) \text{ rad/s}$

Cuando $\theta = 2 \text{ rev} = 4\pi \text{ rad}$,

$\omega = [0.7071(4\pi)] \text{ rad/s} = 8.886 \text{ rad/s}$

$v_P = \omega r = (8.886 \text{ rad/s})(0.2 \text{ m}) = 1.78 \text{ m/s}$ ***Resp.***

$(a_P)_t = \alpha r = (0.5\theta \text{ rad/s}^2)(0.2 \text{ m})\Big|_{\theta = 4\pi \text{ rad}}$

$= 1.257 \text{ m/s}^2$

$(a_P)_n = \omega^2 r = (8.886 \text{ rad/s})^2(0.2 \text{ m}) = 15.79 \text{ m/s}^2$

$a_p = \sqrt{(a_P)_t^2 + (a_P)_n^2}$

$= \sqrt{(1.257 \text{ m/s}^2)^2 + (15.79 \text{ m/s}^2)^2}$

$= 15.8 \text{ m/s}^2$ ***Resp.***

F16-6. $\alpha_B = \alpha_A\left(\frac{r_A}{r_B}\right)$

$= (4.5 \text{ rad/s}^2)\left(\frac{0.075 \text{ m}}{0.225 \text{ m}}\right) = 1.5 \text{ rad/s}^2$

$\omega_B = (\omega_B)_0 + \alpha_B t$

$\omega_B = 0 + (1.5 \text{ rad/s}^2)(3 \text{ s}) = 4.5 \text{ rad/s}$

$\theta_B = (\theta_B)_0 + (\omega_B)_0 t + \frac{1}{2}\,\alpha_B t^2$

$\theta_B = 0 + 0 + \frac{1}{2}(1.5 \text{ rad/s}^2)(3 \text{ s})^2$

$\theta_B = 6.75 \text{ rad}$

$v_C = \omega_B r_D = (4.5 \text{ rad/s})(0.125 \text{ m})$

$= 0.5625 \text{ m/s}$ ***Resp.***

$s_C = \theta_B r_D = (6.75 \text{ rad})(0.125 \text{ m}) = 0.84375 \text{ m}$

$= 844 \text{ mm}$ ***Resp.***

F16-7. $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times r_{B/A}$

$-v_B\mathbf{j} = (3\mathbf{i})\text{m/s}$

$+ (\omega\mathbf{k}) \times (-1.5 \cos 30°\mathbf{i} + 1.5 \text{ sen } 30°\mathbf{j})$

$-v_B\mathbf{j} = [3 - \omega_{AB}(1.5 \text{ sen } 30°)]\mathbf{i} - \omega(1.5 \cos 30°)\mathbf{j}$

$0 = 3 - \omega(1.5 \text{ sen } 30°)$ (1)

$-v_B = 0 - \omega(1.5 \cos 30°)$ (2)

$\omega = 4 \text{ rad/s} \qquad v_B = 5.20 \text{ m/s}$ ***Resp.***

F16-8. $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$

$(v_B)_x\mathbf{i} + (v_B)_y\mathbf{j} = \mathbf{0} + (-10\mathbf{k}) \times (-0.6\mathbf{i} + 0.6\mathbf{j})$

$(v_B)_x\mathbf{i} + (v_B)_y\mathbf{j} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

$(v_B)_x = 6 \text{ m/s}$ y $(v_B)_y = 6 \text{ m/s}$

$v_B = \sqrt{(v_B)_x^2 + (v_B)_y^2}$

$= \sqrt{(6 \text{ m/s})^2 + (6 \text{ m/s})^2}$

$= 8.49 \text{ m/s}$ ***Resp.***

F16-9. $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$

$(4 \text{ pies/s})\mathbf{i} = (-2 \text{ pies/s})\mathbf{i} + (-\omega\mathbf{k}) \times (3 \text{ pies})\mathbf{j}$

$4\mathbf{i} = (-2 + 3\omega)\mathbf{i}$

$\omega = 2 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

F16-10. $\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega}_{OA} \times \mathbf{r}_A$
$= (12 \text{ rad/s})\mathbf{k} \times (0.3 \text{ m})\mathbf{j}$
$= [-3.6\mathbf{i}] \text{ m/s}$
$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \omega_{AB} \times \mathbf{r}_{B/A}$
$v_B\mathbf{j} = (-3.6 \text{ m/s})\mathbf{i}$
$+ (\omega_{AB}\mathbf{k}) \times (0.6 \cos 30°\mathbf{i} - 0.6 \text{ sen } 30°\mathbf{j}) \text{ m}$
$v_B\mathbf{j} = [\omega_{AB}(0.6 \text{ sen } 30°) - 3.6]\mathbf{i} + \omega_{AB}(0.6 \cos 30°)\mathbf{j}$
$0 = \omega_{AB}(0.6 \text{ sen } 30°) - 3.6 \quad (1)$
$v_B = \omega_{AB}(0.6 \cos 30°) \quad (2)$
$\omega_{AB} = 12 \text{ rad/s} \qquad v_B = 6.24 \text{ m/s} \uparrow$

F16-11. $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B}$
$v_C\mathbf{j} = (-60\mathbf{i}) \text{ pies/s}$
$+ (-\omega_{BC}\mathbf{k}) \times (-2.5 \cos 30°\mathbf{i} + 2.5 \text{ sen } 30°\mathbf{j}) \text{ pies}$
$v_C\mathbf{j} = (-60)\mathbf{i} + 2.165\omega_{BC}\mathbf{j} + 1.25\omega_{BC}\,\mathbf{i}$
$0 = -60 + 1.25\omega_{BC}$
$v_C = 2.165\,\omega_{BC}$
$\omega_{BC} = 48 \text{ rad/s}$ ***Resp.***
$v_C = 104 \text{ pies/s}$

F16-12. $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$
$-v_B \cos 30°\,\mathbf{i} + v_B \text{ sen } 30°\,\mathbf{j} = (-3 \text{ m/s})\mathbf{j} +$
$(-\omega\mathbf{k}) \times (-2 \text{ sen } 45°\mathbf{i} - 2 \cos 45°\mathbf{j}) \text{ m}$
$-0.8660v_B\mathbf{i} + 0.5v_B\mathbf{j}$
$= -1.4142\omega\mathbf{i} + (1.4142\omega - 3)\mathbf{j}$
$-0.8660v_B = -1.4142\omega$
$0.5v_B = 1.4142\omega - 3$
$\omega = 5.02 \text{ rad/s} \qquad v_B = 8.20 \text{ m/s}$ ***Resp.***

F16-13. $\omega_{AB} = \dfrac{v_A}{r_{A/CI}} = \dfrac{6}{3} = 2 \text{ rad/s}$ ***Resp.***
$r_{C/CI} = \sqrt{1.5^2 + 2^2} = 2.5 \text{ m}$
$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2}{1.5}\right) = 53.13°$
$v_C = \omega_{AB} r_{C/CI} = 2(2.5) = 5 \text{ m/s}$ ***Resp.***
$\theta = 90° - \phi = 90° - 53.13° = 36.9°$ ***Resp.***

F16-14. $v_B = \omega_{AB}\, r_{B/A} = 12(0.6) = 7.2 \text{ m/s} \downarrow$
$v_C = 0$ ***Resp.***
$\omega_{BC} = \dfrac{v_B}{r_{B/CI}} = \dfrac{7.2}{1.2} = 6 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

F16-15. $\omega = \dfrac{v_O}{r_{O/CI}} = \dfrac{6}{0.3} = 20 \text{ rad/s}$ ***Resp.***
$r_{A/CI} = \sqrt{0.3^2 + 0.6^2} = 0.6708 \text{ m}$
$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{0.3}{0.6}\right) = 26.57°$
$v_A = \omega r_{A/CI} = 20(0.6708) = 13.4 \text{ m/s}$ ***Resp.***
$\theta = 90° - \phi = 90° - 26.57° = 63.4°$ ***Resp.***

F16-16. El *CI* puede localizarse por medio de triángulos semejantes.
$\dfrac{0.5 - r_{C/CI}}{3} = \dfrac{r_{C/CI}}{1.5} \qquad r_{C/CI} = 0.1667 \text{ m}$
$\omega = \dfrac{v_C}{r_{C/CI}} = \dfrac{1.5}{0.1667} = 9 \text{ rad/s}$ ***Resp.***
Además, $r_{O/CI} = 0.3 - r_{C/CI} = 0.3 - 0.1667 = 0.1333 \text{ m}$.
$v_O = \omega r_{O/CI} = 9(0.1333) = 1.20 \text{ m/s}$ ***Resp.***

F16-17. $v_B = \omega r_{B/A} = 6(0.2) = 1.2 \text{ m/s}$
$r_{B/CI} = 0.8 \tan 60° = 1.3856 \text{ m}$
$r_{C/CI} = \frac{0.8}{\cos 60°} = 1.6 \text{ m}$
$\omega_{BC} = \dfrac{v_B}{r_{B/CI}} = \dfrac{1.2}{1.3856} = 0.8660 \text{ rad/s}$
$= 0.866 \text{ rad/s}$ ***Resp.***
Entonces,
$v_C = \omega_{BC}\, r_{C/CI} = 0.8660(1.6) = 1.39 \text{ m/s}$ ***Resp.***

F16-18. $v_B = \omega_{AB}\, r_{B/A} = 10(0.2) = 2 \text{ m/s}$
$v_C = \omega_{CD}\, r_{C/D} = \omega_{CD}(0.2) \rightarrow$
$r_{B/CI} = \frac{0.4}{\cos 30°} = 0.4619 \text{ m}$
$r_{C/CI} = 0.4 \tan 30° = 0.2309 \text{ m}$
$\omega_{BC} = \dfrac{v_B}{r_{B/CI}} = \dfrac{2}{0.4619} = 4.330 \text{ rad/s}$
$= 4.33 \text{ rad/s}$ ***Resp.***
$v_C = \omega_{BC}\, r_{C/CI}$
$\omega_{CD}(0.2) = 4.330(0.2309)$
$\omega_{CD} = 5 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

F16-19. $\omega = \dfrac{v_A}{r_{A/CI}} = \dfrac{6}{3} = 2 \text{ rad/s}$
$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2\mathbf{r}_{B/A}$
$a_B\mathbf{i} = -5\mathbf{j} + (\alpha\mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) - 2^2(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j})$
$a_B\mathbf{i} = (4\alpha - 12)\mathbf{i} + (3\alpha + 11)\mathbf{j}$
$a_B = 4\alpha - 12$
$0 = 3\alpha + 11$
$\alpha = -3.67 \text{ rad/s}^2$ ***Resp.***
$a_B = -26.7 \text{ m/s}^2$ ***Resp.***

F16-20. $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/O} - \omega^2\mathbf{r}_{A/O}$ ***Resp.***
$= 1.8\mathbf{i} + (-6\mathbf{k}) \times (0.3\mathbf{i}) - 12^2(0.3\mathbf{j})$
$= \{3.6\mathbf{i} - 43.2\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$ ***Resp.***

F16-21. $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B} - \omega^2 \mathbf{r}_{A/B}$

$3\mathbf{i} = a_B\mathbf{j} + (-\alpha\mathbf{k}) \times 0.3\mathbf{j} - 20^2(0.3\mathbf{j})$

$3\mathbf{i} = 0.3\alpha\mathbf{i} + (a_B - 120)\mathbf{j}$

$3 = 0.3\alpha \qquad \alpha = 10 \text{ rad/s}^2$ ***Resp.***

$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/O} - \omega^2\mathbf{r}_{A/O}$

$= 3\mathbf{i} + (-10\mathbf{k}) \times (-0.6\mathbf{i}) - 20^2(-0.6\mathbf{j})$

$= \{243\mathbf{i} + 6\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$ ***Resp.***

F16-22. $\dfrac{r_{A/CI}}{3} = \dfrac{0.5 - r_{A/CI}}{1.5}; \qquad r_{A/CI} = 0.3333 \text{ m}$

$\omega = \dfrac{v_A}{r_{A/CI}} = \dfrac{3}{0.3333} = 9 \text{ rad/s}$

$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/C} - \omega^2\mathbf{r}_{A/C}$

$1.5\mathbf{i} - (a_A)_n\mathbf{j} = -0.75\mathbf{i} + (a_C)_n\mathbf{j}$

$+ (-\alpha\mathbf{k}) \times 0.5\mathbf{j} - 9^2(0.5\mathbf{j})$

$1.5\mathbf{i} - (a_A)_n\mathbf{j} = (0.5\alpha - 0.75)\mathbf{i} + \left[(a_C)_n - 40.5\right]\mathbf{j}$

$1.5 = 0.5\alpha - 0.75$

$\alpha = 4.5 \text{ rad/s}^2$ ***Resp.***

F16-23. $v_B = \omega\, r_{B/A} = 12(0.3) = 3.6 \text{ m/s}$

$\omega_{BC} = \dfrac{v_B}{r_{B/CI}} = \dfrac{3.6}{1.2} = 3 \text{ rad/s}$

$\mathbf{a}_B = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2\mathbf{r}_{B/A}$

$= (-6\mathbf{k}) \times (0.3\mathbf{i}) - 12^2(0.3\mathbf{i})$

$= \{-43.2\mathbf{i} - 1.8\mathbf{j}\} \text{ m/s}$

$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B} - \omega_{BC}^2\mathbf{r}_{C/B}$

$a_C\mathbf{i} = (-43.2\mathbf{i} - 1.8\mathbf{j})$

$+ (\alpha_{BC}\,\mathbf{k}) \times (1.2\mathbf{i}) - 3^2(1.2\mathbf{i})$

$a_C\mathbf{i} = -54\mathbf{i} + (1.2\alpha_{BC} - 1.8)\mathbf{j}$

$a_C = -54 \text{ m/s}^2 = 54 \text{ m/s}^2 \leftarrow$ ***Resp.***

$0 = 1.2\alpha_{BC} - 1.8 \qquad \alpha_{BC} = 1.5 \text{ rad/s}^2$ ***Resp.***

F16-24. $v_B = \omega\, r_{B/A} = 6(0.2) = 1.2 \text{ m/s} \rightarrow$

$r_{B/CI} = 0.8 \tan 60° = 1.3856 \text{ m}$

$\omega_{BC} = \dfrac{v_B}{r_{B/CI}} = \dfrac{1.2}{1.3856} = 0.8660 \text{ rad/s}$

$\mathbf{a}_B = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2\mathbf{r}_{B/A}$

$= (-3\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{j}) - 6^2(0.2\mathbf{j})$

$= [0.6\mathbf{i} - 7.2\mathbf{j}] \text{ m/s}$

$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B} - \omega^2\mathbf{r}_{C/B}$

$a_C \cos 30°\mathbf{i} + a_C \operatorname{sen} 30°\mathbf{j}$

$= (0.6\mathbf{i} - 7.2\mathbf{j}) + (\alpha_{BC}\,\mathbf{k} \times 0.8\mathbf{i}) - 0.8660^2(0.8\mathbf{i})$

$0.8660a_C\mathbf{i} + 0.5a_C\mathbf{j} = (0.8\alpha_{BC} - 7.2)\mathbf{j}$

$0.8660a_C = 0$

$0.5a_C = 0.8\alpha_{BC} - 7.2$

$a_C = 0 \qquad \alpha_{BC} = 9 \text{ rad/s}^2$ ***Resp.***

Capítulo 17

F17-1. $\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = m(a_G)_x;\ 100\left(\frac{4}{5}\right) = 100a$

$a = 0.8 \text{ m/s}^2 \rightarrow$ ***Resp.***

$+\uparrow\Sigma F_y = m(a_G)_y;$

$N_A + N_B - 100\left(\frac{3}{5}\right) - 100(9.81) = 0 \qquad (1)$

$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0;$

$N_A(0.6) + 100\left(\frac{3}{5}\right)(0.7)$

$- N_B(0.4) - 100\left(\frac{4}{5}\right)(0.7) = 0 \qquad (2)$

$N_A = 430.4 \text{ N} = 430 \text{ N}$ ***Resp.***

$N_B = 610.6 \text{ N} = 611 \text{ N}$ ***Resp.***

F17-2. $\Sigma F_{x'} = m(a_G)_{x'}; \qquad 80(9.81) \operatorname{sen} 15° = 80a$

$a = 2.54 \text{ m/s}^2$ ***Resp.***

$\Sigma F_{y'} = m(a_G)_{y'};$

$N_A + N_B - 80(9.81) \cos 15° = 0 \qquad (1)$

$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0;$

$N_A(0.5) - N_B(0.5) = 0 \qquad (2)$

$N_A = N_B = 379 \text{ N}$ ***Resp.***

F17-3. $\circlearrowleft + \Sigma M_A = \Sigma(\mathcal{M}_k)_A; \quad 10\left(\frac{3}{5}\right)(7) = \frac{20}{32.2}a(3.5)$

$a = 19.3 \text{ pies/s}^2$ ***Resp.***

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = m(a_G)_x;\ A_x + 10\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{20}{32.2}(19.32)$

$A_x = 6 \text{ lb}$ ***Resp.***

$+\uparrow\Sigma F_y = m(a_G)_y; \quad A_y - 20 + 10\left(\frac{4}{5}\right) = 0$

$A_y = 12 \text{ lb}$ ***Resp.***

F17-4. $F_A = \mu_s N_A = 0.2N_A \quad F_B = \mu_s N_B = 0.2N_B$

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = m(a_G)_x;$

$0.2N_A + 0.2N_B = 100a \qquad (1)$

$+\uparrow\Sigma F_y = m(a_G)_y;$

$N_A + N_B - 100(9.81) = 0 \qquad (2)$

$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0;$

$0.2N_A(0.75) + N_A(0.9) + 0.2N_B(0.75)$

$- N_B(0.6) = 0 \qquad (3)$

Al resolver las ecuaciones (1), (2) y (3),

$N_A = 294.3 \text{ N} = 294 \text{ N}$

$N_B = 686.7 \text{ N} = 687 \text{ N}$

$a = 1.96 \text{ m/s}^2$ ***Resp.***

Como N_A es positiva, la mesa se deslizará antes de volcarse.

F17-5. $(a_G)_t = \alpha r = \alpha(1.5 \text{ m})$

$(a_G)_n = \omega^2 r = (5 \text{ rad/s})^2(1.5 \text{ m}) = 37.5 \text{ m/s}^2$

$\Sigma F_t = m(a_G)_t; \quad 100 \text{ N} = 50 \text{ kg}[\alpha(1.5 \text{ m})]$

$\alpha = 1.33 \text{ rad/s}^2$ ***Resp.***

$\Sigma F_n = m(a_G)_n; \quad T_{AB} + T_{CD} - 50(9.81) \text{ N} = 50 \text{ kg}(37.5 \text{ m/s}^2)$

$T_{AB} + T_{CD} = 2365.5$

$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0; \quad T_{CD}(1 \text{ m}) - T_{AB}(1 \text{ m}) = 0$

$T_{AB} = T_{CD} = 1182.75 \text{ N} = 1.18 \text{ kN}$ ***Resp.***

F17-6. $\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0;$

$D_y(0.6) - 450 = 0 \quad D_y = 750 \text{ N}$ ***Resp.***

$(a_G)_n = \omega^2 r = 6^2(0.6) = 21.6 \text{ m/s}^2$

$(a_G)_t = \alpha r = \alpha(0.6)$

$+\uparrow \Sigma F_t = m(a_G)_t;$

$750 - 50(9.81) = 50[\alpha(0.6)]$

$\alpha = 8.65 \text{ rad/s}^2$ ***Resp.***

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_n = m(a_G)_n;$

$F_{AB} + D_x = 50(21.6)$ (1)

$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0;$

$D_x(0.4) + 750(0.1) - F_{AB}(0.4) = 0$ (2)

$D_x = 446.25 \text{ N} = 446 \text{ N}$ ***Resp.***

$F_{AB} = 633.75 \text{ N} = 634 \text{ N}$ ***Resp.***

F17-7. $I_O = mk_O^2 = 100(0.5^2) = 25 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

$\circlearrowleft + \Sigma M_C = I_O\alpha; \quad -100(0.6) = -25\alpha$

$\alpha = 2.4 \text{ rad/s}^2$

$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$

$\omega = 0 + 2.4(3) = 7.2 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

F17-8. $I_O = \frac{1}{2} mr^2 = \frac{1}{2}(50)(0.3^2) = 2.25 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

$\circlearrowleft + \Sigma M_C = I_O\alpha;$

$-9t = -2.25\alpha \quad \alpha = (4t) \text{ rad/s}^2$

$d\omega = \alpha \, dt$

$$\int_0^\omega d\omega = \int_0^t 4t \, dt$$

$\omega = (2t^2) \text{ rad/s}$

$\omega = 2(4^2) = 32 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

F17-9. $(a_G)_t = \alpha r_G = \alpha(0.15)$

$(a_G)_n = \omega^2 r_G = 6^2(0.15) = 5.4 \text{ m/s}^2$

$I_O = I_G + md^2 = \frac{1}{12}(30)(0.9^2) + 30(0.15^2) = 2.7 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

$\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_O\alpha; \quad 60 - 30(9.81)(0.15) = 2.7\alpha$

$\alpha = 5.872 \text{ rad/s}^2 = 5.87 \text{ rad/s}^2$ ***Resp.***

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_n = m(a_G)_n; \quad O_n = 30(5.4) = 162 \text{ N}$ ***Resp.***

$+\uparrow \Sigma F_t = m(a_G)_t;$

$O_t - 30(9.81) = 30[5.872(0.15)]$

$O_t = 320.725 \text{ N} = 321 \text{ N}$ ***Resp.***

F17-10. $(a_G)_t = \alpha r_G = \alpha(0.3)$

$(a_G)_n = \omega^2 r_G = 10^2(0.3) = 30 \text{ m/s}^2$

$I_O = I_G + md^2 = \frac{1}{2}(30)(0.3^2) + 30(0.3^2) = 4.05 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

$\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_O\alpha;$

$50\left(\frac{3}{5}\right)(0.3) + 50\left(\frac{4}{5}\right)(0.3) = 4.05\alpha$

$\alpha = 5.185 \text{ rad/s}^2 = 5.19 \text{ rad/s}^2$ ***Resp.***

$+\uparrow \Sigma F_n = m(a_G)_n;$

$O_n + 50\left(\frac{3}{5}\right) - 30(9.81) = 30(30)$

$O_n = 1164.3 \text{ N} = 1.16 \text{kN}$ ***Resp.***

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_t = m(a_G)_t;$

$O_t + 50\left(\frac{4}{5}\right) = 30[5.185(0.3)]$

$O_t = 6.67 \text{ N}$ ***Resp.***

F17-11. $I_G = \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{12}(15 \text{ kg})(0.9 \text{ m})^2 = 1.0125 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

$(a_G)_n = \omega^2 r_G = 0$

$(a_G)_t = \alpha(0.15 \text{ m})$

$I_O = I_G + md_{OG}^2 = 1.0125 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 + 15 \text{ kg}(0.15 \text{ m})^2 = 1.35 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

$\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_O\alpha;$

$[15(9.81) \text{ N}](0.15 \text{ m}) = (1.35 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)\alpha$

$\alpha = 16.35 \text{ rad/s}^2$ ***Resp.***

$+\downarrow \Sigma F_t = m(a_G)_t; \quad -O_t + 15(9.81)\text{N} = (15 \text{ kg})[16.35 \text{ rad/s}^2(0.15 \text{ m})]$

$O_t = 110.36 \text{ N} = 110 \text{ N}$ ***Resp.***

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_n = m(a_G)_n; \quad O_n = 0$ ***Resp.***

F17-12. $(a_G)_t = \alpha r_G = \alpha(0.45)$

$(a_G)_n = \omega^2 r_G = 6^2(0.45) = 16.2 \text{ m/s}^2$

$I_O = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{1}{3}(30)(0.9^2) = 8.1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

$\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_O\alpha;$

$300\left(\frac{4}{5}\right)(0.6) - 30(9.81)(0.45) = 8.1\alpha$

$\alpha = 1.428 \text{ rad/s}^2 = 1.43 \text{ rad/s}^2$ ***Resp.***

$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_n = m(a_G)_n; \quad O_n + 300\left(\frac{3}{5}\right) - 30(16.2)$

$O_n = 306 \text{ N}$ ***Resp.***

$+\uparrow \Sigma F_t = m(a_G)_t; \quad O_t + 300\left(\frac{4}{5}\right) - 30(9.81) = 30[1.428(0.45)]$

$O_t = 73.58 \text{ N} = 73.6 \text{ N}$ ***Resp.***

F17-13. $I_G = \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{12}(60)(3^2) = 45 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y;$

$80 - 20 = 60a_G \quad a_G = 1 \text{ m/s}^2\uparrow$

$\zeta + \Sigma M_G = I_G\alpha; \quad 80(1) + 20(0.75) = 45\alpha$

$\alpha = 2.11 \text{ rad/s}^2$ ***Resp.***

F17-14. $\zeta + \Sigma M_A = (\mathcal{M}_k)_A;$

$-200(0.3) = -100a_G(0.3) - 4.5\alpha$

$30a_G + 4.5\alpha = 60 \quad (1)$

$a_G = \alpha r = \alpha(0.3) \quad (2)$

$\alpha = 4.44 \text{ rad/s}^2 \quad a_G = 1.33 \text{ m/s}^2 \rightarrow$ ***Resp.***

F17-15. $+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y;$

$N - 20(9.81) = 0 \quad N = 196.2 \text{ N}$

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = m(a_G)_x; \quad 0.5(196.2) = 20a_O$

$a_O = 4.905 \text{ m/s}^2 \rightarrow$ ***Resp.***

$\zeta + \Sigma M_O = I_O\alpha;$

$0.5(196.2)(0.4) - 100 = -1.8\alpha$

$\alpha = 33.8 \text{ rad/s}^2$ ***Resp.***

F17-16. $\zeta + \Sigma M_A = (\mathcal{M}_k)_A;$

$20(9.81)\text{sen}30°(0.15) = 0.18\alpha + (20a_G)(0.15)$

$0.18\alpha + 3a_G = 14.715$

$a_G = \alpha r = \alpha(0.15)$

$\alpha = 23.36 \text{ rad/s}^2 = 23.4 \text{ rad/s}^2$ ***Resp.***

$a_G = 3.504 \text{ m/s}^2 = 3.50 \text{ m/s}^2$ ***Resp.***

F17-17. $+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y;$

$N - 200(9.81) = 0 \quad N = 1962 \text{ N}$

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = m(a_G)_x;$

$T - 0.2(1962) = 200a_G \quad (1)$

$\zeta + \Sigma M_A = (\mathcal{M}_k)_A; \quad 450 - 0.2(1962)(1)$

$= 18\alpha + 200a_G(0.4) \quad (2)$

$(a_A)_t = 0 \quad a_A = (a_A)_n$

$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{G/A} - \omega^2\mathbf{r}_{G/A}$

$a_G\mathbf{i} = -a_A\mathbf{j} + \alpha\mathbf{k} \times (0.4\mathbf{j}) - \omega^2(-0.4\mathbf{j})$

$a_G\mathbf{i} = 0.4\alpha\mathbf{i} + (0.4\omega^2 - a_A)\mathbf{j}$

$a_G = 0.4\alpha \quad (3)$

Al resolver las ecuaciones (1), (2) y (3),

$\alpha = 1.15 \text{ rad/s}^2 \quad a_G = 0.461 \text{ m/s}^2$

$T = 485 \text{ N}$ ***Resp.***

F17-18. $\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = m(a_G)_x; \quad 0 = 12(a_G)_x \quad (a_G)_x = 0$

$\zeta + \Sigma M_A = (\mathcal{M}_k)_A$

$-12(9.81)(0.3) = 12(a_G)_y(0.3) - \frac{1}{12}(12)(0.6)^2\alpha$

$0.36\alpha - 3.6(a_G)_y = 35.316 \quad (1)$

$\omega = 0$

$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{G/A} - \omega^2\mathbf{r}_{G/A}$

$(a_G)_y\mathbf{j} = a_A\mathbf{i} + (-\alpha\mathbf{k}) \times (0.3\mathbf{i}) - \mathbf{0}$

$(a_G)_y\mathbf{j} = (a_A)\mathbf{i} - 0.3\mathbf{j}$

$a_A = 0$ ***Resp.***

$(a_G)_y = -0.3\alpha \quad (2)$

Al resolver las ecuaciones (1) y (2)

$\alpha = 24.5 \text{ rad/s}^2$

$(a_G)_y = -7.36 \text{ m/s}^2 = 7.36 \text{ m/s}^2\downarrow$ ***Resp.***

Capítulo 18

F18-1. $I_O = mk_O^2 = 80(0.4^2) = 12.8 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

$T_1 = 0$

$T_2 = \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}(12.8)\omega^2 = 6.4\omega^2$

$s = \theta r = 20(2\pi)(0.6) = 24\pi \text{ m}$

$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$0 + 50(24\pi) = 6.4\omega^2$

$\omega = 24.3 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

F18-2. $T_1 = 0$

$T_2 = \frac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_2^2$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{50}{32.2} \text{ slug}\right)(2.5\omega_2)^2$

$+ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}\left(\frac{50}{32.2} \text{ slug}\right)(5 \text{ pies})^2\right]\omega_2^2$

$T_2 = 6.4700\omega_2^2$

o,

$I_O = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{50}{32.2}\text{slug}\right)(5 \text{ pies})^2$

$= 12.9400 \text{ slug}\cdot\text{pie}^2$

De modo que

$T_2 = \frac{1}{2}I_O\omega_2^2 = \frac{1}{2}(12.9400 \text{ slug}\cdot\text{pie}^2)\omega_2^2$

$= 6.4700\omega_2^2$

$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$T_1 + [-Wy_G + M\theta] = T_2$

$0 + [-(50 \text{ lb})(2.5 \text{ pies}) + (100 \text{ lb}\cdot\text{pie})(\frac{\pi}{2})]$

$= 6.4700\omega_2^2$

$\omega_2 = 2.23 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

F18-3. $(v_G)_2 = \omega_2 r_{G/CI} = \omega_2(2.5)$

$I_G = \frac{1}{12} ml^2 = \frac{1}{12}(50)(5^2) = 104.17 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

$T_1 = 0$

$T_2 = \frac{1}{2} m(v_G)_2^2 + \frac{1}{2} I_G\omega_2^2$

$= \frac{1}{2}(50)\left[\omega_2(2.5)\right]^2 + \frac{1}{2}(104.17)\omega_2^2 = 208.33\omega_2^2$

$U_P = Ps_P = 600(3) = 1800 \text{ J}$

$U_W = -Wh = -50(9.81)(2.5 - 2) = -245.25 \text{ J}$

$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$0 + 1800 + (-245.25) = 208.33\omega_2^2$

$\omega_2 = 2.732 \text{ rad/s} = 2.73 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

F18-4. $T = \frac{1}{2} mv_O{}^2 + \frac{1}{2} I_O\omega^2$

$= \frac{1}{2}(50 \text{ kg})(0.4\omega)^2 + \frac{1}{2}[50 \text{ kg}(0.3 \text{ m})^2]\omega^2$

$= 6.25\omega^2 \text{ J}$

O,

$T = \frac{1}{2} I_{CI}\omega^2$

$= \frac{1}{2}[50 \text{ kg}(0.3 \text{ m})^2 + 50 \text{ kg}(0.4 \text{ m})^2]\omega^2$

$= 6.25\omega^2 \text{ J}$

$s_O = \theta r = 10(2\pi \text{ rad})(0.4 \text{ m}) = 8\pi \text{ m}$

$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$T_1 + P\cos 30^\circ\, s_O = T_2$

$0 + (50 \text{ N})\cos 30^\circ(8\pi \text{ m}) = 6.25\omega^2 \text{ J}$

$\omega = 13.2 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

F18-5. $I_G = \frac{1}{12} ml^2 = \frac{1}{12}(30)(3^2) = 22.5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

$T_1 = 0$

$T_2 = \frac{1}{2} mv_G{}^2 + \frac{1}{2} I_G\omega^2$

$= \frac{1}{2}(30)[\omega(0.5)]^2 + \frac{1}{2}(22.5)\omega^2 = 15\omega^2$

$I_O = I_G + md^2 = \frac{1}{12}(30)(3^2) + 30(0.5^2)$

$= 30 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

O,

$T_2 = \frac{1}{2} I_O\omega^2 = \frac{1}{2}(30)\omega^2 = 15\omega^2$

$s_1 = \theta r_1 = 8\pi(0.5) = 4\pi \text{ m}$

$s_2 = \theta r_2 = 8\pi(1.5) = 12\pi \text{m}$

$U_{P_2} = P_2 s_2 = 20(12\pi) = 240\pi \text{ J}$

$U_M = M\theta = 20[4(2\pi)] = 160\pi \text{ J}$

$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$0 + 120\pi + 240\pi + 160\pi = 15\omega^2$

$\omega = 10.44 \text{ rad/s} = 10.4 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

F18-6. $v_O = \omega r = \omega(0.4)$

$I_O = mk_O^2 = 20(0.3^2) = 1.8 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

$T_1 = 0$

$T_2 = \frac{1}{2} mv_G^2 + \frac{1}{2} I_G\omega^2$

$= \frac{1}{2}(20)\left[\omega(0.4)\right]^2 + \frac{1}{2}(1.8)\omega^2$

$= 2.5\omega^2$

$U_M = M\theta = M\left(\frac{s_O}{r}\right) = 50\left(\frac{20}{0.4}\right) = 2500 \text{ J}$

$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$0 + 2500 = 2.5\omega^2$

$\omega = 31.62 \text{ rad/s} = 31.6 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

F18-7. $v_G = \omega r = \omega(0.3)$

$I_G = \frac{1}{2} mr^2 = \frac{1}{2}(30)(0.3^2) = 1.35 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

$T_1 = 0$

$T_2 = \frac{1}{2} m(v_G)_2^2 + \frac{1}{2} I_G\omega_2^2$

$= \frac{1}{2}(30)[\omega_2(0.3)]^2 + \frac{1}{2}(1.35)\omega_2^2 = 2.025\omega_2^2$

$(V_g)_1 = Wy_1 = 0$

$(V_g)_2 = -Wy_2 = -30(9.81)(0.3) = -88.92 \text{ J}$

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$0 + 0 = 2.025\omega_2^2 + (-88.29)$

$\omega_2 = 6.603 \text{ rad/s} = 6.60 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

F18-8. $v_O = \omega r_{O/CI} = \omega(0.2)$

$I_O = mk_O^2 = 50(0.3^2) = 4.5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

$T_1 = 0$

$T_2 = \frac{1}{2} m(v_O)_2^2 + \frac{1}{2} I_O\omega_2^2$

$= \frac{1}{2}(50)\left[\omega_2(0.2)\right]^2 + \frac{1}{2}(4.5)\omega_2^2$

$= 3.25\omega_2^2$

$(V_g)_1 = Wy_1 = 0$

$(V_g)_2 = -Wy_2 = -50(9.81)(6 \text{ sen } 30^\circ)$

$= -1471.5 \text{J}$

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$0 + 0 = 3.25\omega_2^2 + (-1471.5)$

$\omega_2 = 21.28 \text{ rad/s} = 21.3 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

F18-9. $v_G = \omega r_G = \omega(1.5)$

$I_G = \frac{1}{12}(60)(3^2) = 45 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

$T_1 = 0$

$T_2 = \frac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_2^2$

$= \frac{1}{2}(60)[\omega_2(1.5)]^2 + \frac{1}{2}(45)\omega_2^2$

$= 90\omega_2^2$

O,

$T_2 = \frac{1}{2}I_O\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left[45 + 60(1.5^2)\right]\omega_2^2 = 90\omega_2^2$

$(V_g)_1 = Wy_1 = 0$

$(V_g)_2 = -Wy_2 = -60(9.81)(1.5 \text{ sen } 45°)$

$= -624.30 \text{ J}$

$(V_e)_1 = \frac{1}{2}ks_1^2 = 0$

$(V_e)_2 = \frac{1}{2}ks_2^2 = \frac{1}{2}(150)(3 \text{ sen } 45°)^2 = 337.5 \text{ J}$

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$0 + 0 = 90\omega_2^2 + [-624.39 + 337.5]$

$\omega_2 = 1.785 \text{ rad/s} = 1.79 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

F18-10. $v_G = \omega r_G = \omega(0.75)$

$I_G = \frac{1}{12}(30)(1.5^2) = 5.625 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

$T_1 = 0$

$T_2 = \frac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_2^2$

$= \frac{1}{2}(30)[\omega(0.75)]^2 + \frac{1}{2}(5.625)\omega_2^2 = 11.25\omega_2^2$

O,

$T_2 = \frac{1}{2}I_O\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left[5.625 + 30(0.75^2)\right]\omega_2^2$

$= 11.25\omega_2^2$

$(V_g)_1 = Wy_1 = 0$

$(V_g)_2 = -Wy_2 = -30(9.81)(0.75)$

$= -220.725 \text{ J}$

$(V_e)_1 = \frac{1}{2}ks_1^2 = 0$

$(V_e)_1 = \frac{1}{2}ks_2^2 = \frac{1}{2}(80)(\sqrt{2^2 + 1.5^2} - 0.5)^2 = 160 \text{ J}$

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$0 + 0 = 11.25\omega_2^2 + (-220.725 + 160)$

$\omega_2 = 2.323 \text{ rad/s} = 2.32 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

F18-11. $(v_G)_2 = \omega_2 r_{G/CI} = \omega_2(0.75)$

$I_G = \frac{1}{12}(30)(1.5^2) = 5.625 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

$T_1 = 0$

$T_2 = \frac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_2^2$

$= \frac{1}{2}(30)[\omega_2(0.75)]^2 + \frac{1}{2}(5.625)\omega_2^2 = 11.25\omega_2^2$

$(V_g)_1 = Wy_1 = 30(9.81)(0.75 \text{ sen } 45°) = 156.08 \text{ J}$

$(V_g)_1 = -Wy_2 = 0$

$(V_e)_1 = \frac{1}{2}ks_1^2 = 0$

$(V_e)_1 = \frac{1}{2}ks_2^2 = \frac{1}{2}(300)(1.5 - 1.5\cos 45°)^2$

$= 28.95 \text{ J}$

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$0 + (156.08 + 0) = 11.25\omega_2^2 + (0 + 28.95)$

$\omega_2 = 3.362 \text{ rad/s} = 3.36 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

F18-12. $(V_g)_1 = -Wy_1 = -[20(9.81) \text{ N}](1 \text{ m}) = -196.2 \text{ J}$

$(V_g)_2 = 0$

$(V_e)_1 = \frac{1}{2}ks_1^2$

$= \frac{1}{2}(100 \text{ N/m})\left(\sqrt{(3 \text{ m})^2 + (2 \text{ m})^2} - 0.5 \text{ m}\right)^2$

$= 482.22 \text{ J}$

$(V_e)_2 = \frac{1}{2}ks_2^2 = \frac{1}{2}(100 \text{ N/m})(1 \text{ m} - 0.5 \text{ m})^2$

$= 12.5 \text{ J}$

$T_1 = 0$

$T_2 = \frac{1}{2}I_A\omega^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(20 \text{ kg})(2 \text{ m})^2\right]\omega^2$

$= 13.3333\omega^2$

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$0 + [-196.2 \text{ J} + 482.22 \text{ J}]$

$= 13.3333\omega_2^2 + [0 + 12.5 \text{ J}]$

$\omega_2 = 4.53 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

Capítulo 19

F19-1. $\circlearrowleft + I_O\omega_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} M_O\,dt = I_O\omega_2$

$0 + \int_0^{4\text{ s}} 3t^2\,dt = \left[60(0.3)^2\right]\omega_2$

$\omega_2 = 11.85 \text{ rad/s} = 11.9 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

F19-2. $\circlearrowleft + (H_A)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} M_A\,dt = (H_A)_2$

$0 + 300(6) = 300(0.4^2)\omega_2 + 300[\omega(0.6)](0.6)$

$\omega_2 = 11.54 \text{ rad/s} = 11.5 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

$\xrightarrow{+}$ $m(v_1)_x + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt = m(v_2)_x$

$0 + F_f(6) = 300[11.54(0.6)]$

$F_f = 346 \text{ N}$ ***Resp.***

F19-3. $v_A = \omega_A r_{A/CI} = \omega_A(0.15)$

$\zeta + \Sigma M_O = 0; \quad 9 - A_t(0.45) = 0 \quad A_t = 20 \text{ N}$

$$\zeta + (H_C)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_C dt = (H_C)_2$$

$$0 + [20(5)](0.15)$$
$$= 10[\omega_A(0.15)](0.15) + \left[10\left(0.1^2\right)\right]\omega_A$$

$\omega_A = 46.2 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

F19-4. $I_A = mk_A^2 = 10\left(0.08^2\right) = 0.064 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

$I_B = mk_B^2 = 50\left(0.15^2\right) = 1.125 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

$$\omega_A = \left(\frac{r_B}{r_A}\right)\omega_B = \left(\frac{0.2}{0.1}\right)\omega_B = 2\omega_B$$

$$\zeta + I_A(\omega_A)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_A\, dt = I_A(\omega_A)_2$$

$$0 + 10(5) - \int_0^{5\text{ s}} F(0.1)dt = 0.064[2(\omega_B)_2]$$

$$\int_0^{5\text{ s}} F dt = 500 - 1.28(\omega_B)_2 \quad (1)$$

$$\zeta + I_B(\omega_B)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_B\, dt = I_B(\omega_B)_2$$

$$0 + \int_0^{5\text{s}} F(0.2)dt = 1.125(\omega_B)_2$$

$$\int_0^{5\text{ s}} F dt = 5.625(\omega_B)_2 \quad (2)$$

Al igualar las ecuaciones (1) y (2),

$500 - 1.28(\omega_B)_2 = 5.625(\omega_B)_2$

$(\omega_B)_2 = 72.41 \text{ rad/s} = 72.4 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

F19-5. $(\overset{+}{\rightarrow}) \quad m\left[(v_O)_x\right]_1 + \Sigma \int F_x\, dt = m\left[(v_O)_x\right]_2$

$$0 + (150 \text{ N})(3 \text{ s}) + F_A(3 \text{ s}) = (50 \text{ kg})(0.3\omega_2)$$

$$\zeta + I_G\omega_1 + \Sigma \int M_G\, dt = I_G\omega_2$$

$$0 + (150 \text{ N})(0.2 \text{ m})(3 \text{ s}) - F_A(0.3 \text{ m})(3 \text{ s}) = [(50 \text{ kg})(0.175 \text{ m})^2]\omega_2$$

$\omega_2 = 37.3 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

$F_A = 36.53 \text{ N}$

Además,

$$I_{CI}\omega_1 + \Sigma \int M_{CI}\, dt = I_{CI}\omega_2$$

$$0 + [(150 \text{ N})(0.2 + 0.3) \text{ m}](3 \text{ s}) = [(50 \text{ kg})(0.175 \text{ m})^2 + (50 \text{ kg})(0.3 \text{ m})^2]\omega_2$$

$\omega_2 = 37.3 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

F19-6. $(+\uparrow)\ m\left[(v_G)_1\right]_y + \Sigma \int F_y\, dt = m\left[(v_G)_2\right]_y$

$0 + N_A(3 \text{ s}) - (150 \text{ lb})(3 \text{ s}) = 0$

$N_A = 150 \text{ lb}$

$$\zeta + (H_{CI})_1 + \Sigma \int M_{CI}\, dt = (H_{CI})_2$$

$$0 + (25 \text{ lb}\cdot\text{pie})(3 \text{ s}) - [0.15(150 \text{ lb})(3 \text{ s})](0.5 \text{ pie})$$
$$= \left[\tfrac{150}{32.2} \text{ slug}(1.25 \text{ pies})^2\right]\omega_2 + \left(\tfrac{150}{32.2} \text{ slug}\right)\left[\omega_2(1 \text{ pie})\right](1 \text{ pie})$$

$\omega_2 = 3.46 \text{ rad/s}$ ***Resp.***

Respuestas a problemas seleccionados

Capítulo 12

12-1. $v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$
$a_c = 0.5625\ \text{m/s}^2$
$v = v_0 + a_c t$
$t = 26.7\ \text{s}$

12-2. $v = 0 + 1(30) = 30\ \text{m/s}$
$s = 450\ \text{m}$

12-3. $t = 3\ \text{s}$
$s = 22.5$ pies

12-5. $dv = a\,dt$
$v = \left(6t^2 - 2t^{3/2}\right)$ pies/s
$ds = v\,dt$
$s = \left(2t^3 - \frac{4}{5}t^{5/2} + 15\right)$ pies

12-6. $h = 127$ pies
$v = -90.6$ pies/s $= 90.6$ pies/s $\downarrow$

12-7. $v = 13\ \text{m/s}$
$\Delta s = 76\ \text{m}$
$t = 8.33\ \text{s}$

12-9. $dt = \dfrac{dv}{a}$
$v = \sqrt{2kt + v_0^2}$

12-10. $s_A = 3200$ pies

12-11. $a = -24\ \text{m/s}^2$
$\Delta s = -880\ \text{m}$
$s_T = 912\ \text{m}$

12-13. $\Delta s = 2\ \text{m}$
$s_T = 6\ \text{m}$
$v_{prom} = 0.333\ \text{m/s}$
$(v_{rap})_{prom} = 1\ \text{m/s}$

12-14. $v_{prom} = 0.222\ \text{m/s}$
$(v_{rap})_{prom} = 2.22\ \text{m/s}$

12-15. $d = 517$ pies
$d = 616$ pies

12-17. $h = 5t' - 4.905(t')^2 + 10$
$h = 19.81t' - 4.905(t')^2 - 14.905$
$t' = 1.682\ \text{m}$
$h = 4.54\ \text{m}$

12-18. $s = 1708\ \text{m}$
$v_{prom} = 22.3\ \text{m/s}$

12-19. $a|_{t=4} = 1.06\ \text{m/s}^2$

12-21. $v_A = (3t^2 - 3t)$ pies/s
$v_B = (4t^3 - 8t)$ pies/s
$t = 0\ \text{s}$ y $= 1\ \text{s}$
B se detiene
$t = 0\ \text{s}$
$t = \sqrt{2}\ \text{s}$
$s_{AB}|_{t=4\,\text{s}} = 152$ pies
$(s_T)_A = 41$ pies
$(s_T)_B = 200$ pies

12-22. Seleccione la raíz mayor que 10 m $s = 11.9\ \text{m}$
$v = 0.250\ \text{m/s}$

12-23. $v = \left(20e^{-2t}\right)\ \text{m/s}$
$a = \left(-40e^{-2t}\right)\ \text{m/s}^2$
$s = 10\left(1 - e^{-2t}\right)\ \text{m}$

12-25. $s = \dfrac{1}{2k}\ln\left(\dfrac{g + kv_0^{\,2}}{g + kv^2}\right)$
$h_{máx} = \dfrac{1}{2k}\ln\left(1 + \frac{k}{g}v_0^{\,2}\right)$

12-26. $v = 4.11\ \text{m/s}$
$a = 4.13\ \text{m/s}^2$

12-27. $v = 1.29\ \text{m/s}$

12-29. $s\big|_{t=6\,\text{s}} = -27.0$ pies
$v = 4.50t^2 - 27.0t + 22.5$
Los instantes en que la partícula se detiene son
$t = 1$ s y $t = 5$ s.
$s_{tot} = 69.0$ pies

12-30. $s = \dfrac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$
$a = -kv_0e^{-kt}$

12-31. $t = \dfrac{v_f}{2g}\ln\left(\dfrac{v_f + v}{v_f - v}\right)$

12-33. Distancia entre la motocicleta y el automóvil 5541.67 pies
$t = 77.6\ \text{s}$
$s_m = 3.67(10)^3$ pies

12-34. $a = 80\ \text{km/s}^2$
$t = 6.93\ \text{ms}$

12-35. $v_{prom} = 10\ \text{m/s}\ \leftarrow$
$a_{prom} = 6\ \text{m/s}^2\ \leftarrow$

12-37. pelota A
$h = v_0t' - \dfrac{g}{2}t'^2$
$v_A = v_0 - gt'$
$h = v_0(t' - t) - \dfrac{g}{2}(t' - t)^2$
$v_B = v_0 - g(t' - t)$
$t' = \dfrac{2v_0 + gt}{2g}$

$v_A = \frac{1}{2}gt \downarrow$
$v_B = \frac{1}{2}gt \uparrow$
12-38. $v = 11.2$ km/s
12-39. $v = 3.02$ km/s $\downarrow$
12-41. $v = -30t + 15t^2$ m/s
En reposo cuando $t = 0$ y $t = 2$ s
$s_{tot} = 30$ m
$v_{prom} = 15$ m/s
12-42. $s_T = 980$ m
12-45. $v = \frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}t$
$a = -\frac{2\pi^2}{25}\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}t$
12-46. $v_{máx} = 16.7$ m/s
12-49. $v = 3t^2 - 6t + 2$
$a = 6t - 6$
12-51. $s\big|_{t=90\text{ s}} = 1350$ m
12-53. $s = \left(\frac{1}{5}t^2\right)$ m y $s = (12t - 180)$ m
$a = 0.4$ m/s^2 y $a = 0$
12-54. $t = 9.88$ s
12-55. $t' = 8.75$ s
$s\big|_{t=8.75\text{ s}} = 272$ m
12-57. $v = \left(\sqrt{0.1s^2 + 10s}\right)$ m/s y
$v = \left(\sqrt{-30s + 12\,000}\right)$ m/s
$s' = 400$ m
12-58. $s' = 2500$ pies
12-59. $s = 917$ m
12-61. $s = 2t^2$
$s = 20t - 50$
$s = -t^2 + 60t - 450$
12-62. $v_{máx} = 36.7$ m/s
$s' = 319$ m
12-63. $v = 4t^{3/2}$ y $v = 2t^2 - 18t + 108$
$s = \frac{8}{5}t^{5/2}$ y $s = \frac{2}{3}t^3 - 9t^2 + 108t - 340$
12-65. $v = \sqrt{0.04s^2 + 4s}$ pies/s
$v = \sqrt{20s - 1600}$ pies/s
12-66. $t = 16.9$ s
$v = 0.8t$, $v = 24.0$
$a = 0.8$, $a = 0$
12-69. $v = \left(0.4t^2\right)$ m/s
$v = (8t - 40)$ m/s
$t' = 16.25$ s
$s\big|_{t=16.25\text{ s}} = 540$ m
12-70. $t' = 133$ s, $s = 8857$ m
12-71. $v = 36.1$ m/s
$a = 36.5$ m/s^2
12-73. $x = \sqrt{\frac{c}{3b}}t^{3/2}$
$a_x = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{c}{3b}}\frac{1}{\sqrt{t}}$
$a_y = 2ct$
12-74. $a = 80.2$ m/s^2
(42.7, 16.0, 14.0) m
12-75. $a_x = \pm 4r\cos 2t$
$a_y = -4r\operatorname{sen} 2t$
12-77. $\mathbf{v} = \{-10\operatorname{sen} 2t\mathbf{i} + 8\cos 2t\mathbf{j}\}$ m/s
$\mathbf{a} = \{-20\cos 2t\mathbf{i} - 16\operatorname{sen} 2t\mathbf{j}\}$ m/s^2
$v = 9.68$ m/s
$a = 16.8$ m/s^2
12-78. $v = 10.4$ m/s
$a = 38.5$ m/s^2
12-79. $v_x = 3.58$ m/s, $v_y = 1.79$ m/s
$a_x = 0.32$ m/s^2 $\quad a_y = 0.64$ m/s^2 $\downarrow$
12-81. $\mathbf{r}_B = \{21.21\mathbf{i} - 21.21\mathbf{j}\}$ m
$\mathbf{r}_C = \{28.98\mathbf{i} - 7.765\mathbf{j}\}$ m
$(\mathbf{v}_{BC})_{prom} = \{3.88\mathbf{i} + 6.72\mathbf{j}\}$ m/s
12-82. $s = 9$ km
$\Delta r = 6.71$ km
$v_{prom} = 4.86$ m/s
$(v_{rap})_{prom} = 6.52$ m/s
12-83. $v = \sqrt{c^2k^2 + b^2}$
$a = ck^2$
12-85. $v_y = v_x - \frac{x}{200}v_x$
$v = 2.69$ pies/s
$a_y = a_x - \frac{1}{200}\left(v_x^2 + xa_x\right)$
$a = 0.0200$ pies/s^2
12-86. $v_x = v_0\left[1 + \left(\frac{\pi}{L}c\right)^2\cos^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$
$v_y = \frac{v_0\,\pi c}{L}\left(\cos\frac{\pi}{L}x\right)\left[1 + \left(\frac{\pi}{L}c\right)^2\cos^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$
12-87. $v_A = 6.49$ m/s
$t = 0.890$ s
12-89. $v_A\cos\theta = 20$
$v_A\operatorname{sen}\theta = 23.3$
$\theta = 49.4°$
$v_A = 30.7$ pies/s
$v_B = 76.0$ pies/s
$\theta = 57.6°$
$x = 222$ m
$y = 116$ m
12-91. $s = 8.68$ pies
$s = 34.4$ pies

12-93. $t = \dfrac{1}{\cos\theta_A}$
$4.905t^2 - 30 \operatorname{sen}\theta_A t - 1.2 = 0$
Resuelva mediante prueba y error.
$\theta_A = 7.19°$ y $80.5°$

12-94. $\theta_A = 30.5°$ $v_A = 23.2$ m/s

12-95. $h = 14.7$ pies

12-97. $y = 0 + v_0 \operatorname{sen}\theta_1 t_1 + \frac{1}{2}(-g)t_1^2$
$y = 0 + v_0 \operatorname{sen}\theta_2 t_2 + \frac{1}{2}(-g)t_2^2$
$x = 0 + v_0 \cos\theta_1 t_1$
$x = 0 + v_0 \cos\theta_2 t_2$
$\Delta t = \dfrac{2v_0 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)}{g(\cos\theta_2 + \cos\theta_1)}$

12-98. $d = 94.1$ m

12-99. $v_A = 76.7$ pies/s
$s = 22.9$ pies

12-101. $20 = 0 + v_A \cos 30°\, t$
$10 = 1.8 + v_A \operatorname{sen} 30°(t) + \frac{1}{2}(-9.81)(t)^2$
$v_A = 28.0$ m/s

12-102. $d = 166$ pies

12-103. Como $H > 15$ pies, el balón de futbol pasa **sobre el poste de meta.**
$h = 22.0$ pies

12-105. $0 = 15 \operatorname{sen}\theta_A + (-9.81)t$
$8 = 1 + 15 \operatorname{sen}\theta_A t + \frac{1}{2}(-9.81)t^2$
$\theta_A = 51.4°$
$d = 7.18$ m

12-106. $v_A = 18.2$ m/s
$t = 1.195$ s
$d = 12.7$ m

12-107. $\theta_1 = 25.0°$ ⦪
$\theta_2 = 85.2°$ ∠

12-109. $3 = 7.5 + 0 + \frac{1}{2}(-32.2)t_1^2$
$0 = 7.5 + 0 + \frac{1}{2}(-32.2)t_2^2$
$21 = 0 + v_A(0.5287)$
$v_A = 39.7$ pies/s
$s_x = (s_0)_x + (v_0)_x t$
$s = 6.11$ pies

12-110. $v_A = 19.4$ m/s
$t_{AB} = 4.54$ s

12-111. $\rho = 208$ m

12-113. $7.5 = \dfrac{v^2}{200}$
$v = 38.7$ m/s

12-114. $v = 63.2$ pies/s

12-115. $a = 0.488$ m/s^2

12-117. $t = 7.071$ s
$v = 5.66$ m/s
$a_t = \dot{v} = 0.8$ m/s^2
$a_n = 0.640$ m/s^2
$a = 1.02$ m/s^2

12-118. $v = 1.80$ m/s
$a = 1.20$ m/s^2

12-119. $a = 15.1$ pies/s^2
$\Delta s = 14$ pies

12-121. $\rho = 3808.96$ m
$a = 0.511$ m/s^2

12-122. $a = 0.309$ m/s^2

12-123. $a = 2.75$ m/s^2

12-125. $v = \left(25 - \frac{1}{6}t^{3/2}\right)$ m/s
Cuando el automóvil llega a C
$t = 15.942$ s
$a = 1.30$ m/s^2

12-126. $a = 0.730$ m/s^2

12-127. $a = 7.85$ pies/s^2

12-129. $\rho = 79.30$ m
$a = 8.43$ m/s^2
$\theta = 38.2°$

12-130. $a = 6.03$ m/s^2

12-131. $a = 0.824$ m/s^2

12-133. $v = \left(\sqrt{400 - 0.25s^2}\right)$ m/s
$t = 2 \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{s}{40}\right)$
Cuando $t = 2$ s,
$s = 33.7$ m
$a_t = -8.42$ m/s^2
$a_n = 5.84$ m/s^2
$a = 10.2$ m/s^2

12-134. $a_A = 4.44$ m/s^2

12-135. $a_B = 0.556$ m/s^2

12-137. $\mathbf{v} = \{3t^2\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + 8\mathbf{k}\}$ m/s
$v = 18.8$ m/s
$\mathbf{a} = \{6t\mathbf{i} + 6\mathbf{j}\}$ m/s^2
$a = 13.4$ m/s^2
$\rho = 51.1$ m

12-138. $v = 3.68$ m/s
$a = 4.98$ m/s^2

12-139. $v = 3.19$ m/s
$a = 4.22$ m/s^2

12-141. $dv = a\,dt$, $v = 7.20$ m/s
$a_n = 1.037$ m/s^2, $a = 1.91$ m/s^2

12-142. $d = 106$ pies
$a_A = 9.88 \text{ pies/s}^2$
$a_B = 1.28 \text{ pies/s}^2$
12-143. $a = 3.05 \text{ m/s}^2$
12-145. $\rho = 449.4$ m, $a_n = a = 26.9 \text{ m/s}^2$
12-146. $a = 0.897 \text{ pies/s}^2$
12-147. $a = 8.61 \text{ m/s}^2$
12-149. $v_A = 2\sqrt{s_A^2 + 16}$
$s_A = 14.51$ m
$d = 17.0$ m
$(a_n)_A = 181.17 \text{ m/s}^2$
$(a_n)_B = 12.80 \text{ m/s}^2$
$a_A = 190 \text{ m/s}^2$
$a_B = 12.8 \text{ m/s}^2$
12-150. $t = 2.51$ s
$a_A = 22.2 \text{ m/s}^2$
$a_B = 65.1 \text{ m/s}^2$
12-151. $t = 10.1$ s
$v = 47.6$ m/s
$a = 11.8 \text{ m/s}^2$
12-153. $x = 0 + 6.128t$
$y = 0 + 5.143t + \frac{1}{2}(-9.81)(t^2)$
$y = \{0.839x - 0.131x^2\}$ m
$a_t = 3.94 \text{ m/s}^2$
$a_n = 8.98 \text{ m/s}^2$
12-154. $v_n = 0$
$v_t = 7.21$ m/s
$a_n = 0.555 \text{ m/s}^2$
$a_t = 2.77 \text{ m/s}^2$
12-155. $a_{máx} = \dfrac{a}{b^2}v^2$
12-157. $\theta = (t^3)$ rad
$\dot{r} = \ddot{r} = 0$
$\dot{\theta} = 2.554$ rad/s $\quad \ddot{\theta} = 5.536 \text{ rad/s}^2$
$v = 0.766$ m/s
$a = 2.57 \text{ m/s}^2$
12-158. $a = 3.66 \text{ pies/s}^2$
12-159. $v = 30.1$ m/s
$a = 85.3 \text{ m/s}^2$
12-161. $v_{Pl} = 293.3$ pies/s
$a_{Pl} = 0.001\,22 \text{ pies/s}^2$
$v = 464$ pies/s
$a_{pr} = 43\,200 \text{ pies/s}^2$
$a = 43.2(10^3) \text{ pies/s}^2$
12-162. $a = 14.3 \text{ pulg/s}^2$
12-163. $v_r = a \operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}$
$v_\theta = (b - a\cos\theta)\dot{\theta}$
$a_r = (2a\cos\theta - b)\,\dot{\theta}^2 + a\operatorname{sen}\dot{\theta}\,\dot{\theta}$
$a_\theta = (b - a\cos\theta)\ddot{\theta} + 2a\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta$
12-165. $v_r = 0 \quad v_\theta = 120$ pies/s
$v = 120$ pies/s
$a_r = -48.0 \text{ pies/s}^2$
$a_\theta = 60.0 \text{ pies/s}^2$
$a = 76.8 \text{ pies/s}^2$
12-166. $v = 2a\dot{\theta}$
$a = 4a\dot{\theta}^2$
12-167. $v = 2a\dot{\theta}$
$a = 2a\sqrt{4\dot{\theta}^4 + \ddot{\theta}^2}$
12-169. $v_r = 0 \quad v_\theta = 400(\dot{\theta})$
$\theta = 0.075$ rad/s
$a_r = -2.25 \text{ pies/s}^2$
$a_\theta = 0$
$a = 2.25 \text{ pies/s}^2$
12-170. $v_r = 1.50$ m/s
$v_\theta = 0.450$ m/s
$a_r = 0.410 \text{ m/s}^2$
$a_\theta = 0.600 \text{ m/s}^2$
12-171. $\mathbf{v} = \{-116\mathbf{u}_r - 163\mathbf{u}_z\}$ mm/s
$\mathbf{a} = \{-5.81\mathbf{u}_r - 8.14\mathbf{u}_z\} \text{ mm/s}^2$
12-173. $v_r = 2.149$ m/s $\quad v_\theta = 3.722$ m/s
$v = 4.30$ m/s
$a_r = -23.20 \text{ m/s}^2$
$a_\theta = 11.39 \text{ m/s}^2$
$a = 25.8 \text{ m/s}^2$
12-174. $v_r = 0$
$v_\theta = 0.8$ m/s
$v_z = -0.0932$ m/s
$a_r = -0.16 \text{ m/s}^2$
$a_\theta = 0$
$a_z = -0.00725 \text{ m/s}^2$
12-175. $v = 8.49$ m/s
$a = 88.2 \text{ m/s}^2$
12-177. $\dot{r} = (-200 \operatorname{sen} 2\theta\,\dot{\theta})$ m/s
$\dot{\theta} = 0.302$ rad/s
12-178. $\dot{\theta} = 0.378$ rad/s
12-179. $v_r = -250$ mm/s
$a_r = -9330 \text{ mm/s}^2$
12-181. $v_r = 0$
$v_\theta = 1.473$ m/s
$v_z = -0.2814$ m/s
$a_r = -0.217$
$a_\theta = 0$
$a_z = 0$
$a = 0.217 \text{ m/s}^2$

12-182. $a = 7.26\ \text{m/s}^2$
12-183. $v = 4.16\ \text{m/s}$
$a = 33.1\ \text{m/s}^2$
12-185. $v_r = 5.405\ \text{m/s}$
$v_\theta = 5.660\ \text{m/s}$
$v = 7.83\ \text{m/s}$
$a_r = -5.998\ \text{m/s}^2$
$a_\theta = 38.95\ \text{m/s}^2$
$a = 39.4\ \text{m/s}^2$
12-186. $v_r = a\dot{\theta}$
$v_\theta = a\theta\dot{\theta}$
$a_r = -a\theta\dot{\theta}^2$
$a_\theta = 2a\dot{\theta}^2$
12-187. $v_r = 6.00$ pies/s
$v_\theta = 18.3$ pies/s
$a_r = -67.1$ pies/s^2
$a_\theta = 66.3$ pies/s^2
12-189. $v_r = 8.2122\ \text{mm/s}$
$v_\theta = 164.24\ \text{mm/s}$
$v = 164\ \text{mm/s}$
$a_r = -651.2\ \text{mm/s}^2$
$a_\theta = 147.82\ \text{mm/s}^2$
$a = 668\ \text{mm/s}^2$
12-190. $v_r = 32.0$ pies/s
$v_\theta = 50.3$ pies/s
$a_r = -201$ pies/s^2
$a_\theta = 256$ pies/s^2
12-191. $v_r = 32.0$ pies/s
$v_\theta = 50.3$ pies/s
$a_r = -161$ pies/s^2
$a_\theta = 319$ pies/s^2
12-193. $v_r = -\dfrac{1800}{\pi^2}\dot{\theta} \qquad v_\theta = \dfrac{600}{\pi}\dot{\theta}$
$v_r = -24.2$ pies/s
$v_\theta = 25.3$ pies/s
12-194. $v_r = -306\ \text{m/s}$
$v_\theta = 177\ \text{m/s}$
$a_r = -128\ \text{m/s}^2$
$a_\theta = 67.7\ \text{m/s}^2$
12-195. $v_P = 6\ \text{m/s}\ \nearrow$
12-197. $2v_H = -v_A$
$v_A = 4$ pies/s $\leftarrow$
12-198. $v_B = 20\ \text{m/s}\ \uparrow$
12-199. $v_E = 2.14\ \text{m/s}\ \uparrow$
12-201. $3v_A + v_M = 0$
$v_A = 1.67\ \text{m/s}\ \uparrow$
12-202. $v_B = 0.5\ \text{m/s}\ \uparrow$
12-203. $v_B = 1\ \text{m/s}\ \uparrow$
12-205. $2v_A = v_C$
$v_B = 4v_A$
$v_A = 1$ pie/s $\uparrow$
$a_A = 0.5$ pie/s^2 $\downarrow$
12-206. $v_B = 1$ pie/s $\uparrow$
12-207. $v_B = 12$ pies/s $\uparrow$
12-209. $v_A = -2v_D$
$2v_C - v_D + v_B = 0$
$t = 5.43\ \text{s}$
$v_C = 2.21\ \text{m/s}\ \uparrow$
12-210. $t = 1.07\ \text{s}$
$v_A = 0.605\ \text{m/s}$
$v_B = 5.33\ \text{m/s}$
12-211. $\dot{s}_B = 1.20$ pies/s $\downarrow$
$\ddot{s}_B = 1.11$ pies/s^2 $\uparrow$
12-213. $y_B = 16 - \sqrt{x_A^2 + 64}$
$v_B = -\dfrac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + 64}}v_A$
$v_B = 1.41\ \text{m/s}\ \uparrow$
12-214. $v_C = (6 \sec\theta)$ pies/s $\rightarrow$
12-215. $v_{B/A} = 11.2\ \text{m/s}$
$\theta_v = 50.3°$
12-217. $v_{BC} = 18.6\ \text{m/s}$
$\theta_v = 66.2°$
$\mathbf{v}_{B/C} = \{7.5\mathbf{i} + 17.01\mathbf{j}\}\ \text{m/s}$
$(\mathbf{a}_B)_t\{-2\cos 60°\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,60°\,\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2$
$\mathbf{a}_{B/C} = [0.9486\mathbf{i} - 0.1429\mathbf{j}]$
$a_{B/C} = 0.959\ \text{m/s}^2$
$\theta_a = 8.57°$
12-218. $v_{w/s} = 19.9\ \text{m/s}$
$\theta = 74.0°$
12-219. $\theta = 9.58°$
$v_{r/c} = 19.9\ \text{m/s}$
$\theta = 9.58°$
12-221. $-20\ \text{sen}\ 30° = -30 + (v_{B/A})_x$
$20\cos 30° = (v_{B/A})_y$
$v_{B/A} = 26.5\ \text{mi/h}$
$\theta = 40.9°$ ⦣
$-1200\ \text{sen}\ 30° + 1333.3\cos 30° = (a_{B/A})_x$
$1200\cos 30° + 1333.3\ \text{sen}\ 30° = (a_{B/A})_y$
$a_{B/A} = 1.79(10^3)\ \text{mi/h}^2$
$\theta = 72.0°$ ⦣
12-222. $v_{B/A} = 26.5\ \text{mi/h}$
$\theta_v = 40.90°$ ⦣
$a_{B/A} = 1955\ \text{mi/h}^2$
$\theta_a = 0.767°$ ⦤

12-223. $v_{A/B} = 21.7$ pies/s
$\theta = 18.0°$
$t = 36.9$ s

12-225. $\mathbf{a}_{B/A} = \{2392.95\mathbf{i} - 3798.15\mathbf{j}\}$ mi/h^2
$a_{B/A} = 4489$ mi/h^2
$\phi = 57.8°$

12-226. $v_{A/B} = 49.1$ km/h
$\theta = 67.2°$

12-227. $v_W = 58.3$ km/h
$\theta = 59.0°$

12-229. $\mathbf{v}_{A/B} = (v\,\text{sen}\,\theta - v)\mathbf{i} + v\cos\theta\mathbf{j}$
$v_{A/B} = v\sqrt{2(1 - \text{sen}\,\theta)}$

12-230. $v_{r/m} = 16.6$ km/h,
$\theta = 25.0°$

12-231. $v_b = 6.21$ m/s
$t = 11.4$ s

Capítulo 13

13-1. $a = 0.6667$ m/s^2
$F_{AB} = F_{AC} = 18.1$ kN

13-2. $a = -0.505$ m/s^2

13-3. $v = 22.4$ m/s

13-5. $40.55 - F = 10a$
$F + 14.14 = 6a$
$a = 3.42$ m/s^2
$F = 6.37$ N

13-6. $a_C = 2.5$ pies/s^2 ↑
$T = 162$ lb

13-7. $F = 85.7$ N

13-9. $F = 7.50$ kN
$a = 0.0278$ m/s^2

13-10. $a = 1.66$ m/s^2

13-11. $a = 1.75$ m/s^2

13-13. $a = 3.61$ pies/s^2
$T = 5.98$ kip

13-14. $T_{CA} = T_{CB} = 27.9$ kN

13-15. $s = 12.9$ m

13-17. $a_A = 32.2$ pies/s^2
$s = 64.4$ pies

13-18. $F = 13.1$ lb

13-19. (a) $x = 0$
(b) $x = 0.955$ m

13-21. $N_B = mg\cos\theta$
$-T + N_B\,\text{sen}\,\theta = 0$
$T = \left(\frac{mg}{2}\right)\text{sen}\,2\theta$

13-22. $T = mg\cos\theta(\text{sen}\,\theta - \mu_k\cos\theta)$

13-23. $v = 30$ m/s

13-25. $2a_C - a_P = 0$
$T = 1131$ N
$B_y = 1.92$ kN
$A_x = 0$
$A_y = 2.11$ kN

13-26. $a_E = 0.75$ m/s^2 ↑
$T = 1.32$ kN

13-27. $m_A = 13.7$ kg

13-29. $12 - s_B + \sqrt{s_A^2 + (12)^2} = 24$
$T = 1.63$ kN

13-30. $T = 1.80$ kN

13-31. $a_A = 0.195$ m/s^2 ↓
$T = 769$ N

13-33. $F_s = 4\left(\sqrt{1 + s^2} - 1\right)$
$v = 14.6$ pies/s

13-34. $d = \dfrac{eVLl}{v_0^2 wm}$

13-35. (a), (b) $a_C = 6.94$ m/s^2
(c) $a_C = 7.08$ m/s^2
$\theta = 56.5°$

13-37. $N\cos\theta - \mu_s N\,\text{sen}\,\theta - mg = 0$
$N\,\text{sen}\,\theta + \mu_s N\cos\theta = ma$
$P = 2mg\left(\dfrac{\text{sen}\,\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\,\text{sen}\,\theta}\right)$

13-38. $t = 1.08$ s

13-39. $t = 42.1$ min
$v_{máx} = 2.49$ km/s

13-41. $a_B = 5.68$ pies/s^2
$a_A = 21.22$ pies/s^2 $\quad N_B = 18.27$ lb

13-42. $x = d$
$v = \sqrt{\dfrac{kd^2}{(m_A + m_B)}}$

13-43. $N = 0$, entonces $x = d$ para la separación.

13-45. $a = (2.19 - 0.2v)$ m/s^2
$v = 10.95(1 - e^{-t/5})$
$v_{máx} = 10.95$ m/s

13-46. $v_{máx} = \sqrt{\dfrac{mg}{C}}$

13-47. $v = \sqrt{v_0^2 - 2gr_0\left(1 - \dfrac{r_0}{r}\right)}$
$r_{máx} = \dfrac{2gr_0^2}{2gr_0 - v_0^2}$
$v_{esc} = \sqrt{2gr_0}$
$t = \dfrac{2}{3r_0\sqrt{2g}}\left(r_{máx}^{\frac{3}{2}} - r_0^{\frac{3}{2}}\right)$

13-49. $a_n = \dfrac{v^2}{1.5}$
$v = 10.5$ m/s
13-50. $a_t = -4.905$ m/s^2
$\rho = 188$ m
13-51. $v = 41.2$ m/s
13-53. $N = 19\,140.6$ N
$v_{máx} = 24.4$ m/s
13-54. $v_{mín} = 12.2$ m/s
13-55. $v = 9.90$ m/s
13-57. $a_n = 0$
$T_{CD} = mg \operatorname{sen} \theta$
13-58. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{GM_e}}$
13-59. $\theta = 78.1°$
13-61. $T = 414$ N
$a_t = -9.81 \operatorname{sen} \theta$
$a_t\, ds = v\, dv$
$\theta = 37.2°$
13-62. $a_t = 3.36$ m/s^2 ↙
$T = 361$ N
13-63. $\theta = 26.7°$
13-65. $\rho = 0.120$ m
$T = 1.82$ N
$N_B = 0.844$ N
13-66. $\mu_s = 0.252$
13-67. $v = 22.1$ m/s
13-69. $v = \sqrt{gr}$
$a_n = g$
$N = 2mg$
13-70. $\theta = 17.8°$ $T = 51.5$ kN
13-71. $L = 50.8$ kN
$r = 3.60$ km
13-73. $\theta = -26.57°$
$\rho = 223.61$ m
$F_f = 1.11$ kN
$N = 6.73$ kN
13-74. $N = 11.2$ N
$a_t = 6.35$ m/s^2
13-77. $\theta = 0°$
$\rho = 10.0$ m
$a_t = -9.81 \operatorname{sen} \theta$
$v^2 = 98.1$ m^2/s^2
$N = 1.02$ kN
13-78. $\theta = 112°$
13-79. $v_{mín} = 25.4$ pies/s
$v_B = 12.8$ pies/s
13-81. $\rho_A = 354.05$ m
$v = 22.22$ m/s^2, $a_n = 1.395$ m/s^2
$N = 19.3$ kN
13-82. $v = 31.3$ m/s
$N_B = 840$ N
13-83. $N = 33.8$ lb, $a = 59.8$ pies/s^2
13-85. $a_r = 0$
$a_\theta = 42$ m/s^2
$F = 210$ N
13-86. $F_r = -2$ N
$F_\theta = 16$ N
13-87. $F_r = -2$ N
$F_\theta = 36$ N
$F_z = 11.6$ N
13-89. $a_r = -2.4$ m/s^2
$a_\theta = 1.2$ m/s^2
$N_B = 1.20$ N
$F_{AB} = 0.6$ N
13-90. $F_z = 18.6$ N
13-91. $(F_z)_{mín} = 18.6$ N
$(F_z)_{máx} = 20.6$ N
13-93. $N = 17.34m$
$a_r = -14.715$ m/s^2
$\dot{\theta} = 7.00$ rad/s
13-94. $\dot{\theta} = 5.70$ rad/s
13-95. $r = 816$ mm
13-97. $a_r = -8.928$ m/s^2
$a_\theta = -0.5359$ m/s^2
$F = 3.46$ N
$N_P = 7.73$ N
13-98. $F = 7.71$ N
13-99. $F = -0.0155$ lb
13-101. $a_r = -4.235$ pies/s^2
$a_\theta = -1.919$ pies/s^2
$N = 0.267$ lb
$F = 0.163$ lb
13-102. $F_r = -131$ N
$F_\theta = -38.4$ N
$F_z = 215$ N
13-103. $N = 2.86$ kN
13-105. $a_r = 34.641$ m/s^2
$a_\theta = 20$ m/s^2
$F = 7.67$ N
$N = 12.1$ N
13-106. $F = 7.82$ N
13-107. $F_{OA} = 12.7$ N
13-109. $\psi = 84.3°$
$a_t = 12$ m/s^2

13-110. $v_r = 2.50$ m/s
$v_\theta = 2$ m/s
13-111. $N = 113$ lb
13-113. $a_r = -4r_c \cos\theta\, \theta_0^2$
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4r_c\dot{\theta}_0^2}{g}\right)$
13-114. $N = 9.66$ N
$F = 19.3$ N
13-115. $N = 10.4$ N
$F_{OA} = 20.9$ N
13-117. $r_0 = 11.1$ Mm
$v_{A'} = 1964.19$ m/s
$\Delta v_A = 814$ m/s
13-118. $v_p = 7.76$ km/s
$v_A = 4.52$ km/s
$T = 3.35$ hr
13-119. $v_B = 7.71$ km/s
$v_A = 4.63$ km/s
13-121. $v_O = 6899.15$ m/s
$v_p = 7755.54$ m/s
$\Delta v_p = 856$ m/s
$v_A = 4.52$ km/s
13-122. $v_0 = 23.9(10^3)$ pies / s
13-123. $v_{A'} = 7.30(10^3)$ pies/s
$t = 1.69$ h
13-125. $v_0 = \sqrt{\frac{66.73(10^{-12})(5.976)(10^{24})}{(800 + 6378)(10^3)}}$
7.45 km/s
13-126. $v_0 = 30.8$ km/s
$\frac{1}{r} = 0.502(10^{-12})\cos\theta + 6.11(10^{-12})$
13-127. $\Delta v = \sqrt{\frac{GM_e}{r_0}}\left(\sqrt{2} - \sqrt{1+e}\right)$
El cambio de rapidez deberá ocurrir en el perigeo.
13-129.
$$9\left(10^6\right) = \frac{6\left(10^6\right)}{\left(\frac{2\left(66.73\right)\left(10^{-12}\right)\left(0.7\right)\left[5.976\left(10^{24}\right)\right]}{6\left(10^6\right)v_p^2}\right) - 1}$$
$v_P = 7.47$ km/s
13-130. $v_a = 3.94$ km/s
$t = 46.1$ min
13-131. $v_A = 3.44$ km/s
13-133. $h = 101.575(10^9)$ m²/s
$r_P = 14.6268(10^6)$ m
$T = 119$ h
13-134. $r = 317$ Mm
$r = 640$ Mm
317 Mm $< r <$ 640 Mm
$r > 640$ Mm
13-135. $v_A = 6.11$ km/s
$\Delta v_B = -2.37$ km/s
13-137. $v = \sqrt{G\frac{m_e}{r}} = 5.16$ km/s

Capítulo 14

14-1. $N = 1307$ lb
$T = 744$ lb
$U_T = 18.0(10^3)$ pies · lb
14-2. $s = 1.05$ pies
14-3. $v = 0.365$ pie/s
14-5. $\frac{1}{2}(1.5)(4^2) + \left[-\int_0^{0.2\text{ m}} 900s^2\, ds\right] = \frac{1}{2}(1.5)v^2$
$v = 3.58$ m/s
14-6. $d = 192$ m
14-7. $s = 7.59$ pulg
14-9. $0 + 150\cos 30°(0.2) + \left[-\frac{1}{2}(300)(0.2^2)\right]$
$+ \left[-\frac{1}{2}(200)(0.2^2)\right] = \frac{1}{2}(2)v^2$
$v = 4.00$ m/s
14-10. $s = 178$ m
14-11. $\mu_k = 0.255$
14-13. $F_A = 3$ lb
$F_B = 3.464$ lb
$N_B = 1.54$ pies/s
$v_A = 0.771$ pie/s
14-14. $s = 3.41$ m
14-15. $v = 3.77$ m/s
14-17. $0 + \int_0^{0.05\text{ pie}} 100s^{1/3}\, ds - 20(0.05) = \frac{1}{2}\left(\frac{20}{32.2}\right)v^2$
$v = 1.11$ pies/s
14-18. $v_C = 1.37$ m/s
14-19. $h = 47.5$ m
14-21. $s = 179$ mm
14-22. $v_B = 24.0$ pies/s
$N_B = 7.18$ lb
$v_C = 16.0$ pies/s
$N_C = 1.18$ lb
14-23. $v_B = 7.22$ pies/s
$N_B = 27.1$ lb
$v_C = 17.0$ pies/s
$N_C = 133$ lb
$v_D = 18.2$ pies/s
14-25. $v_B = 30.0$ m/s
$s\cos 30° = 0 + 30.04t$

$s \text{ sen } 30° + 4 = 0 + 0 + \frac{1}{2}(9.81)t^2$
$s = 130$ m

14-26. $s = 1.35$ m

14-27. $v_B = 31.5$ pies/s
$d = 22.6$ pies
$v_C = 54.1$ pies/s

14-29. $F_s = 1284.85$ lb
$k = 642$ lb/pie
$v_2 = 18.0$ pies/s

14-30. $h_A = 22.5$ m
$h_C = 12.5$ m

14-31. $R = 2.83$ m
$v_C = 7.67$ m/s

14-33. $N = 693.67$ N
$F_f = 173.42$ N
$x = 2.57$ m

14-34. $v = 8.64$ m/s

14-35. $l_0 = 2.77$ pies

14-37. $s = 3.675$ m $N = 1.25$ kN
$v_B = 5.42$ m/s

14-38. $F = 367$ N

14-39. $v_B = 14.9$ m/s, $N = 1.25$ kN

14-41. $v^2 = gr\left(\frac{9}{4} - 2\cos\theta\right)$
$N = mg\left(3\cos\theta - \frac{9}{4}\right)$
$\theta = 41.4°$

14-42. $P_{prom} = 200$ kW

14-43. potencia de entrada = 4.20 hp

14-45. $P = 5200(600)\left(\dfrac{88 \text{ pies/s}}{60 \text{ mi/h}}\right)\dfrac{1}{550} = 8.32\left(10^3\right)$ hp

14-46. $v = 63.2$ pies/s

14-47. $P_{máx} = 119$ hp

14-49. $v_y = 0.2683$ m/s
$t = 7.454$ s
$P = 12.6$ kW

14-50. $P_{máx} = 1.02$ hp
$t = 30.5$ s

14-51. $P_{ent} = 19.5$ kW

14-53. $a_c = 0.8333$ m/s^2
$F = 3618.93$ N
$P_{ent} = 113$ kW
$(P_{ent})_{prom} = 56.5$ kW

14-54. $v = 22.3$ pies/s

14-55. $v = 56.5$ pies/s

14-57. $F = 1500\left(v\frac{dv}{ds}\right)$
$v = 18.7$ m/s

14-58. $P_{sal} = 42.2$ kW

14-59. $v = 13.1$ m/s

14-61. $a = 7.20$ pies/s^2
$2\, v_C = v_P$
$P_{ent} = 2.05$ hp

14-62. $\epsilon = 0.460$

14-63. $P = [400(10^3)t]$ W

14-65. $T = 1968.33$ N
$v_P = 18$ m/s
$P_o = 35.4$ kW

14-66. $P = 8.31t$ MW

14-67. $P = 1.12$ kW

14-69. $F = 308.68$ N
$v = 4.86$ m/s

14-70. potencia de entrada = 1.60 kW

14-71. potencia de entrada = 2.28 kW

14-73. $0 + 6(2) = 0 + \frac{1}{2}(5)(12)(x)^2$
$x = 7.59$ pulg

14-74. $v = 1.37$ m/s

14-75. $v = 1.37$ m/s

14-77. $0 + (2)\left(\frac{1}{2}\right)(50)\left[\sqrt{(0.05)^2 + (0.240)^2} - 0.2\right]^2 = \frac{1}{2}(0.025)v^2$
$v = 2.86$ m/s

14-78. $h = 416$ mm

14-79. $v_2 = 106$ pies/s

14-81. $0 + \frac{1}{2}(200)(4)^2 + \frac{1}{2}(100)(6)^2 = h(3)$
$h = 133$ pulg

14-82. $v_2 = 2.15$ m/s

14-83. $v_C = 2.09$ m/s

14-85. Energía potencial elástica final = 103.11 J
$v = 6.97$ m/s

14-86. $v_C = 7.58$ m/s
$T = 1.56$ kN
$T = 2.90$ kN

14-87. $h = 24.5$ m
$N_B = 0$
$N_C = 16.8$ kN

14-89. $v_B^2 = \rho_B g$
$v_A = \sqrt{\rho_B g + 2gh}$
$N_C = \dfrac{mg}{\rho_C}(\rho_B + \rho_C + 2h)$

14-90. $v = 32.3$ pies/s

14-91. $k = 8.57$ lb/pies

14-93. $\Delta s_P + 2\Delta s_A = 0$
$(v_A)_2 = 1.42$ m/s
$\Delta s_A = 617.5$ mm

14-94. $d = 1.34$ m

14-95. $v_A = 11.0$ m/s

14-97. $(V_g)_A = 110\,362.5\text{ J}$ $(V_g)_B = 0$
$(V_e)_A = 0$ $(V_e)_B = 1500(150 - l_0)^2$
$l_0 = 141\text{ m}$

14-98. $x = 453\text{ mm}$

14-99. $v_B = 32.1\text{ pies/s}$

14-101. $(V_g)_1 = \left(\frac{\pi-2}{2}\right)m_0 r^2 g$ $(V_g)_2 = 0$
$v_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}(\pi - 2)gr}$

14-102. $x = \frac{2}{3}r$

14-103. $v_C = \sqrt{\frac{7}{3}gr}$
$T = 6mg$

14-105. $v_A = 11\,111.1\text{ m/s}$
$v_B = 34.8\text{ Mm/h}$

14-106. $s_A = 1.29\text{ pies}$

Capítulo 15

15-1. $\frac{5}{32.2}(10) + (-5\text{ sen }45°)t = 0$
$t = 0.439\text{ s}$

15-2. $v = 16.1\text{ m/s}$
$s = 48.4\text{ m}$

15-3. $I = 90.0\text{ lb}\cdot\text{s}$

15-5. $(v_B)_1 = 2\text{ m/s}\uparrow$
$(v_A)_2 = 1.27\text{ m/s}\uparrow$
$(v_B)_2 = 1.27\text{ m/s}\downarrow$
$T = 43.6\text{ N}$

15-6. $F = 19.44\text{ kN}$
$T = 12.5\text{ kN}$

15-7. $v_{máx} = 90\text{ m/s}$

15-9. $0 + \int_0^{10\text{ s}} 30(10^6)(1-e^{-0.1t})\,dt = 0.130(10^9)\,v$
$v = 0.849\text{ m/s}$

15-10. $t = 4.64\text{ s}$

15-11. $v = 21.0\text{ pies/s}$

15-13. $0 + 2(T\cos 30°)(0.3) - 600(0.3) = \left(\frac{600}{32.2}\right)(5)$
$T = 526\text{ lb}$

15-14. $v = 4.50\text{ m/s}$

15-15. $T = 520.5\text{ N}$

15-17. $0 + 12(10^3)(3) - F(1.5) = 0 + 0$
$F = 24\text{ kN}$
$12(10^3)(3) - T(1.5) = 0$
$T = 24\text{ kN}$

15-18. $v_2 = \dfrac{2C\,t'}{\pi m}, s = \dfrac{C\,t'^2}{\pi m}$

15-19. $(v_x)_2 = 91.4\text{ pies/s}\leftarrow$

15-21. $40(1.5) + 4[(30)4 + 10(6 - 4)]$
$- [10(2) + 20(4 - 2) + 40(6 - 4)] = 40v_2$
$v_2 = 12.0\text{ m/s}(\rightarrow)$

15-22. $v = 26.4\text{ pies/s}$

15-23. $v = 8.07\text{ m/s}$
$\theta = 48.1°$

15-25. $63\,000(0) + 30(10^3)(30) = 63\,000v$
$v = 14.3\text{ m/s}$
$33\,000(0) + F_D(30) = 33\,000(14.29)$
$F_D = 15.7\text{ kN}$

15-26. $v = 4.14\text{ m/s}$

15-27. $v_2 = 21.8\text{ m/s}$

15-29. $v = 136.35\text{ pies/s}$
$F_{prom} = 847\text{ lb}$

15-30. $F_{prom} = 12.7\text{ kN}$

15-31. $v_2 = 1.92\text{ m/s}$

15-33. $v_2 = 0.5\text{ m/s}$
$T_1 = 20.25\text{ kJ}$
$T_2 = 3.375\text{ kJ}$
$\Delta T = 16.9\text{ kJ}$

15-34. $v = 0.6\text{ pie/s}$

15-35. $\theta = \phi = 9.52°$

15-37. $v_A = -v_B + 2$
$v_B = 1.33\text{ m/s}\leftarrow$ $v_A = 0.667\text{ m/s}\rightarrow$
$t = 2.5\text{ s}$

15-38. $v_3 = 2.31\text{ m/s}$
$s_{máx} = 163\text{ mm}$

15-39. $v_A = 29.8\text{ m/s}$
$v_B = 11.9\text{ m/s}$

15-41. $v_A = 3.09(10^3)\text{ m/s}$
$v_B = 2.62(10^3)\text{ m/s}$
$t_{BD} = 0.04574\text{ s}$
$d_B = 104\text{ m}$

15-42. $v = 0.720\text{ m/s}\leftarrow$

15-43. $s_P = 0$
$t = 0.408\text{ s}$

15-45. $v_C = 1.443\text{ m/s}\leftarrow$ $(v_B)_x = 2.887\text{ m/s}$
$s_C = 0.577\text{ m}\leftarrow$

15-46. $(v_c)_2 = 0.800\text{ pie/s}\leftarrow$
$v_3 = 0$

15-47. $v_r = 8.93\text{ pies/s}$

15-49. $v_G = 0.8660\text{ m/s}\leftarrow$
$(v_B)_y = 2.5\text{ m/s}$
$t = 0.5097\text{ s}$
$s = 2.207\text{ m}\rightarrow$
$d = 2.65\text{ m}$

15-50. 1.36 m

15-51. $v_M = 0.178\text{ m/s}$
$N = 771\text{ N}$

15-53. $\left(\frac{10}{32.2}\right)(10) + 0 = \left(\frac{10 + 20}{32.2}\right)v$
$v = 3.33$ pies/s
$t = 0.518$ s

15-54. $t = 0.518$ s
$s = 0.863$ pie

15-55. $t = 0.226$ s

15-57. $(v_A)_2 = \dfrac{v(1 - e)}{2}$ $(v_B)_2 = \dfrac{v(1 + e)}{2}$
$(v_C)_2 = \dfrac{v(1 + e)^2}{1}$
$(v_C)_2 = \dfrac{v(1 + e)^2}{4}$

15-58. $(v_A)_1 = 19.7$ pies/s
$(v_A)_2 = 9.44$ pies/s $\leftarrow$
$(v_B)_2 = 15.3$ pies/s $\leftarrow$
$s_B = 9.13$ pies

15-59. $h = 21.8$ mm

15-61. $(v_A)_2 = 2.40$ m/s
$(v_B)_2 = 5.60$ m/s
$s_{máx} = 1.53$ m

15-62. $F_{prom} = 1.68$ kN

15-63. $(v_P)_2 = 0.940$ m/s

15-65. $(v_2)_y = 11.12$ pies/s
$(v_x)_2 = 8$ pies/s
$v_2 = 13.7$ pies/s
$\theta = 54.3°$ ∡
$h = 1.92$ pies

15-66. $e = 0.261$
$\int F dt = 1.99$ klb · s

15-67. $(v_A)_3 = 0$
$(v_B)_3 = 13.9$ pies/s
$s_{máx} = 1.41$ pies

15-69. $(v_B)_1 = 13.900$ pies/s
$\phi = 6.34°$
$v_{Ay} = 11.434$ pies/s
$t = 0.3119$ s
$v_{Ax} = 12.510$ pies/s
$s = 1.90$ pies
$v_A = 16.9$ pies/s

15-70. $(v_A)_3 = \left(\frac{1 - e}{2}\right)\sqrt{gL}$
$(v_B)_3 = \left(\frac{1 + e}{2}\right)\sqrt{gL}$
$\theta = \cos^{-1}\left[1 - \dfrac{(1 + e)^2}{8}\right]$

15-71. $e = 0.75$
$\Delta E = 9.65$ kJ

15-73. $v_2' = \left(\frac{1 + e}{2}\right)v_1$
$v_3' = \left(\frac{1 + e}{2}\right)^2 v_1$
$v_n' = \left(\frac{1 + e}{2}\right)^{n-1} v_1$

15-74. $\phi = \cos^{-1}\left[1 - \dfrac{(1 + e)^4}{16}(1 - \cos\theta)\right]$

15-75. $(v_B)_3 = 3.24$ m/s $\theta = 43.9°$

15-77. $(v_B')_x = 21.65$ m/s $\leftarrow$
$(v_B')_y = 5$ m/s $\uparrow$
$v_B' = 22.2$ m/s
$\theta = 13.0°$

15-78. $v_B' = 31.8$ pies/s

15-79. $(v_A)_2 = 4.60$ m/s
$(v_B)_2 = 3.16$ m/s
$d = 0.708$ m

15-81. $(v_A)_2 = 9.829$ pies/s
$(v_A)_1 = 44$ pies/s
$(v_B)_2 = 43.51$ pies/s
$(v_B)_1 = 29.3$ pies/s

15-82. $v_A' = 5.07$ m/s $\theta_A = 80.2°$ ⦣
$v_B' = 7.79$ m/s $\leftarrow$

15-83. $(v_B)_2 = 2.88$ pies/s
$(v_A)_2 = 1.77$ pies/s

15-85. $15v_A' \cos\phi_A + 10v_B' \cos\phi_B = 42$
$v_A' \operatorname{sen}\phi_A = 8$
$v_B' \operatorname{sen}\phi_B = 6.4$
$v_A' = 8.19$ m/s
$\phi_A = 102.52°$
$v_B' = 9.38$ m/s
$\phi_B = 42.99°$

15-86. $v_A' = 9.68$ m/s
$\phi_A = 86.04°$
$v_B' = 4.94$ m/s
$\phi_B = 61.16°$

15-87. $v_A' = 12.6$ pies/s
$\phi_A = 72.86°$
$v_B' = 14.7$ pies/s
$\phi_B = 42.80°$

15-89. $(v_{Ax})_2 = 0.550$ pie/s
$(v_{Bx})_2 = 1.95$ pies/s
$(v_{A_y})_2 = -2.40$ pies/s
$(v_{B_y})_2 = -2.40$ pies/s
$(v_A)_2 = 2.46$ pies/s
$(v_B)_2 = 3.09$ pies/s

15-90. $v = 95.6$ pies/s

15-91. $v = 3.33$ m/s

15-93. $v = 17.76$ pies/s
$t = 0.910$ s
15-94. $H_O = 6.76(10^6)$ kg · m²/s
15-95. $H_B = 70.9$ slug · pies²/s
15-97. $2[0.4\,(3)\,(0)] + \int_0^{2\,s} \left(6e^{0.2t}\right) dt = 2[0.4(3)\,v]$
$v = 6.15$ m/s
15-98. $t = 1.34$ s
15-99. $v_2 = 4.60$ pies/s
15-101. $T_1 = 20.3$ N
$v_1 = 0.7958$ m/s
$d' = 0.414$ m $\quad T_2 = 21.6$ N
$v_2 = 0.9610$ m/s
15-102. $v_2 = 4.31$ m/s
$\theta = 33.2°$
15-103. $v_2 = 19.3$ pies/s
15-105. $(v_2)_\theta = 45$ pies/s
$v_2 = 45.1$ pies/s
$U_F = 2641$ pies · lb
15-106. $v = \sqrt{v_0{}^2 + 2gh}$
15-107. $v_2 = 1.99$ m/s
$U_F = 8.32$ N · m
15-109. $v_e = 552.78$ m/s →
$v_p = 594$ km/h
15-110. $v = 86.3$ m/s
15-111. $F_f = 19.6$ lb
$N_f = 174$ lb
15-113. $v = 10.19$ pies/s $\qquad \dfrac{dm}{dt} = 0.9689$ slug/s
$F_x = 9.87$ lb
$F_y = 4.93$ lb
15-114. $Q = 0.217(10^{-3})$ m³/s
15-115. $T = 40.1$ kN
15-117. $Q = 100$ pies³/s
$v = 56.59$ pies/s
$\dfrac{dm}{dt} = 0.2360$ slug/s
$d = 2.56$ pies
15-118. $F = 302$ lb
15-119. $h = \dfrac{8Q^2}{\pi^2 d^4\, g} - \dfrac{m^2 g}{8\rho\, w^2\, Q^2}$
15-121. $F_A = 1696.46$ lb
$F_B = 1357.17$ lb
$v_A = v_B = 63.66$ pies/s
$\dfrac{dm_A}{dt} = \dfrac{dm_B}{dt} = 96.894$ slug/s
$M_D = 10.7$ kip · pie
$D_y = 5.82$ kip
$D_x = 2.54$ kip
15-122. $F_x = 19.5$ lb
$F_y = 1.96$ lb
15-123. $a = 16.9$ m/s² ↑
$v = 330$ m/s
15-125. $m = 10.5(10^3)$ kg
$a = 0.0476$ m/s²
15-126. $F = 22.4$ lb
15-127. $T = 9.72$ N
15-129. $a = \frac{10}{120 - t}$
tiempo para vaciar el tanque $t = 40$ s
$a = 0.125$ m/s²
$v = 4.05$ m/s
15-130. $a_1 = 2.11$ m/s²
$a_2 = 2.40$ m/s²
15-131. $F_D = 11.5$ kN
15-133. $m = 57.6(10^3)$ kg
$\dfrac{dm_e}{dt} = 1216$ kg/s
$a = 0.104$ m/s²
15-134. $F = m'v^2$
15-135. $v = \sqrt{\dfrac{2}{3} g \left(\dfrac{y^3 - h^3}{y^2}\right)}$
15-137. $\dfrac{dv}{v} = -\left(\dfrac{m^1}{m^1 x + M}\right) dx$
$m^1 = \dfrac{m}{s}$
15-138. $F = v^2 \rho\, A$
15-139. $v_{máx} = 2068$ pies/s
15-141. $m = 37\,600$ kg
$v_{D/e} = 0.237$ m/s
$a = 0.1$
$F = 3.55$ kN

Repaso 1

R1-1. $y = -0.0766x^2$
$v_y = 2.4525$ m/s
$v = 8.37$ m/s
$\theta = 17.0°$ ⦢
$a_t = 2.88$ m/s²
$a_n = 9.38$ m/s²
R1-2. $\rho = 9.32$ m
R1-3. $\Delta s = 834$ mm
$v = 1.12$ m/s
$a = 0.450$ m/s²

R1-5. $(v_{b/A})_x = 3.692$ pies/s
$v_A = 1.58$ pies/s
$v_B = 0.904$ pie/s
R1-6. $(v_P)_2 = 27.0$ pies/s ↓
$(v_M)_2 = 13.4$ pies/s ↓
$s = 2.61$ pies
R1-7. $h = 4.82$ pies
R1-9. $480 = [800 + 2(300)]a$
$a = 0.343\ \text{m/s}^2$
$480 = (800 + 300)a$
$a = 0.436\ \text{m/s}^2$
R1-10. $t = 8$ s
$s = 320$ pies
R1-11. $v_B = 3.33$ pies/s ↑
$v_{B/C} = 13.3$ pies/s ↑
R1-13. $v = d\mathbf{r}/dt,\ v = 9.68$ m/s
$a = d\mathbf{v}/dt,\ a = 16.8\ \text{m/s}^2$
R1-14. $s = 0.0735$ pie
R1-15. $v_b = 0.379$ m/s →
R1-17. $t = 0.669$ s
$v_A = 4.32$ m/s
$t = 0.790$ s
$v_A = 5.85$ m/s
R1-18. $v_{B/A} = 28.5$ mi/h
$\theta = 44.5°$ ∠
$a_{B/A} = 3.42(10^3)\ \text{mi/h}^2$
$\theta = 80.6°$ ∠
R1-19. $a_{B/A} = 3.35(10^3)\ \text{mi/h}^2$
$\theta = 19.1°$
R1-21. $k = 360$ lb/pie
$k' = 600$ lb/pie
$v = 20.4$ pies/s
R1-22. $v = 0.969$ m/s
R1-23. $v = 1.48$ m/s
R1-25. $0.3W = \left(\frac{W}{32.2}\right)\left(\frac{v^2}{3}\right)$
$v = 5.38$ pies/s
R1-26. $v = 5.32$ pies/s
$\theta = 11.95°$
R1-27. $N = 277$ N
$F = 13.4$ lb
R1-29. $t = 2$ s para que el embalaje comience a moverse
$v_2 = 10.1$ pies/s
R1-30. $v_2 = 2.13$ pies/s
R1-31. $N = 24.8$ N
$F = 24.8$ N
R1-33. $t = 1.298\ \text{s},\ s = 7.127$ m
$t = 7.702\ \text{s},\ s = -36.627$ m
$t = 9\ \text{s},\ s = -30.50$ m
$s_{tot} = 56.0$ m
$v|_{t=9} = 10$ m/s
R1-34. $v = 14.1$ m/s
R1-35. $s = 5.43$ m
R1-37. $0 + 100 \operatorname{sen} 60°(0.5 - 0.3)$
$+ 20(9.81)(0.5 - 0.3) - \frac{1}{2}(15)(0.5 - 0.3)^2$
$-\frac{1}{2}(25)(0.5 - 0.3)^2 = \frac{1}{2}(20)v_C^2$
$v_C = 2.36$ m/s
R1-38. $v_C = 2.34$ m/s
R1-39. $v_A = 1.54$ m/s
$v_B = 4.62$ m/s
R1-41. $v_A = \sqrt{2gh}$
$(v_B)_2 = \frac{1}{3}\sqrt{2gh}(1 + e)$
R1-42. $(v_A)_3 = 0.125$ m/s
R1-43. $F_s = 4.90$ lb
R1-45. $v_2 = 75$ m/s
$x = 3$ m
R1-46. $v_{\text{máx}} = \frac{mg}{k}$
R1-47. $x = \frac{m}{k}v_0 \cos\theta_0\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$
$x_{\text{máx}} = \frac{m}{k}v_0\cos\theta_0$
$y = \frac{m}{k}\left(v_0 \operatorname{sen}\theta_0 + \frac{mg}{k}\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \frac{mg}{k}t$
R1-49. $3 \operatorname{sen} 40° = \frac{v^2}{50}$
$v = 9.82$ m/s
$a_t = 2.30\ \text{m/s}^2$
R1-50. $v_B = 27.2$ pies/s

Capítulo 16

16-1. $\omega = 4$ rad/s
$v = 2$ pies/s
$a_t = 0.5\ \text{pie/s}^2$
$a_n = 8\ \text{pies/s}^2$
$a = 8.02\ \text{pies/s}^2$
16-2. $v_P = 48.7$ pies/s
$\theta = 8.54$ rev
16-3. $a_t = \alpha r;\quad 20 = \alpha(2)\quad \alpha = 10.0\ \text{rad/s}^2$
$\omega = 35.4$ rad/s
$\theta = 35.3$ rev
16-5. $\omega_C = \omega_D = 80$ rad/s
$\omega_E = \omega_F = 64$ rad/s
$\omega_B = 89.6$ rad/s
16-6. $v_A = v_B = 40$ mm/s
$v_w = 34.6$ mm/s

16-7. $\omega_B = 211$ rad/s
16-9. $\omega_C = 47.5$ rad/s
$\omega_B = 31.7$ rad/s
16-10. $v_P = 18.8$ pies/s
16-11. $\omega_P = 0.75$ rad/s
16-13. $t = 7.083$ s
$\omega_s = 266$ rad/s
$\alpha_s = 18.8$ rad/s^2
16-14. $a_t = 1$ pie/s^2
$a_n = 84.5$ pies/s^2
16-15. $\alpha_A = 60.8$ rad/s^2
16-17. $\omega_s = 256$ rad/s
$\omega_B = 64$ rad/s
16-18. $t = 100$ s
16-19. $v_A = 70.9$ pies/s
$v_B = 35.4$ pies/s
$(a)_A = 252$ pies/s^2
$(a)_B = 126$ pies/s^2
16-21. $\omega = 11$ rad/s
$v_A = 22$ pies/s
$(a_A)_t = 12.0$ pies/s^2
$(a_A)_n = 242$ pies/s^2
16-22. $v_B = 22.0$ pies/s
$(a_B)_t = 9.00$ pies/s^2
$(a_B)_n = 322$ pies/s^2
16-23. $\omega_C = 224$ rad/s
16-25. $\alpha_A = 39.27$ rad/s^2
$\omega_A = 117.81$ rad/s
$\omega_C = \omega_B = 29.45$ rad/s
$\omega_D = 11.8$ rad/s
16-26. $v_C = 21.2$ pies/s
$a_C = 106$ pies/s^2
16-27. $\omega_B = 528$ rad/s
$\theta_B = 288$ rad
16-29. $(r_B)_{máx} = (r_A)_{máx} = 50\sqrt{2}$ mm
$(r_B)_{mín} = (r_A)_{mín} = 50$ mm
$(\omega_B)_{máx} = 8.49$ rad/s
$v_C = 0.6$ m/s
16-30. $\omega_F = 784$ rev/min
16-31. $\omega_F = 484$ rev/min
16-33. $\omega = 28.6$ rad/s
$\theta = 24.1$ rad
$v_P = 7.16$ m/s
$(a_t)_P = 7.532$ m/s^2
$(a_n)_P = 204.89$ m/s^2
$a_P = 205$ m/s^2
16-34. $\mathbf{v}_C = \{-4.8\mathbf{i} - 3.6\mathbf{j} - 1.2\mathbf{k}\}$ m/s
$\mathbf{a}_C = \{38.4\mathbf{i} - 6.48\mathbf{j} + 40.8\mathbf{k}\}$ m/s^2
16-35. $\mathbf{v}_D = \{4.8\mathbf{i} + 3.6\mathbf{j} + 1.2\mathbf{k}\}$ m/s
$\mathbf{a}_D = \{-36.0\mathbf{i} + 66.6\mathbf{j} + 40.2\mathbf{k}\}$ m/s^2
16-37. $x = 4\cos\theta \qquad y = 4\,\text{sen}\,\theta$
$\dot{y} = 1.5\cot\theta$
16-38. $\omega = \dfrac{v_0}{a}\text{sen}^2\,\theta$
$\alpha = \left(\dfrac{v_0}{a}\right)^2 \text{sen}\,2\theta\,\text{sen}^2\,\theta$
16-39. $v = \omega r\cos\theta$
$a = -\omega^2 r\,\text{sen}\,\theta$
16-41. $x = 0.6\cos\theta + 0.3\sqrt{2\,\text{sen}\,\theta - 4\,\text{sen}^2\theta + 0.75}$
$v_C = -3.00$ m/s
$\omega_{BC} = 10.0$ rad/s
16-42. $v_B = \left(\frac{h}{d}\right)v_A$
16-43. $\omega = -\left(\dfrac{r}{x\sqrt{x^2 - r^2}}\right)v_A$
$\alpha = \left[\dfrac{r(2x^2 - r^2)}{x^2(x^2 - r^2)^{3/2}}\right]v_A^2$
16-45. $x_C = 0.6\cos\theta$ m
$v_C = 3$ m/s ←
$a_C = 52.6$ m/s^2 ←
16-46. $\omega_{BC} = 5.45$ rad/s
$\alpha_{BC} = -21.0$ rad/s^2
16-47. $\omega = 0.0808$ rad/s
16-49. $x_B = 3\cos\theta$ pies
$v_{CD} = 15$ pies/s ←
$a_{CD} = 260$ pies/s^2 ←
16-50. $v_{EF} = 26$ pies/s ↑
$a_{EF} = 150$ pies/s^2 ↓
16-51. $\dot{\theta} = 0.0841$ rad/s
16-53. $s = \sqrt{3^2 + 5^2 - 2(3)(5)\cos\theta}$
$v_B = \dfrac{15\omega\,\text{sen}\,\theta}{(34 - 30\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}$
$a_B = \dfrac{15(\omega^2\cos\theta + \alpha\,\text{sen}\,\theta)}{(34 - 30\cos\theta)^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{225\,\omega^2\,\text{sen}^2\,\theta}{(34 - 30\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$
16-54. $v_C = 2.40$ pies/s
16-55. $\omega = 20$ rad/s
$v_A = 2$ pies/s →
16-57. $\omega = 4$ rad/s
$v_C = 4$ pies/s →
16-58. $v_A = 9.20$ m/s →
16-59. $\omega = 3.111$ rad/s
$v_O = 0.667$ pie/s →
16-61. $\omega_{BC} = 0$
$\omega_{CD} = 3.00$ rad/s
$\omega_F = 12.0$ rad/s

16-62. $\omega_{AB} = 330$ rad/s ↺
16-63. $v_G = 330$ pulg/s
$\theta = 55.6°$
16-65. $\omega = \frac{v}{R - r}$
$v_O = \left(\frac{R}{R - r}\right)v$ →
16-66. $v_A = \left(\frac{2R}{R - r}\right)v$ →
16-67. $v_A = 2.5$ pies/s ←
16-69. $\omega_{BC} = 0.7141$ rad/s
$\omega_{CDE} = 6.90$ rad/s
$v_E = 41.4$ pies/s ↑
16-70. $\omega = 0.577$ rad/s
$v_B = 1.15$ pies/s ↑
16-71. $v_A = 1.15$ pies/s ↓
16-73. $v_D = 4$ pies/s
$\omega_{BD} = 6.928$ rad/s
$\omega_{DE} = 0$
$v_E = 4$ pies/s ←
16-74. $v_G = 9$ m/s ←
16-75. $\omega = 5.33$ rad/s ↺
16-77. $v_O = 2.4$ m/s ←
$v_{P'} = 1.65$ m/s →
$v_P = 0.075\omega_E$
$\omega_A = 90$ rad/s
$\omega_E = 86$ rad/s
16-78. $\omega_A = 53.3$ rad/s
$0.075\omega_E = 4.8$
$\omega_E = 64$ rad/s
16-79. $\omega_C = 30$ rad/s
16-81. $v_B = 8.00$ pies/s ↑
$(v_D)_x = 4.00$ pies/s
$(v_D)_y = 4.00$ pies/s
$\omega_{CD} = 4.00$ rad/s
$v_C = 2.93$ pies/s ↓
16-82. $v_C = 2.40$ pies/s
16-83. $v_C = 1.33$ pies/s →
16-85. $r_{O/CI} = 0.8$ m
$v_A = 9.20$ m/s
16-86. $v_A = 2.5$ pies/s ←
16-87. $v_C = 1.04$ m/s →
16-89. $\omega_{BC} = 10.39$ rad/s
$v_B = 7.20$ m/s
$\omega_{AB} = 6$ rad/s ↺
$v_E = 4.76$ m/s
$\theta = 40.9°$
16-90. $v_G = 6.00$ m/s ←
16-91. $v_B = 29.7$ m/s

16-93. $r_{A/CI} = 0.5657$ m
$\omega_{AB} = 5.303$ rad/s
$\omega_{BC} = 5.30$ rad/s
16-94. $v_E = 2$ pies/s ←
16-95. $\omega = 5.33$ rad/s
$v_O = 2$ pies/s ←
16-97. $\omega_{BC} = 0.300$ rad/s
$\omega_{BE} = 2.00$ rad/s
$v_H = 18.0$ pies/s
16-98. $\omega_S = 57.5$ rad/s ↺
$\omega_{OA} = 10.6$ rad/s ↺
16-99. $\omega_S = 15.0$ rad/s
$\omega_R = 3.00$ rad/s
16-101. $r_{B/CI} = 3.025$ pies
$r_{C/CI} = 0.1029$ pie
$\omega_{BC} = 1.983$ rad/s
$\omega_{CD} = 0.0510$ rad/s
16-102. $v_C = 0.897$ m/s ↗
16-103. $v_D = 0.518$ m/s ↘
16-105. $r_{B/CI} = 1.2$ m
$r_{C/CI} = 1.039$ m
$\omega_{BC} = 2$ rad/s
$v_O = 1.04$ m/s →
16-106. $v_C = 8.69$ m/s
$\theta = 22.9°$
16-107. $v_D = 5.72$ m/s
$\theta = 36.2°$
16-109. $(a_B)_x = 1.897$ m/s^2
$(a_B)_y = -1.214$ m/s^2
$a_B = 2.25$ m/s^2
$\theta = 32.6°$
16-110. $\theta = 2.02°$
$a_D = 10.0$ m/s^2
16-111. $a_A = 4.83$ m/s^2
$\theta = 84.1°$
16-113. $\omega_W = 1.20$ rad/s
$\alpha_{AB} = 0.4157$ rad/s^2
$\alpha_W = 0.231$ rad/s^2
16-114. $\omega = 2$ rad/s ↻
$\alpha = 7.68$ rad/s^2 ↻
16-115. $a_C = 66.5$ pies/s^2 →
16-117. $r_{B/CI} = 1.732$ pies
$\omega_{AB} = 2.309$ rad / s
$\alpha_{AB} = 3.945$ rad/s^2
$a_A = 13.2$ pies /s^2 ←
16-118. $a_C = 6.96$ pies /s^2
$\theta = 18.8°$

16-119. $\alpha_{AB} = 3.70 \text{ rad/s}^2$ ↻
16-121. $v_B = 1.8 \text{ m/s} \rightarrow$
$r_{B/CI} = 0.25 \text{ m}$
$r_{C/CI} = 0.4330 \text{ m}$
$\omega_{BC} = 7.2 \text{ rad/s}$
$v_C = 3.118 \text{ m/s}$
$\alpha_{BC} = 347 \text{ rad/s}^2$ ↻
$a_C = 165 \text{ m/s}^2$
$\theta = 66.9°$ ∠
16-122. $\alpha_{ABC} = 41.6 \text{ rad/s}^2$ ↺
$a_C = 38.2 \text{ m/s}^2$
$\theta = 39.4°$ ∠
16-123. $\alpha_B = 1.43 \text{ rad/s}^2$
16-125. $r_{C/CI} = 0.4 \text{ m}$
$r_{B/CI} = 0.6928 \text{ m}$
$\omega_{BC} = 5 \text{ rad/s}$
$\omega_{AB} = 11.55 \text{ rad/s}$
$\alpha_{BC} = 160 \text{ rad/s}^2$
$\alpha_{AB} = 173 \text{ rad/s}^2$
16-126. $v_B = 4v \rightarrow$
$v_A = 2\sqrt{2}v$ ∠ $45°$
$a_B = \dfrac{2v^2}{r} \downarrow$
$a_A = \dfrac{2v^2}{r} \rightarrow$
16-127. $a_A = 0.500 \text{ pie/s}^2 \downarrow$
$a_C = 63.5 \text{ pies/s}^2$
$\theta = 87.7°$ ∠
16-129. $\omega_{BC} = 0$
$v_B = v_C = 1.8 \text{ m/s}$
$(a_C)_n = 3.6 \text{ m/s}^2 \downarrow$
$(a_C)_t = 3.6 \text{ m/s}^2 \rightarrow$
$\alpha_{BC} = 12 \text{ rad/s}^2$
$(a_B)_t = 10.8 \text{ m/s}^2$
$\alpha_{AB} = 36 \text{ rad/s}^2$ ↻
16-130. $\alpha_B = 7.5 \text{ rad/s}^2$
16-131. $\alpha_B = 7.5 \text{ rad/s}^2$
16-133. $\mathbf{a}_D = \{1.414\alpha_{ED}\mathbf{i} - 1.414\alpha_{ED}\mathbf{j}\} \text{ pies/s}^2$
$\mathbf{a}_B = \{2.828\alpha_{AB}\mathbf{i}\} \text{ pies/s}^2$
$\alpha_{ED} = -0.1768 \text{ rad/s}^2$
$\alpha_{CD} = 0.177 \text{ rad/s}^2$
$\alpha_{BD} = 0.177 \text{ rad/s}^2 \qquad \alpha_{AB} = 0$
16-134. $\omega_{CD} = 1 \text{ rad/s}$ ↻
$\alpha_{CD} = 10.9 \text{ rad/s}^2$ ↺
16-135. $\mathbf{v}_B = \{0.6\mathbf{i} + 2.4\mathbf{j}\} \text{ m/s}$
$\mathbf{a}_B = \{-14.2\mathbf{i} + 8.40\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$
16-137. $(\mathbf{a}_{\text{rel}})_{xyz} = \{1.5\mathbf{i} - 30\mathbf{j}\} \text{ m/s}$
$\mathbf{v}_C = \{0.6\mathbf{i}\} \text{ m/s}$
$\mathbf{a}_C = \{-1.2\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$
16-138. $v_B = 1.30 \text{ pies/s}$
$a_B = 0.620 \text{ pie/s}^2$
16-139. $\mathbf{v}_A = \{-2.50\mathbf{i} + 2.00\mathbf{j}\} \text{ pies/s}$
$\mathbf{a}_A = \{-3.00\mathbf{i} + 1.75\mathbf{j}\} \text{ pies/s}^2$
16-141. $\mathbf{v}_B = \{-2.898\mathbf{i} - 0.7765\mathbf{j}\} \text{ m/s}$
$\omega_{CDE} = 5 \text{ rad/s}$
16-142. $\omega_{CD} = 6.93 \text{ rad/s}$
$\alpha_{CD} = 56.2 \text{ rad/s}^2$ ↺
16-143. $\omega_{CD} = 10 \text{ rad/s}$ ↻
$\alpha_{CD} = 24 \text{ rad/s}^2$ ↻
16-145. $\omega_{BC} = 0.720 \text{ rad/s}$ ↺
$v_{A/B} = -1.92 \text{ pies/s}$
$\alpha_{BC} = 2.02 \text{ rad/s}^2$ ↺
$a_{B/A} = -4.00 \text{ pies/s}^2$
16-146. $\omega_{AB} = 1.18 \text{ rad/s}$ ↺
$\alpha_{AB} = 15.4 \text{ rad/s}^2$
16-147. $\omega_{DC} = 3.22 \text{ rad/s}$ ↻
$\alpha_{DC} = 7.26 \text{ rad/s}^2$ ↻
16-149. $(a_B)_t = 3 \text{ m/s}^2$
$(a_B)_n = 60 \text{ m/s}^2$
$\omega_{AB} = 5 \text{ rad/s}$
$(v_{\text{rel}})_{x'y'z'} = -5.196 \text{ m/s}$
$\alpha_{AB} = 2.5 \text{ rad/s}^2$
16-150. $(\mathbf{v}_{\text{rel}})_{xyz} = \{27\mathbf{i} + 25\mathbf{j}\} \text{ m/s}$
$(\mathbf{a}_{\text{rel}})_{xyz} = \{0.6\mathbf{i} - 0.38\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$
16-151. $(\mathbf{v}_{\text{rel}})_{xyz} = \{27\mathbf{i} + 25\mathbf{j}\} \text{ m/s}$
$(\mathbf{a}_{\text{rel}})_{xyz} = \{2.4\mathbf{i} - 0.38\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$
16-153. $\omega = \{0.2\mathbf{k}\} \text{rad/s}$
$\dot{\omega} = \{0.04\mathbf{k}\} \text{rad/s}^2$
$(\mathbf{v}_{\text{rel}})_{xyz} = \{29\mathbf{j}\} \text{ m/s}$
$(\mathbf{a}_{\text{rel}})_{xyz} = \{4.3\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$
16-154. $(\mathbf{v}_{\text{rel}})_{xyz} = \{-31\,\mathbf{j}\} \text{ m/s}$
$(\mathbf{a}_{\text{rel}})_{xyz} = \{-10.3\mathbf{i} + 2.2\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$
16-155. $\mathbf{v}_A = \{-17.2\mathbf{i} + 12.5\mathbf{j}\} \text{ m/s}$
$\mathbf{a}_A = \{349\mathbf{i} + 597\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$
16-157. $\mathbf{v}_B = \{-10.0\mathbf{i} + 17.32\mathbf{j}\} \text{ pies/s}$
$\mathbf{a}_B = \{-39.64\mathbf{i} - 11.34\mathbf{j}\} \text{ pies/s}^2$
$\mathbf{\Omega} = 1.5\mathbf{k}$
$\dot{\mathbf{\Omega}} = 0.4\mathbf{k}$
$\mathbf{v}_C = \{-7.00\mathbf{i} + 17.3\mathbf{j}\} \text{ pies/s}$
$\mathbf{a}_C = \{-38.8\mathbf{i} - 6.84\mathbf{j}\} \text{ pies/s}^2$
16-158. $\omega_{CD} = 0.866 \text{ rad/s}$ ↺
$\alpha_{CD} = 3.23 \text{ rad/s}^2$ ↺
16-159. $\omega_{AB} = 2.60 \text{ rad/s}$
$\alpha_{AB} = 2.50 \text{ rad/s}^2$

Capítulo 17

17-1. $I_y = \int_0^l x^2 (\rho\, A\, dx)$
$I_y = \frac{1}{3} m\, l^2$
17-2. $I_x = \frac{3}{10} m\, r^2$
17-3. $k_x = 57.7$ mm
17-5. $I_x = \int_0^h \frac{1}{2} \rho\, \pi \left(\frac{a^4}{h^2}\right) x^2\, dx$
$I_x = \frac{1}{3} ma^2$
17-6. $I_y = \frac{2}{5} m\, r^2$
17-7. $I_z = \frac{m}{10} a^2$
17-9. $m = \frac{2}{5} \rho\pi$
$I_y = \frac{\pi\rho}{9}$
$I_y = \frac{5}{18} m$
17-10. $I_y = \frac{2}{5} mb^2$
17-11. $I_G = 118$ slug · pie^2
17-13. $I_O = 84.94$ slug · pie^2
$I_A = 222$ slug · pie^2
17-14. $\overline{y} = 1.78$ m
$I_G = 4.45$ kg · m^2
17-15. $I_O = \frac{1}{2} ma^2$
17-17. $I_x = \frac{1}{2} m_1 (0.5)^2 + \frac{3}{10} m_2 (0.5)^2 - \frac{3}{10} m_3 (0.25)^2$
$I_x = 5.64$ slug · pie^2
17-18. $I_x = 0.402$ slug · pulg^2
17-19. $I_x = 3.25$ g · m^2
17-21. $I_O = \left[\frac{1}{12}(10)(0.45^2) + 10(0.225^2)\right]$
$+ \left[\frac{2}{5}(15)(0.1^2) + 15(0.55^2)\right]$
$I_O = 5.27$ kg · m^2
17-22. $I_O = 0.276$ kg · m^2
17-23. $I_O = 0.113$ kg · m^2
17-25. Recipiente: $a = 5.19$ m/s^2
Sistema: $a = 4.73$ m/s^2
$a_{máx} = 4.73$ m/s^2
17-26. $a_G = 16.35$ m/s^2 $v = 111$ m/s
17-27. aceleración $F_{AB} = F_{CD} = 231$ lb
rapidez constante $F_{AB} = F_{CD} = 200$ lb
17-29. $70(9.81)(0.5) + 120(9.81)(0.7) - 2N_A(1.25)$
$= -120(3)(0.7)$
$N_A = 568$ N
$N_B = 544$ N
17-30. $a = 3.96$ m/s^2
17-31. Como la fricción requerida $F_f > (F_f)_{máx} = \mu_k N_B = 0.6(14\,715) = 8829$ N, no es posible para levantar las ruedas delanteras del suelo.
17-33. $N_B(4.75) - 0.7N_B(0.75) - N_A(6) = 0$
$N_A = 640$ lb
$N_B = 910$ lb
$a = 13.2$ pies/s^2
17-34. $a = 17.3$ pies/s^2
17-35. tracción en las ruedas traseras $t = 17.5$ s
tracción en todas las ruedas $t = 11.3$ s
17-37. $a = 3.33$ pies/s^2
$N_B = 2122$ lb
$N_A = 778$ lb
17-38. $F = 23.9$ lb
17-39. $a = 96.6$ pies/s^2
17-41. $N_B = 9.40$ kN
$N_C = 4.62$ kN
$N_D = 7.56$ kN
$a = 0.8405$ m/s^2
$A_x = 672.41$ N $A_y = 285.77$ N
17-42. $a = 2.01$ m/s^2
Como $c < 0.3$ m, el embalaje no se volcará. Por tanto, se desliza.
17-43. $D_x = 83.3$ N
$F_{BA} = 568$ N
$D_y = 731$ N
17-45. $N_A = 0$
$P = 2.00$ kN
$N_B = 3692$ N
$a_G = 4.99$ m/s^2
17-46. $T = 375$ kN
$N_A = 114$ kN
17-47. $N_B = 1.31$ kN
$N_A = 17.4$ kN
17-49. $250(1.5) + 150(0.5)$
$= \frac{150}{32.2}(20)(h_{máx}) + \frac{250}{32.2}(20)(1)$
$h_{máx} = 3.16$ pies
$F_A = 248$ lb
$N_A = 400$ lb
17-50. $a_{máx} = 20.7$ pies/s^2
$F_A = 257$ lb
$N_A = 400$ lb
17-51. $a = 4$ m/s^2 →
$N_B = 1.14$ kN
$N_A = 327$ N
17-53. $N_C = 613.7$ N
$F_C = 187$ N
17-54. $F_{AB} = 1.22$ kN
$F_{CD} = 564$ N
17-55. $F_{CD} = 9.17$ lb
$(a_G)_t = 32.2$ pies/s^2

17-57. $\alpha = 0.2778 \text{ rad/s}^2$
$t = 6.71 \text{ s}$
17-58. $M_P = 2.025 \text{ N} \cdot \text{m}$
$N_P = 7.38 \text{ N}$
$V_P = 3.75 \text{ N}$
17-59. $P = 39.6 \text{ N}$
$N_A = N_B = 325 \text{ N}$
17-61. $\alpha = 1.852 \text{ rad/s}^2$
$t = 8.10 \text{ s}$
17-62. $F_O = 6.14 \text{ lb}$
17-63. $\alpha = 14.7 \text{ rad/s}^2$
$a_G = 4.90 \text{ m/s}^2$
17-65. $\alpha = -3.6970 \text{ sen } \theta$
$\theta = 30.1°$
17-67. $r_P = 2.67$ pies
$A_x = 0$
17-69. $\alpha = 25.13 \text{ rad/s}^2$
$T_B = 1.21 \text{ kN}$
17-70. $\alpha = 3.22 \text{ rad/s}^2$
$F_A = 70.7 \text{ lb}$
17-71. $t = 2.19 \text{ s}$
17-73. $\alpha = 1.30g/l$
$O_x = 0.325mg$
$O_y = 0.438mg$
17-74. $F_A = 219 \text{ N}$
17-75. $A_x = 0$
$A_y = 289 \text{ N}$
$\alpha = 23.1 \text{ rad/s}^2$
17-77. $\alpha = 0$
$C_t = 0$
$C_n = 5781 \text{ N}$
$N_B = 2.89 \text{ kN}$
$A_x = 0$
$A_y = 2.89 \text{ kN}$
17-78. $N_B = 1.05 \text{ kN}$
$A_x = 1.20 \text{ kN}$
$A_y = 951 \text{ N}$
17-79. $A_x = 4.5 \text{ lb}$
$A_y = 6.5 \text{ lb}$
17-81. $F_{CB} = 193 \text{ N}$
$\alpha = 19.3 \text{ rad/s}^2$
$t = 3.11 \text{ s}$
17-82. $\alpha = 0.146 \text{ rad/s}^2$
$A_x = 150 \text{ N}$
$A_y = 253 \text{ N}$
17-83. $\alpha = 12.1 \text{ rad/s}^2$
$F = 30.0 \text{ lb}$
17-85. $\alpha = 12.57 \text{ rad/s}^2$
$P = 192 \text{ N}$
17-86. $\alpha = 14.2 \text{ rad/s}^2$
17-87. $\omega = 17.6 \text{ rad/s}$
17-89. $F_{AB} = 183 \text{ N}$
$\alpha = 16.4 \text{ rad/s}^2$
$N_C = 44.23 \text{ N}$
17-90. $\omega = 2.48 \text{ rad/s}$
17-93. $\alpha = 13.85 \text{ rad/s}^2$
$(a_G)_x = 2.012 \text{ m/s}^2$
$(a_G)_y = 0.6779 \text{ m/s}^2$
$F_f = 20.12 \text{ N}$
$N = 91.32 \text{ N}$
Como $F_f < (F_f)_{máx} = \mu_s N = 0.5(91.32) = 45.66 \text{ N}$, entonces el disco semicircular no se desliza.
17-94. $a_G = 16.1 \text{ pies/s}^2$
$\alpha = 5.80 \text{ rad/s}^2$
17-95. $a = 5.54 \text{ m/s}^2 \uparrow$
$\alpha = 0.293 \text{ rad/s}^2$
17-97. $F = 1.17 \text{ lb}$
$N = 29.34 \text{ lb}$
$a_G = 5.44 \text{ pies/s}^2$
$\alpha = 4.35 \text{ rad/s}^2$
17-98. $\theta = 46.9°$
17-99. $a_G = 12.9 \text{ pies/s}^2$
$\alpha = 2.58 \text{ rad/s}^2$
17-101. $F_A = 61.32 \text{ N}$
$N_A = 926.2 \text{ N}$
$\alpha = 5.01 \text{ rad/s}^2$
17-102. $\alpha = 5.01 \text{ rad/s}^2$
17-103. $\alpha = 1.30 \text{ rad/s}^2$
17-105. $\alpha = 15.6 \text{ rad/s}^2$
$a_G = 6.24 \text{ m/s}^2$
$N_A = 981 \text{ N}$
$F_A = 24.0 \text{ N}$
17-106. $\alpha = 0.692 \text{ rad/s}^2$
17-107. $\alpha = 1.15 \text{ rad/s}^2$
17-109. $N = 10.0 \text{ lb}$
$\alpha = 125.58 \text{ rad/s}^2$
$a_A = 167 \text{ pies/s}^2$
17-110. $a = 0$
$\alpha = 0.309(10^{-3}) \text{ rad/s}^2$
17-111. $\alpha = 73.27 \text{ rad/s}^2$
$t = 0.296 \text{ s}$
17-113. $N_C = 67.97 \text{ N}$
$\alpha = 5.66 \text{ rad/s}^2$
$a_G = 4.06 \text{ m/s}^2$

17-114. $a_B = 0.755 \text{ m/s}^2 \downarrow$
$\alpha = 7.55 \text{ rad/s}^2 \circlearrowright$
$T = 45.3 \text{ N}$
17-115. $\mu_{min} = 0.0769$
17-117. $(a_G)_x = 2.5 \text{ m/s}^2 \rightarrow$
$(a_G)_y = 0$
$a_A = 10 \text{ m/s}^2 \rightarrow$
$\alpha = 35.4 \text{ rad/s}^2$
17-118. $\alpha = 9.60 \text{ rad/s}^2$
$a_G = 1.44 \text{ m/s}^2 \leftarrow$
17-119. $a_G = 2.22 \text{ m/s}^2 \leftarrow$
$\alpha = 29.2 \text{ rad/s}^2$
17-121. $\alpha = 3.89 \text{ rad/s}^2$
$a_G = 1.749 \text{ m/s}^2$
$N = 735.75 \text{ N}$
$F_f = 131.15 \text{ N}$
17-122. $\alpha = 9.51 \text{ rad/s}^2$
17-123. $a_G = 1.5 \text{ m/s}^2 \rightarrow$
$\alpha = 3 \text{ rad/s}^2$

Capítulo 18

18-2. $T = 283 \text{ pies} \cdot \text{lb}$
18-3. $\omega = 1.88 \text{ rad/s}$
18-5. $0 + (50)(9.81)(1.25) = \frac{1}{2}\left[(50)(1.75)^2\right]\omega_2^2$
$\omega_2 = 2.83 \text{ rad/s}$
18-6. $\omega = \dfrac{1}{k_G}\sqrt{\dfrac{\pi F d}{m}}$
18-7. $v_B = 2.58 \text{ m/s}$
$P = 141 \text{ N}$
18-9. $s_P = 16.67 \text{ pies}$
$\omega = 4.51 \text{ rad/s}$
18-10. $\omega = 0.836 \text{ rad/s}$
18-11. $\theta = 0.934 \text{ rev}$
18-13. $s_A = 0.6667 s_G$
$N_A = 509.7 \text{ N}$
$s_G = 0.859 \text{ m}$
18-14. $\omega = 1.32 \text{ rad/s}$
18-15. $v_A = 3.52 \text{ m/s} \downarrow$
$v_B = 1.76 \text{ m/s} \uparrow$
18-17. $U_M = 17.22 \text{ J}$
$U_W = -12.49 \text{ J}$
$\omega = 3.62 \text{ rad/s}$
18-18. $v_C = 16.9 \text{ pies/s} \uparrow$
18-19. $v_C = 11.8 \text{ pies/s} \uparrow$
18-21. $U_W = 127.44 \text{ J}$
$\omega_2 = 2.91 \text{ rad/s}$
18-22. $\omega_2 = 1.25 \text{ rad/s}$
18-23. $v_C = 19.6 \text{ pies/s}$
18-25. $U_W = 1387.34 \text{ N}$
$\omega = 10.5 \text{ rad/s}$
18-26. $\omega = 7.81 \text{ rad/s}$
18-27. $(\omega_{BC})_2 = 1.07 \text{ rad/s}$
18-29. $T_1 = 708.07 \text{ pies} \cdot \text{lb}$
$U_{W_A} = 18.75\theta$
$U_{F_f} = -40.5\theta$
$\theta = 5.18 \text{ rev}$
18-30. $v_B = 5.05 \text{ pies/s}$
18-31. $\theta_0 = 1.66 \text{ rad}$
18-33. $0 + 1500(5.629) - 1500(2.5) = \frac{1}{2}\left(\frac{1500}{32.2}\right)(v_G)^2$
$v_A = 14.2 \text{ pies/s}$
18-34. (a) $\omega = \sqrt{\dfrac{3\pi}{2}\left(\dfrac{w_0}{m}\right)}$
(b) $\omega = \sqrt{\dfrac{3\pi}{2}\dfrac{w_0}{m} + \dfrac{3g}{L}}$
18-35. $\omega = 2.83 \text{ rad/s}$
18-37. $0 + 2\left[15(1.5 \text{ sen } 45^\circ)\right] = 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{15}{32.2}\right)(3)^2\right)\omega_{AB}^2\right]$
$+ \frac{1}{2}(4)\left[6 - 2(3 \cos 45^\circ)\right]^2 + 0$
$\omega_{AB} = 4.28 \text{ rad/s}$
18-38. $v_A = 6.95 \text{ pies/s}$
18-39. $\theta = 0.934 \text{ rev}$
18-41. $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{50}{32.2}\right)(6)^2\right](2)^2 + \frac{1}{2}(12)(4-2)^2$
$= 0 + \frac{1}{2}(12)(4 + 6 \text{ sen } \theta - 2)^2 - 50(3 \text{ sen } \theta)$
$\theta = 25.4^\circ$
18-42. $\omega = 41.8 \text{ rad/s}$
18-43. $\omega = 39.3 \text{ rad/s}$
18-45. $0 + 4(1.5 \text{ sen } 45^\circ) + 1(3 \text{ sen } 45^\circ)$
$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{4}{32.2}\right)(3)^2\right]\left(\dfrac{v_C}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{32.2}\right)(v_C)^2 + 0$
$v_C = 13.3 \text{ pies/s}$
18-46. $v_C = 3.07 \text{ pies/s}$
18-47. $\omega = 1.74 \text{ rad/s}$
18-49. $0 + 2\left[\frac{1}{2}(350)(x_1)^2\right]$
$= 0 + 2\left[\frac{1}{2}(350)(x_1 + 1)^2\right] - 50(9.81)(1)$
$l_0 = 299 \text{ mm}$
18-50. $k = 232 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$
18-51. $\omega = 3.92 \text{ rad/s}$
18-53. $(V_g)_2 = -22.0725 \text{ J}$
$V_2 = -8.5725 \text{ J}$
$\omega_2 = 3.09 \text{ rad/s}$
18-54. $\omega = 7.98 \text{ rad/s}$
18-55. $k = 10.5 \text{ kN/m}$
18-57. $V_2 = \frac{\pi^2}{8} k$
$k = 814 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$

18-58. $(\omega_{BC})_2 = 0$
$(\omega_{AB})_2 = 0.597$ rad/s
18-59. $v_P = 20.7$ m/s
18-61. $\Delta s_s = -4$ pies
$s = 2.44$ pies
18-62. $\omega = 1.82$ rad/s
18-63. $\omega_{AB} = 3.70$ rad/s
18-65. $l = 7.727$ pies
$\omega = 2.82$ rad/s
18-66. $\omega = 5.28$ rad/s
18-67. $\omega_{AB} = 2.21$ rad/s
18-69. $0 + 0 = 0 + \frac{1}{2}(k)(3.3541 - 1.5)^2 - 98.1\left(\frac{1.5}{2}\right)$
$k = 42.8$ N/m

Capítulo 19

19-5. $v_G = 12.64$ pies/s
$L = 3.92$ slug · pies/s
19-6. $\int M dt = 0.833$ kg · m^2/s
19-7. $\omega = 0.0253$ rad/s
19-9. $I_O = 0.78125$ kg · m^2
$\omega = 70.8$ rad/s
19-10. $\omega_A = 36.5$ rad/s
$v = 5.48$ m/s
19-11. $\omega_B = 127$ rad/s
19-13. $T_C = 140.15$ lb $T_B = 359.67$ lb
$P = 120$ lb
19-14. $t = 5.08$ s
19-15. $r_P = 1.39$ pies
19-17. $I_O = 0.02$ kg · m^2
$N = 49.05$ N
$(v_O)_2 = 4.6$ m/s
$t = 0.510$ s
19-18. $v_G = 1.39$ m/s
$\omega = 9.49$ rad/s
19-19. $\omega = 116$ rad/s
19-21. $\omega_2 = 0.065625I$
$I = 79.8$ N · s
19-22. $y = \frac{2}{3}l$
19-23. $\omega = 20$ rad/s
19-25. $I_G = 0.75$ kg · m^2
$(v_G)_{BC} = \omega(1.118)$
$\omega = 9$ rad/s
$T_{prom} = 12.7$ N
19-26. $v = 19.4$ pies/s
19-27. $M = 103$ lb · pie
19-29. $0 + \left[\int F\, dt\right](3.5) = 175(2.25)^2(60)$
$\int F\, dt = 15.2$ kN · s
19-30. $v_G = 0.557$ m/s
19-31. $\omega_2 = \{-31.8\mathbf{k}\}$ rad/s
19-33. $(I_A)_G = 19.14$ kg · m^2
$\omega_B = 10.9$ rad/s
19-34. $k_G = 0.122$ m
19-35. $\omega = 0.175$ rad/s
19-37. $(I_z)_1 = 3.444$ slug · pie^2
$(I_z)_2 = 1.531$ slug · pie^2
$(\omega_z)_2 = 6.75$ rad/s
19-38. $\omega_2 = 5.09$ rev/s
19-39. $\omega = 0.244$ rad/s
$v_m = 3.05$ pies/s
19-41. $(I_z)_1 = 98.55$ kg · m^2
$(I_z)_2 = 81.675$ kg · m^2
$\omega_2 = 2.41$ rad/s
$\omega_3 = 2.96$ rad/s
19-42. $\omega_2 = \frac{1}{4}\omega_1$
19-43. $v_2 = 0.195$ m/s
19-45. $\omega_1 = 1.146$ rad/s
$I_G = 11.25$ kg · m^2
$I_A = 24.02$ kg · m^2
$\omega_2 = 1.53$ rad/s
19-46. $v = 5.96$ pies/s
19-47. $\omega = 26.4$ rad/s
19-49. $\omega_2 = 3.431$ rad/s
$\omega_3 = 5.056$ rad/s
$\omega_4 = 6.36$ rad/s
19-50. $\omega_2 = 17.92$ rad/s
$(v_H)_2 = 16.26$ pies/s ↓
$h = 4.99$ pies
19-51. $\theta = 17.9°$
19-53. $(v_P)_2 = 7.522$ pies/s
$I_G = 20.96$ slug · pie^2
$\omega_3 = 0.365$ rad/s
$(v_P)_3 = 3.42$ pies/s
19-54. $(v_b)_2 = 3.36$ pies/s →
19-55. $\theta_1 = 39.8°$

Repaso 2

R2-1. $v_A = 6.667$ pies/s
$\omega_P = 20$ rad/s
$v_C = 3.333$ pies/s
$\omega_D = 6.67$ rad/s

R2-2. $\omega_P = 24$ rad/s
$\omega_D = 5.33$ rad/s
R2-3. $\omega_2 = 3.81$ rad/s
R2-5. $d = 2$ pies
$\omega_2 = 6.82$ rad/s
$v_{BL} = -11.4$ pies/s
R2-6. $a_A = 12.5$ m/s^2 ←
R2-7. $\omega_{AB} = \sqrt{\dfrac{4g}{3(R-r)}}$
R2-9. $\omega_1 = 40$ rad/s
$v_2 = 3.46$ m/s
R2-10. $\omega_2 = 13.3$ rad/s
R2-11. $\alpha = 12.6$ rad/s^2
R2-13. $\omega = 0$
$v_C = 32.2$ pies/s
$v_D = 32.2$ pies/s
$F = 0$
R2-14. $\omega = 0$
R2-15. $\omega_{DE} = 132$ rad/s
R2-17. $v_G = 2.75$ m/s
$t = 1.32$ s
R2-18. $\omega = 2.19$ rad/s ↺
R2-19. $\omega_{CD} = 4.17$ rad/s
R2-21. $\alpha_c = 1.20$ rad/s^2
$\omega = 7.20$ rad/s
$v_A = v_B = 2.40$ pies/s
$a_A = 0.400$ pie/s^2
$a_B = 17.3$ pies/s^2
R2-22. $v_C = 12.7$ pies/s
R2-23. $s = \dfrac{\omega_1 r}{2\mu g}(2v_1 - \omega_1 r)$
R2-25. $v_D = 2$ m/s
$\omega_B = 6.67$ rad/s
R2-26. $\alpha = \dfrac{2mg}{R(M+2m)}$
$h = \dfrac{mg}{M+2m}t^2$
R2-27. $\omega = 3.89$ rad/s
R2-29. $0 + 5(0.6)(4) = \left[\left(\frac{30}{32.2}\right)(0.45)^2 + \left(\frac{30}{32.2}\right)(0.9)^2\right]\omega_2$
$\omega_2 = 12.7$ rad/s
R2-30. $a_m = 1.45$ m/s^2
$a_b = 1.94$ m/s^2
R2-31. $(\omega_S)_2 = \dfrac{5g \operatorname{sen}\theta}{7r}t$
$(\omega_C)_2 = \dfrac{2g \operatorname{sen}\theta}{3r}t$

R2-33. $r_{CI-C} = 1.464$ pies
$\omega_{AB} = 1.47$ rad/s ↻
$\alpha = 1.80$ rad/s^2
$\alpha_{AB} = 4.93$ rad/s^2 ↻
R2-34. $\alpha = 2.66$ rad/s^2 ↻
R2-35. $\omega = 1.08$ rad/s
$v_B = 4.39$ pies/s
R2-37. $T = 59166.86$ N
$M = 51.2$ kN · m
$N = -29.6$ kN
$V = 0$
R2-38. $\omega = 30.7$ rad/s
R2-39. $\omega = 0.0708$ rad/s
R2-41. $t = 0.194$ s
$\omega_B = 5.00$ rad/s $v_G = 5.00$ pies/s $T = 2.00$ lb
R2-42. $\theta = 4.45°$
R2-43. $a_A = 56.2$ pies/s^2 ↓
$a_B = 40.2$ pies/s^2 $\theta = 53.3°$ ⦣
R2-45. $\alpha_S = 5.236$ rad/s^2
$\theta_S = 10.472$ rad
$\alpha_D = 2.09$ rad/s^2
$\theta_D = 0.667$ rev
R2-46. $\omega_{CD} = 6.33$ rad/s
R2-47. $t = 10.4$ s
R2-49. $\alpha = \dfrac{\mu g}{r}$
$t_2 = \dfrac{v_G}{\mu g}$
$\omega = \dfrac{v_G}{r}$
R2-50. $N_B = 297$ N
$A_y = 344$ N
$A_x = 1.63$ N

Capítulo 20

20-1. $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_s \mathbf{k}$
$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} + (\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j}) \times (\omega_s \mathbf{k})$
$\boldsymbol{\alpha} = \omega_y \omega_s \mathbf{i} - \omega_x \omega_s \mathbf{j}$
20-2. $\boldsymbol{\omega} = \{5.66\mathbf{j} + 6.26\mathbf{k}\}$ rad/s
$\boldsymbol{\alpha} = \{-3.39\mathbf{i}\}$ rad/s^2
20-3. $\mathbf{v}_A = \{-7.61\mathbf{i} - 1.18\mathbf{j} + 2.54\mathbf{k}\}$ m/s
$\mathbf{a}_A = \{10.4\mathbf{i} - 51.6\mathbf{j} - 0.463\mathbf{k}\}$ m/s^2
20-5. $\omega = -8.944$ rad/s
$\omega = \{-8.0\mathbf{j} + 4.0\mathbf{k}\}$ rad/s
$(\dot{\omega}_2)_{XYZ} = \{32\mathbf{i}\}$ rad/s^2
$\boldsymbol{\alpha} = \{32\mathbf{i}\}$ rad/s^2

20-6. $\mathbf{v}_A = \{-0.225\mathbf{i}\}$ m/s
$\mathbf{a}_A = \{-0.135\mathbf{i} - 0.1125\mathbf{j} - 0.130\mathbf{k}\}$ m/s^2

20-7. $\omega_A = \left(\frac{r_C}{h_1}\right)\left(\frac{r_B h_1 \omega}{r_C h_2 + r_B h_1}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{r_B h_1 \omega}{r_C h_2 + r_B h_1}\right)\mathbf{k}$

20-9. $\boldsymbol{\omega} = \{6\mathbf{j} + 15\mathbf{k}\}$ rad/s
$\boldsymbol{\alpha} = \{-90\mathbf{i} + 1.5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\}$ rad/s^2
$\mathbf{v}_B = \{-90\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 6\mathbf{k}\}$ pies/s
$\mathbf{a}_B = \{243\mathbf{i} - 1353\mathbf{j} + 1.5\mathbf{k}\}$ pies/s^2

20-10. $\mathbf{v}_B = \{410\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 6\mathbf{k}\}$ pies/s
$\mathbf{a}_B = \{293\mathbf{i} - 1353\mathbf{j} + 1.5\mathbf{k}\}$ pies/s^2

20-11. $\boldsymbol{\omega} = \{-8.00\mathbf{j}\}$ rad/s
$\boldsymbol{\alpha} = \{64.0\mathbf{i}\}$ rad/s^2
$\mathbf{v}_A = \{-0.905\mathbf{i}\}$ m/s
$\mathbf{a}_A = \{-7.24\mathbf{j} - 7.24\mathbf{k}\}$ m/s^2

20-13. $\boldsymbol{\omega} = \{-0.8\mathbf{i} - 0.1\mathbf{j} + 0.6\mathbf{k}\}$ rad/s^2
$\mathbf{v}_A = \{-8.66\mathbf{i} + 8.00\mathbf{j} - 13.9\mathbf{k}\}$ pies/s
$\mathbf{a}_A = \{-24.8\mathbf{i} + 8.29\mathbf{j} - 30.9\mathbf{k}\}$ pies/s^2

20-14. $\boldsymbol{\omega}_B = \{5\mathbf{j} + 5\mathbf{k}\}$ rad/s

20-15. $\boldsymbol{\omega}_B = \{7.5\mathbf{j} + 2.5\mathbf{k}\}$ rad/s

20-17. $\mathbf{v}_A = \{-20\mathbf{i}\}$ m/s
$\mathbf{a}_A = \{-5\mathbf{i} - 400\mathbf{j}\}$ m/s^2
$\mathbf{v}_B = \{-124\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 26.0\mathbf{k}\}$ m/s
$\mathbf{a}_B = \{569\mathbf{i} - 2608\mathbf{j} - 75\mathbf{k}\}$ m/s^2

20-18. $\mathbf{v}_B = \{4876\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 26.0\mathbf{k}\}$ m/s
$\mathbf{a}_B = \{1069\mathbf{i} - 2608\mathbf{j} - 75\mathbf{k}\}$ m/s^2

20-19. $\mathbf{v}_A = \{10\mathbf{i} + 14.7\mathbf{j} - 19.6\mathbf{k}\}$ pies/s
$\mathbf{a}_A = \{-6.12\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\}$ pies/s^2

20-21. $v_B = 6.00$ pies/s
$\omega_x = 0.6667$ rad/s
$\omega_y = 0.3333$ rad/s
$\omega_z = 0.8333$ rad/s
$\mathbf{v}_B = \{6.00\mathbf{j}\}$ pies/s
$\boldsymbol{\omega} = \{0.667\mathbf{i} + 0.333\mathbf{j} + 0.833\mathbf{k}\}$ rad/s

20-22. $\mathbf{a}_B = \{-6.50\mathbf{j}\}$ pies/s^2
$\boldsymbol{\alpha} = \{-0.722\mathbf{i} + 0.889\mathbf{j} - 0.278\mathbf{k}\}$ rad/s^2

20-23. $v_B = 4.71$ pies/s
$\boldsymbol{\omega}_{AB} = \{1.17\mathbf{i} + 1.27\mathbf{j} - 0.779\mathbf{k}\}$ rad/s

20-25. $(\omega_{AB})_x = 1.667$ rad/s
$(\omega_{AB})_y = 4.167$ rad/s
$(\omega_{AB})_z = 3.333$ rad/s
$v_B = -25$ pies/s
$\mathbf{v}_B = \{-20\mathbf{i} + 15\mathbf{k}\}$ pies/s

20-26. $\mathbf{a}_B = \{-1129\mathbf{i} + 847\mathbf{k}\}$ pies/s

20-27. $\mathbf{v}_B = \{1\mathbf{j}\}$ m/s

20-29. $(\omega_{AB})_x = -2.133$ rad/s
$(\omega_{AB})_y = 0.3902$ rad/s
$(\omega_{AB})_z = -0.3121$ rad/s^2
$\mathbf{v}_A = \{2.25\mathbf{k}\}$ m/s

20-30. $\mathbf{a}_A = \{-13.9\mathbf{k}\}$ m/s^2

20-31. $\mathbf{v}_B = \{10\mathbf{k}\}$ pies/s

20-33. $v_B = 1.875$ m/s
$\omega_x = 1.50$ rad/s
$\omega_y = 0.225$ rad/s
$\omega_z = 0.450$ rad/s

20-34. $a_B = -6.57$ m/s^2

20-35. $\boldsymbol{\omega} = \{1.50\mathbf{i} + 2.60\mathbf{j} + 2.00\mathbf{k}\}$ rad/s
$\mathbf{v}_C = \{10.4\mathbf{i} - 7.79\mathbf{k}\}$ pies/s

20-37. $\omega_x = 0.204$ rad/s
$\omega_y = -0.612$ rad/s
$\omega_z = 1.36$ rad/s
$v_B = 0.333$ m/s
$\boldsymbol{\omega}_{BC} = \{0.204\mathbf{i} - 0.612\mathbf{j} + 1.36\mathbf{k}\}$ rad/s
$\mathbf{v}_B = \{-0.333\mathbf{j}\}$ m/s

20-38. $\boldsymbol{\omega}_{BC} = \{0.769\mathbf{i} - 2.31\mathbf{j} + 0.513\mathbf{k}\}$ rad/s
$\mathbf{v}_B = \{-0.333\mathbf{j}\}$ m/s

20-39. $\mathbf{v}_C = \{-1.00\mathbf{i} + 5.00\mathbf{j} + 0.800\mathbf{k}\}$ m/s
$\mathbf{a}_C = \{-28.8\mathbf{i} - 5.45\mathbf{j} + 32.3\mathbf{k}\}$ m/s^2

20-41. $\mathbf{v}_A = \{-4.5\mathbf{i}\}$ m/s
$(\mathbf{v}_{C/A})_{xyz} = \{-1.8\mathbf{j}\}$ m/s
$\mathbf{v}_C = \{-4.5\mathbf{i} - 1.8\mathbf{j}\}$ m/s

20-42. $\mathbf{a}_C = \{19.35\mathbf{i} - 27.9\mathbf{j} - 21.6\mathbf{k}\}$ m/s^2

20-43. $\mathbf{v}_C = \{-1.79\mathbf{i} - 1.40\mathbf{j} + 3.58\mathbf{k}\}$ m/s
$\mathbf{a}_C = \{0.839\mathbf{i} - 3.15\mathbf{j} + 0.354\mathbf{k}\}$ m/s^2

20-45. $(\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} = \{1.20\mathbf{j} - 1.60\mathbf{k}\}$ m/s
$(\mathbf{a}_{A/B})_{xyz} = \{-0.320\mathbf{j} - 0.240\mathbf{k}\}$ m/s^2
$\mathbf{v}_A = \{-5.70\mathbf{i} + 1.20\mathbf{j} - 1.60\mathbf{k}\}$ m/s
$\mathbf{a}_A = \{-1.44\mathbf{i} - 3.74\mathbf{j} - 0.240\mathbf{k}\}$ m/s^2

20-46. $\mathbf{v}_A = \{-5.70\mathbf{i} + 1.20\mathbf{j} - 1.60\mathbf{k}\}$ m/s
$\mathbf{a}_A = \{-7.14\mathbf{i} - 1.94\mathbf{j} - 2.64\mathbf{k}\}$ m/s^2

20-47. $\mathbf{v}_C = \{-2.7\mathbf{i} - 6\mathbf{k}\}$ m/s
$\mathbf{a}_C = \{-72\mathbf{i} - 13.5\mathbf{j} + 7.8\mathbf{k}\}$ m/s^2

20-49. $(\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} = \{13.86\mathbf{i} - 8.00\mathbf{k}\}$ m/s
$(\mathbf{a}_{A/B})_{xyz} = \{17.58\mathbf{i} - 17.54\mathbf{k}\}$ m/s^2
$\mathbf{v}_A = \{13.9\mathbf{i} + 40.0\mathbf{j} - 8.00\mathbf{k}\}$ m/s
$\mathbf{a}_A = \{-62.4\mathbf{i} + 115\mathbf{j} - 17.5\mathbf{k}\}$ m/s^2

20-50. $\mathbf{v}_B = \{-5.20\mathbf{i} - 1.44\mathbf{j} + 16.5\mathbf{k}\}$ m/s
$\mathbf{a}_B = \{5.75\mathbf{i} - 109\mathbf{j} + 24.1\mathbf{k}\}$ m/s^2

20-51. $\mathbf{v}_B = \{-5.20\mathbf{i} - 1.44\mathbf{j} + 16.5\mathbf{k}\}$ m/s
$\mathbf{a}_B = \{5.75\mathbf{i} - 110\mathbf{j} + 23.1\mathbf{k}\}$ m/s^2

20-53. $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} = \{-3\mathbf{j} + 5.196\mathbf{k}\}$ m/s
$(\mathbf{a}_{B/A}) = \{-4.098\mathbf{i} + 1.098\mathbf{k}\}$ m/s^2
$\mathbf{v}_B = \{-17.8\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5.20\mathbf{k}\}$ m/s
$\mathbf{a}_B = \{3.05\mathbf{i} - 30.9\mathbf{j} + 1.10\mathbf{k}\}$ m/s^2

20-54. $\mathbf{v}_C = \{2.80\mathbf{j} - 5.60\mathbf{k}\}$ m/s
$\mathbf{a}_C = \{-56\mathbf{i} + 2.1\mathbf{j}\}$ m/s^2

20-55. $\mathbf{v}_C = \{2.80\mathbf{j} - 5.60\mathbf{k}\}$ m/s
$\mathbf{a}_C = \{-56\mathbf{i} + 2.1\mathbf{j} - 1.40\mathbf{k}\}$ m/s^2

Capítulo 21

21-2. $I_{\bar{y}} = \frac{3m}{80}(h^2 + 4a^2)$
$I_{y'} = \frac{m}{20}(2h^2 + 3a^2)$

21-3. $I_y = \frac{1}{3}mr^2$
$I_x = \frac{m}{6}(r^2 + 3a^2)$

21-5. $m = \dfrac{\rho a^2 h}{2}$
$I_{xy} = \frac{m}{12}a^2$

21-6. $I_{xy} = \frac{ma^2}{20}$

21-7. $I_{x'} = \frac{13}{24}mr^2$
$I_{y'} = \frac{7mr^2}{12}$
$I_{z'} = \frac{13}{24}mr^2$

21-9. $m_1 = m_2 = m_3 = 12$ kg
$I_x = 80$ kg·m^2
$I_y = 128$ kg·m^2
$I_z = 176$ kg·m^2
$I_{xy} = 72$ kg·m^2
$I_{yz} = -24$ kg·m^2
$I_{xz} = -24$ kg·m^2

21-10. $I_{xy} = 4.08$ kg·m^2
$I_{yz} = 1.10$ kg·m^2
$I_{xz} = 0.785$ kg·m^2

21-11. $I_x = 1.36$ kg·m^2
$I_y = 0.380$ kg·m^2
$I_z = 1.26$ kg·m^2

21-13. Por simetría $\bar{y} = 0.5$ pie
$\bar{x} = -0.667$ pie
$I_{x'} = 0.0272$ slug·pie^2
$I_{y'} = 0.0155$ slug·pie^2
$I_{z'} = 0.0427$ slug·pie^2

21-14. $I_{y'} = 1.25$ slug·pie^2

21-15. $I_z = 3.54(10^{-3})$ kg·m^2

21-17. $I_{xy} = [0 + 0.4(2)(0)(0.5)]$
$+ [0 + 0.6(2)(0.3)(0.5)]$
$+ [0 + 0.5(2)(0.6)(0.25)]$
$= 0.330$ kg·m^2

21-18. $I_{xx} = 0.626$ kg·m^2
$I_{yy} = 0.547$ kg·m^2
$I_{zz} = 1.09$ kg·m^2

21-19. $I_z = 0.429$ kg·m^2

21-22. $T = 0.0920$ pie·lb

21-23. $\mathbf{H}_G = \{0.0207\mathbf{i} - 0.00690\mathbf{j} + 0.0690\mathbf{k}\}$ slug·pie^2/s

21-25. $I_{x'} = I_{z'} = 13.55$ kg·m^2
$I_{y'} = 0.100$ kg·m^2
$\omega_z = 2.58$ rad/s

21-26. $H_A = 26.9$ kg·m^2/s

21-27. $\boldsymbol{\omega} = \{-0.0625\mathbf{i} - 0.119\mathbf{j} + 0.106\mathbf{k}\}$ rad/s

21-29. $H_x = 0.3375$ kg·m^2/s
$H_y = 0$
$H_z = 1.6875$ kg·m^2/s
$\mathbf{H}_G = \{0.3375\mathbf{i} + 1.6875\mathbf{k}\}$ kg·m^2/s
$\mathbf{H}_O = \{21.9\mathbf{i} + 1.69\mathbf{k}\}$ kg·m^2/s
$T = 78.5$J

21-30. $\mathbf{H}_O = \{21.9\mathbf{i} + 0.5625\mathbf{j} + 1.69\mathbf{k}\}$ kg·m^2/s
$T = 81.3$ J

21-31. $\mathbf{H}_A = \{-2000\mathbf{i} - 2500\mathbf{j} + 22\,500\mathbf{k}\}$ kg·m^2/s

21-33. $I_x = 0.3235$ slug·pie^2
$I_y = 0.2588$ slug·pie^2
$I_z = 0.06470$ slug·pie^2
$\boldsymbol{\omega} = \{-2.16\mathbf{i} + 5.40\mathbf{j} + 7.20\mathbf{k}\}$ rad/s
$\mathbf{u}_O = -0.233\mathbf{i} + 0.583\mathbf{j} + 0.778\mathbf{k}$

21-34. $\boldsymbol{\omega} = \{-0.954\mathbf{i} + 2.38\mathbf{j} + 3.18\mathbf{k}\}$ rad/s
$\mathbf{u}_A = -0.233\mathbf{i} + 0.583\mathbf{j} + 0.778\mathbf{k}$

21-35. $T = 0.0920$ pie·lb

21-37. $\mathbf{u}_O = \{0.141\mathbf{j} - 0.990\mathbf{k}\}$
$\mathbf{I}_O = \{8.57\mathbf{i}\}$N·s

21-38. $\boldsymbol{\omega} = \{-28.1\mathbf{j} + 80\mathbf{k}\}$ rad/s

21-39. $\mathbf{H}_O = \{144\mathbf{i} + 144\mathbf{j} + 1056\mathbf{k}\}$ kg·m^2/s
$T = 3.17$ kJ

21-41. $\Sigma M_x = (I_x\dot{\omega}_x - I_{xy}\dot{\omega}_y - I_{xz}\dot{\omega}_z)$
$- \Omega_z(I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z - I_{yx}\omega_x)$
$+ \Omega_y(I_z\omega_z - I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y)$

21-42. $\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - I_y\Omega_z\omega_y + I_z\Omega_y\omega_z$

21-43. $A_x = 9.64$ N
$B_x = 9.98$ N

21-45. $\omega_x = 0$
$\omega_y = -\omega\cos\theta$
$\omega_z = \omega\,\text{sen}\,\theta$
$\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0$
$\omega = \sqrt{\dfrac{3g\tan\theta}{L(2\,\text{sen}\,\theta + 1)}}$

21-46. $B_x = -250$ N
$A_y = B_y = 0$
$A_z = B_z = 24.5$ N

21-47. $\Sigma M_x = \dfrac{I_{yz}}{\rho^2} v_G^2$
$\Sigma M_y = -\dfrac{I_{zx}}{\rho^2} v_G^2$
$\Sigma M_z = 0$

21-49. $(0.1 \cos 30°)(2) - (0.1 \text{ sen } \theta_F)m_F$
$-(0.2 \text{ sen } \theta_D)m_D = 0$
$\theta_D = 139°$
$m_D = 0.661$ kg
$\theta_F = 40.9°$
$m_F = 1.32$ kg

21-50. $M = 81.0$ N·m

21-51. $M_Y = -218$ lb·pie
$M_Z = 0$
$M_X = 100$ lb·pie

21-53. $\omega_x = \omega_p \text{ sen } \theta$
$\omega_y = \omega_s \;\; \omega_z = \omega_p \cos \theta$
$\dot{\omega}_x = -\omega_s \omega_p \cos \theta$
$\dot{\omega}_y = 0$
$\dot{\omega}_z = \omega_s \omega_p \text{ sen } \theta$
$M_x = -\frac{4}{3} ml^2 \omega_s \omega_p \cos \theta$
$M_y = \frac{1}{3} ml^2 \omega_p{}^2 \text{ sen } 2\theta$
$M_z = 0$

21-54. $F_y = -\dfrac{mL^2 \omega_1 \omega_2}{12a}$
$E_X = 0$
$E_Y = \dfrac{mL^2 \omega_1 \omega_2}{12a}$
$E_Z = F_Z = \dfrac{mg}{2}$

21-55. $F = 30$ N
$N = 1.35$ kN
$M = 27.5$ N·m

21-57. $I_z = 3.4938$ slug·pie^2
$I_x = I_y,\; \omega_x = \omega_y = 0,\; \dot{\omega}_z = 6$ rad/s^2
$T = 21.0$ lb·pie

21-58. $T = 23.4$ lb·pie

21-59. $B_Y = 0$
$A_Z = -41.2$ N
$A_X = 0$
$B_Z = 139$ N

21-62. $\alpha = 69.3°$
$\beta = 128°$
$\gamma = 45°$
No

21-63. $N_w = 77.7$ lb

21-65. $M_x = \left[\left(\frac{50}{32.2}\right)(0.2)^2\right](2)(100) = 12.4$ lb·pie
$M_y = 0$
$M_z = 0$

21-66. $\Delta F = 53.4$ N

21-67. $\omega_s = 3.63\left(10^3\right)$ rad/s

21-69. $I = I_x = I_y = \frac{1}{16} mr^2$
$\omega_s = \sqrt{\dfrac{16g}{r \cos \alpha\left(16 \cos^2 \alpha - 26 \text{ sen}^2 \alpha + 1\right)}}$

21-70. $\omega_p = -4.905$ rad/s

21-71. $\omega_p = 13.5$ rad/s o 3.00 rad/s

21-73. $v = 88.89$ m/s
$\omega_s = 222.22$ rad/s
$M_x = 2$ kN·m

21-75. $H_G = 17.2$ Mg·m^2/s

21-77. $\phi = 12.8$ rad/s

21-78. $H_G = 0.352$ kg·m^2/s
$\dot{\psi} = 35.1$ rad/s

21-79. $H_G = 2.10$ Mg·m^2/s

21-81. $H_G = 4.945\left(10^6\right)$ kg·m^2/s
$\theta = 66.59°$
$\dot{\phi} = 81.7$ rad/s
$\dot{\psi} = 212$ rad/s
Como $I > I_z$, el movimiento es de *precesión regular*.

Capítulo 22

22-1. $\ddot{y} + 56.1y = 0$
$B = 0.1$ m
$A = 0.2003$ m
$y = 0.192$ m

22-2. $f = 4.98$ Hz
$\tau = 0.201$ s

22-3. $f = 2.02$ Hz
$y = -0.2 \cos 12.7t$
$C = 0.2$ pie

22-5. $B = 0.150$
$A = -0.1$
$x = -0.1 \text{ sen } (20t) + 0.150 \cos (20t)$
$C = 0.180$ m

22-6. $y = 0.107 \text{ sen } (7.00t) + 0.100 \cos (7.00t)$
$\phi = 43.0°$

22-7. $x = -0.0693 \text{ sen } (5.77t) - 0.075 \cos (5.77t)$
$C = 0.102$ m

22-9. $f = 2.52$ Hz
$\phi = 0° \qquad C = 0.3795$ m
$T_{máx} = 83.7$ kN

22-10. $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{k_G^2 + d^2}{gd}}$

22-11. $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}$

22-13. $I_A = 0.2894mgd$
$d = 146$ mm
$k_G = 0.627$ m

22-14. $\tau = 0.401$ s

22-15. $l = 0.457$ m

22-17. $F_{sp} = 28.8\theta$
$I_G = 0.7609$ slug · pie^2
$\ddot{\theta} + 15.376\theta = 0$
$f = 0.624$ Hz

22-18. $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{Mr^2 + 2mk_O{}^2}{kr^2}}$

22-19. $f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{12EI}{mL^3}}$

22-21. $s_{AB} = (l - l_0) - x_0$
$s_{AC} = (l - l_0) + x$
$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

22-22. $\omega_n = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$

22-23. $\omega_n = 76.7$ rad/s
$C = 230$ mm

22-25. $\ddot{\theta} + \frac{12ga^2}{lL^2}\theta = 0$
$\tau = \frac{2\pi L}{a}\sqrt{\frac{l}{12g}}$

22-26. $k_z = \frac{\tau r}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$

22-27. $k_z = \frac{\tau r}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$

22-29. $\frac{3}{2}mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg(r)(\text{sen}\,\theta)\dot{\theta} = 0$
$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}$

22-30. $\tau = 6.10\sqrt{\frac{a}{g}}$

22-31. $\tau = 0.401$ s

22-33. $V = 5\theta^2$
$T = 0.1921875\dot{\theta}^2$
$\ddot{\theta} + 26.0\theta = 0$

22-34. $\tau = 3.85\sqrt{\frac{m}{k}}$

22-35. $k_G = \frac{r}{2\pi}\sqrt{\frac{\tau^2 g - 4\pi^2 R}{R}}$

22-37. $V = \frac{1}{2}k\theta^2$
$T_1 = \frac{1}{2}Mk_z{}^2\dot{\theta}^2$
$\tau_1 = 2\pi\sqrt{\frac{Mk_z^2}{k}}$

22-38. $f = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

22-39. $f_n = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

22-41. $\ddot{y} + \frac{2k\,\text{sen}^2\,\theta}{m} = 0$
$\tau = 2.81$ s

22-42. $x = A\,\text{sen}\,\omega_n t + B\cos\omega_n t + \frac{F_0/k}{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2}\cos\omega t$

22-43. $y = A\,\text{sen}\,\omega_n t + B\cos\omega_n t + \left(\frac{F_0}{k - m\omega^2}\right)\cos\omega t$

22-45. $B = y_0$
$A = \frac{v_0}{\omega_n} - \frac{(F_O/k)\omega}{\omega_n - \frac{\omega^2}{\omega_n}}$
$\omega_n = 8.025$ rad/s
$y = (0.0186\,\text{sen}\,8.02t + 0.333\cos 8.02t$
$- 0.0746\,\text{sen}\,2t)$ pies

22-46. $(v_p)_{\text{máx}} = 2.07$ pies/s

22-47. $y = (361\,\text{sen}\,7.75t + 100\cos 7.75t$
$- 350\,\text{sen}\,8t)$ mm

22-49. $k = 4905$ N/m
$\omega_n = 14.01$ rad/s
$\omega = 14.0$ rad/s

22-50. $(x_p)_{\text{máx}} = 14.6$ mm

22-51. $(x_p)_{\text{máx}} = 35.5$ mm

22-53. $\omega_n = 18.57$ rad/s
MF = 0.997

22-54. $C = \frac{3F_O}{\frac{3}{2}(mg + Lk) - mL\omega^2}$

22-57. $F = 2c\dot{y}$
$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}}$
$c < \sqrt{mk}$

22-58. $\omega = 12.2$ rad/s
$\omega = 7.07$ rad/s

22-59. $k = 417$ N/m
$k = 1250$ N/m

22-61. $\omega_n = 8.923$ rad/s
$\omega_d = 8.566$ rad/s
$\tau_d = 0.734$ s

22-62. $y_P = 0.111 \text{ sen } (5t - 0.588) \text{ m}$

22-63. $y = 0.803\left[e^{-0.859\,t} \text{ sen } (9.23t + 1.48)\right]$

22-65. $1.55\ddot{\theta} + 540\dot{\theta} + 200\theta = 0$
$\omega_n = 11.35 \text{ rad/s}$
$(c_{dp})_c = 3.92 \text{ lb} \cdot \text{s/pie}$

22-66. $y = \left[-0.0702[e^{-3.57\,t} \text{sen}(8.54t)]\right] \text{ m}$

22-67. $y = (-0.0232 \text{ sen } 8.97t + 0.333 \cos 8.97t + 0.0520 \text{ sen } 4t) \text{ pies}$

22-69. $\omega_n = 11.62 \text{ rad/s}$
$c_c = 92.95$
$\omega_d = 8.87 \text{ rad/s}$
$A = 0.0338$
$y = 33.8\left[e^{-7.5\,t} \text{ sen}(8.87t)\right] \text{ mm}$

22-70. $y = A \text{ sen } \omega_n t + B \cos \omega_n t + \dfrac{\frac{k\delta_0}{m}}{\left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)} \cos \omega_0 t$

22-71. $\omega_0 = \omega_n = 19.7 \text{ rad/s}$

22-73. $F = 0.006470\omega_0^2 \text{ sen } \omega_0 t$
$k = 1800 \text{ lb/pie} \quad \omega_n = 19.657$
$\omega_0 = 19.0 \text{ rad/s}$ o $\omega_0 = 20.3 \text{ rad/s}$

22-74. $Lq + Rq + \left(\frac{1}{C}\right)q = E_0 \cos \omega t$

22-75. $\ddot{y} + 16\dot{y} + 12y = 0$
Como $c > c_c$, el sistema no vibrará. Por consiguiente, está sobreamortiguado.

22-77. $L\ddot{q} + Rq + \dfrac{1}{c}q = 0$

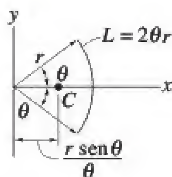
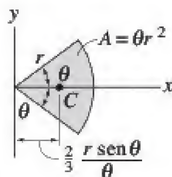
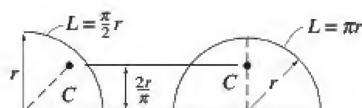
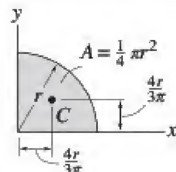
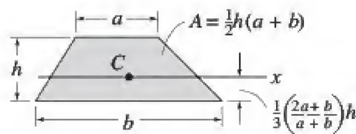
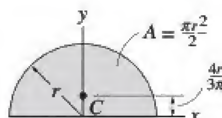
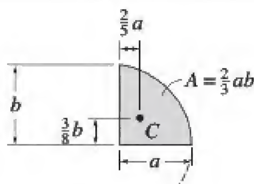
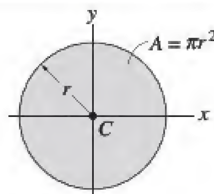
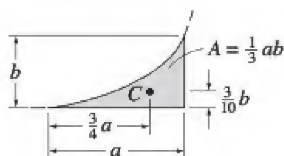
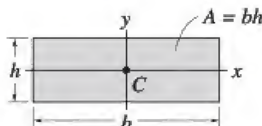
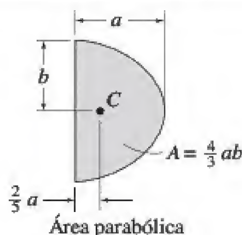
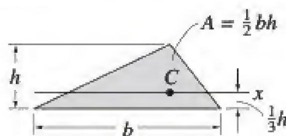
Índice

L

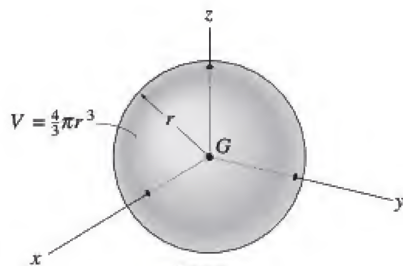
M

W

Propiedades geométricas de elementos lineales y de área

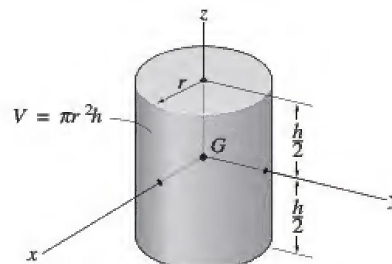
Ubicación del centroide	Ubicación del centroide	Momento de inercia de área
 Segmento de arco circular	 Área de un sector circular	$I_x = \frac{1}{4}r^4(\theta - \frac{1}{2}\text{sen}\,2\theta)$ $I_y = \frac{1}{4}r^4(\theta + \frac{1}{2}\text{sen}\,2\theta)$
 Arcos de un cuarto de círculo y de un semicírculo	 Área de un cuarto de círculo	$I_x = \frac{1}{16}\pi r^4$ $I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$
 Área trapezoidal	 Área semicircular	$I_x = \frac{1}{8}\pi r^4$ $I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$
 Área semiparabólica	 Área circular	$I_x = \frac{1}{4}\pi r^4$ $I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$
 Área exparabólica	 Área rectangular	$I_x = \frac{1}{12}bh^3$ $I_y = \frac{1}{12}hb^3$
 Área parabólica	 Área triangular	$I_x = \frac{1}{36}bh^3$

Centro de gravedad y momento de inercia de masa de sólidos



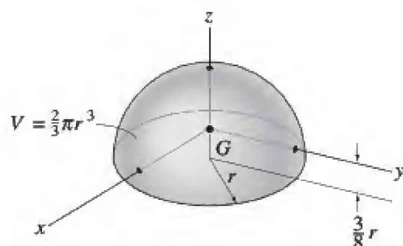
Esfera

$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5} mr^2$



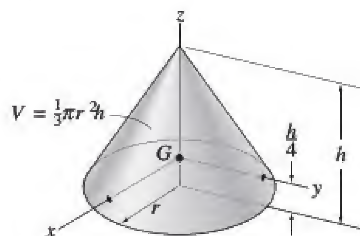
Cilindro

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12} m(3r^2 + h^2) \quad I_{zz} = \frac{1}{2} mr^2$



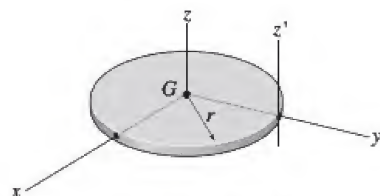
Semiesfera

$I_{xx} = I_{yy} = 0.259mr^2 \quad I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$



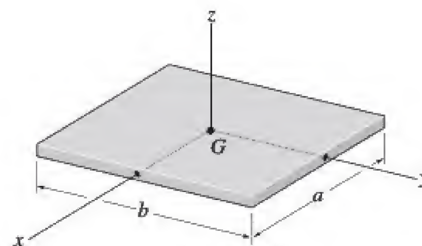
Cono

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{3}{80} m (4r^2 + h^2) \quad I_{zz} = \frac{3}{10} mr^2$



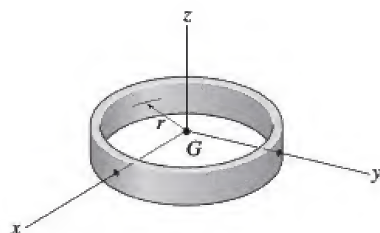
Disco circular delgado

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} mr^2 \quad I_{zz} = \frac{1}{2} mr^2 \quad I_{z'z'} = \frac{3}{2} mr^2$



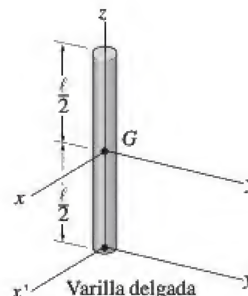
Placa delgada

$I_{xx} = \frac{1}{12} mb^2 \quad I_{yy} = \frac{1}{12} ma^2 \quad I_{zz} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$



Anillo delgado

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2} mr^2 \quad I_{zz} = mr^2$



Varilla delgada

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12} m\ell^2 \quad I_{x'x'} = I_{y'y'} = \frac{1}{3} m\ell^2 \quad I_{z'z'} = 0$

Esta decimosegunda edición de *Ingeniería Mecánica: Dinámica*, ofrece una presentación clara y completa de la teoría y las aplicaciones de la ingeniería mecánica. El texto ha sido mejorado significativamente en relación con la edición anterior, de manera que tanto el profesor como el estudiante obtengan el apoyo didáctico que requieren y encuentren más ameno el material.

Novedades de esta edición

Modificaciones en el contenido. Cada sección del texto se revisó con sumo cuidado, y en muchas áreas el material se volvió a escribir con el fin de explicar de mejor manera los conceptos.

Problemas fundamentales. Esta sección ofrece a los lectores aplicaciones simples de los conceptos vistos en el capítulo, con el fin de desarrollar sus habilidades para resolver ciertas dificultades antes de intentar solucionar los problemas estándar que le siguen.

Problemas conceptuales. Son problemas que involucran situaciones conceptuales relacionadas con la aplicación de los principios de mecánica presentados en el capítulo.

Fotografías adicionales. Se han agregado más de 60 fotografías de aplicaciones reales que ilustran los ejemplos que se presentan a lo largo del libro.

Problemas nuevos. Son alrededor de 800, que equivalen al 50% del total; entre ellos aplicaciones en biomecánica e ingeniería aeroespacial y petrolera.

Para más información visite:
www.pearsoneducacion.net/hibbeler

Prentice Hall
es una marca de



www.pearsoneducacion.net

